חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי 2 ת'

(טכניון, 104014)

תקציר חומר לימוד

לפניות: gmgjun@netvision.net.il

תוכן עניינים

אלגברה של וקטורים

הגדרה:

סקלר – מושג המוגדר ע"י מספר.

וקטור – מושג המוגדר ע"י גודל, כיוון ומגמה (וקטור יסומן ע"י $\vec{a}$ ואורכו יסומן ע"י $\left|\vec{a}\right|$).

הגדרה:

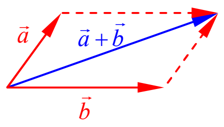
שני וקטורים **שווים** זה לזה אם יש להם אותו גודל, כיוון ומגמה.

הגדרה:

וקטור שאורכו 1, יקרא – **וקטור יחידה** (יסומן ע"י $\hat{a}$).

הגדרה:

סכום של שני וקטורים הוא וקטור שגודלו, כיוונו ומגמתו נתונים ע"י **חוק המקבילית**:



מסקנה:

קומוטטיביות חיבור וקטורים:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

הגדרה:

סכום של כמה וקטורים:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\triangleq\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$$

מסקנה:

אסוציאטיביות חיבור וקטורים:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

הגדרה:

$\vec{b}$ יקרא וקטור נגדי ל- $\vec{a}$, אם יש להם אותו גודל וכיוון, אך המגמה הפוכה (יסומן: $\vec{b}=-\vec{a}$).

מסקנה:

$$\vec{b}=-\vec{a}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}=-\vec{b}$$

הגדרה:

וקטור האפס (יסומן ע"י $\vec{0}$) הוא וקטור המקיים:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

מסקנה:

$$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$$

הגדרה:

הפרש וקטורים:

$$\vec{a}-\vec{b}\triangleq\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

הגדרה:

כפל בסקלר: יהי $\vec{a}$ וקטור ו- α סקלר. אזי $\alpha\vec{a}$ הוא ווקטור שמקיים:

1. $\alpha\vec{a}=\vec{0}\quad\Rightarrow\quad\alpha=0$.
2. $\left|\alpha\vec{a}\right|=\alpha\left|\vec{a}\right|\quad\Rightarrow\quad\alpha>0$ – מגמה וכיוון נשמרים.
3. $\left|\alpha\vec{a}\right|=\left|\alpha\right|\left|\vec{a}\right|\quad\Rightarrow\quad\alpha<0$ – כיוון נשמר, מגמה - הפוכה.

הערות:

1. לכל $\alpha\neq 0$ לווקטורים $\vec{a}$ ו- $\alpha\vec{a}$ יש אותו כיוון.
2. שני ווקטורים מקבילים **אם ורק אם** הם פרופורציוניים.

משפט:

יהיו $\vec{a},\vec{b}$ וקטורים ו- α,β סקלרים. אזי מתקיים:

1. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}=\beta\left(\alpha\vec{a}\right)$.
2. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.
3. $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

הגדרה:

יהיו $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ וקטורים ו- α,β,γ סקלרים. אזי לביטוי $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ קוראים **צירוף לינארי** של ווקטורים $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

הגדרה:

יהיו $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ וקטורים (שונים מ- $\vec{0}$). אומרים שהווקטורים האלה **תלויים לינארית**, אם קיימים סקלרים α,β,γ לא כולם 0, כך ש- $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$.

משפט:

שני ווקטורים $\vec{a},\vec{b}$ תלויים לינארית **אם ורק אם** הם מקבילים זה לזה (אלה וקטורים **קולינאריים**, כלומר נמצאים על אותו ישר).

משפט:

יהיו $\vec{u},\vec{v}$ שני ווקטורים שונים מאפס, שאינם קולינאריים. אזי כל ווקטור $\vec{a}\neq\vec{0}$ במישור שמכיל את $\vec{u},\vec{v}$, ניתן להביע בצורה יחידה ע"י: $\vec{a}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

<u>מסקנה</u> :

שלושה ווקטורים שונים מאפס מונחים במישור אחד, **<u>אם ורק אם</u>** הם תלויים לינארית (והם נקראים – ווקטורים **<u>קופלנריים</u>**).

<u>משפט</u>:

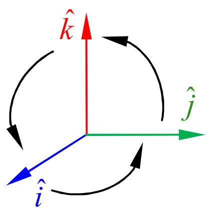
יהיו $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ שלשה ווקטורים שונים מאפס, שאינם קופלנריים. אזי כל ווקטור $\vec{a}\neq\vec{0}$ במרחב, שמכיל את $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ניתן להביע בצורה <u>יחידה</u> ע"י : $\vec{a}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$.

<u>קואורדינטות קרטזיות</u>

<u>הגדרה (עבור המרחב התלת-מימדי)</u>:

נגדיר **<u>ווקטורי קואורדינטות</u>** $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ כך שיתקיים :

1. לשלושת ווקטורים האלה אורך 1 (ווקטורי יחידה) : $\left|\hat{i}\right|=\left|\hat{j}\right|=\left|\hat{k}\right|=1$.
2. שלושתם ניצבים בזוגות.
3. הווקטורים מהווים מערכת <u>ימנית</u> :



מכיוון ש- $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ קופלנריים, נוכל להביע כל ווקטור אחר $\vec{a}$ במרחב בצורה יחידה :

$$\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$

כלומר במערכת קרטזית נתונה, לכל ווקטור מתאימה שלישייה סדורה $\left(a_1,a_2,a_3\right)$ <u>יחידה</u>. שלישייה זאת נקראת : **<u>הקואורדינטות הקרטזיות</u>** של $\vec{a}$.

<u>משפט</u>:

אם $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$, אזי : $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

<u>הגדרה</u>:

<u>קואורדינטות של נקודה</u> M מוגדרות כקואורדינטות של ווקטור $\overrightarrow{OM}$, כאשר O היא נקודה שרירותית קבועה, שנקראת **<u>ראשית הצירים</u>**.

היטל

הגדרה:

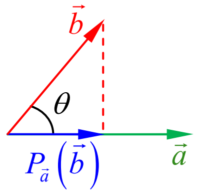
יהיו $\vec{a},\vec{b}$ וקטורים שונים מאפס, שהזווית ביניהם היא θ. **ההיטל** של וקטור $\vec{b}$ על וקטור $\vec{a}$ הוא וקטור ש-:

אורכו: $\left|\vec{b}\right|\left|\cos\theta\right|$.

כיוונו: כיוון של $\vec{a}$.

מגמתו: כמגמת $\vec{a}$, אם θ חדה,

הפוכה ל- $\vec{a}$, אם θ כהה.



מסקנה:

$$\boxed{P_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|\cos\theta\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\theta\cdot\hat{a}}$$

תכונות בסיסיות:

1. אם $\vec{a}\parallel\vec{b}$, אז $P_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)=\vec{b}$.
2. אם $\vec{a}\perp\vec{b}$, אז $P_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)=\vec{0}$.
3. היטל הוא פעולה ליניארית, כלומר:

$$P_{\vec{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=P_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)+P_{\vec{a}}\left(\vec{c}\right)$$
$$P_{\vec{a}}\left(\alpha\vec{b}\right)=\alpha P_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)$$

מכפלה סקלרית

הגדרה:

יהיו $\vec{a},\vec{b}$ וקטורים שונים מאפס, שהזווית ביניהם היא θ. **המכפלה הסקלרית** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ היא סקלר, שאורכו המוחלט הוא המכפלה של האורך של $\vec{a}$ באורך ההיטל של $\vec{b}$ על $\vec{a}$. סימנו חיובי אם θ חדה ושלילי אם θ כהה:

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|P_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\cos\theta\right|\frac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\cos\theta\right|$$

מסקנה:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta}$$

תכונות, מסקנות, משפטים:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ **אם ורק אם** $\vec{a}\perp\vec{b}$ (או שלפחות אחד מהם – $\vec{0}$).
3. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ אקסטרמלי (מינימלי או מקסימלי) **אם ורק אם** $\vec{a}\parallel\vec{b}$ (כי $\left|\cos\theta\right|=1$).
4. יהיו $\vec{a},\vec{b}$ וקטורים שונים מאפס. אזי הזווית θ ביניהם נתונה ע"י: $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

5. $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ - אי-שוויון קושי-שוורץ (נובע מכך ש- $\cos\theta$ חסום ע״י ± 1).

6. בי-ליניאריות:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

7. $\left(\alpha\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\alpha\vec{b}\right)$.

8. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

9. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$ (אי-שיוויון המשולש).

10. עבור וקטורי הקואורדינטות הקרטזיים:

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0$$

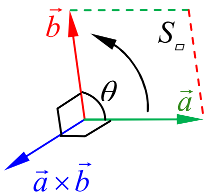
11. אם $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ו- $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, אזי:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

מכפלה וקטורית

הגדרה:

יהיו $\vec{a},\vec{b}$ וקטורים. **המכפלה הוקטורית** $\vec{a}\times\vec{b}$ (לפי סדר זה!) היא וקטור, שגודלו – שטח המקבילית הנבנית על הווקטורים $\vec{a},\vec{b}$, כיוונו ניצב לכיוון המישור, המכיל את $\vec{a},\vec{b}$ ומגמתו נקבעת על פי כלל יד ימין:



$$\boxed{S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\underbrace{|\vec{a}|}_{base}\underbrace{|\vec{b}|\sin\theta}_{height}}$$

כאשר $0\le\theta\le\pi$, לכן $\sin\theta\ge 0$.

תכונות, מסקנות, משפטים:

1. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$.

2. $\vec{a}\,||\,\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ (או אחד מהווקטורים הוא $\vec{0}$).

3.

$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$$
$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$
$$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k},\quad \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i},\quad \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$$

4. בי-לינאריות:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

$$\left(\alpha\vec{a}\right)\times\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\times\left(\alpha\vec{b}\right)$$

5. אם $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ו- $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$:

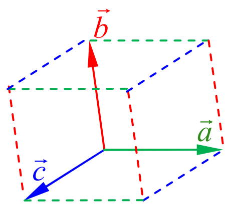
$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\hat{i}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\hat{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\hat{k}$$

<u>וברישום סימבולי</u>:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\det\begin{pmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}}$$

<u>מכפלה מעורבת</u>

יהיו $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ וקטורים. <u>**המכפלה המעורבת**</u> $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ היא <u>סקלר</u>, שארכו המוחלט הוא נפח של מקבילון שנבנה על שלושת הווקטורים:



<u>**תכונות, מסקנות, משפטים**</u>:

1. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$.

2. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

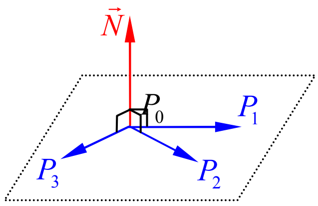
3. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{0}$ <u>**אם ורק אם**</u> $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ <u>קופלנריים</u> (או לפחות אחד הווקטורים הוא $\vec{0}$).

גיאומטריה אנליטית במרחב

מישורים וישרים

הגדרה:

מישור שעובר בנקודה $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ וניצב לווקטור $\vec{N}$ (**נורמל למישור**) הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות $P=(x,y,z)$, כך שלכל נקודה P מתקיים: $\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{N}$.



מההגדרה נובע שכל נקודה $P(x,y,z)$ מקיימת $\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{N}$.

אבל זה מתקיים **אם ורק אם**: $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{N}=0$.

נסמן:

$$\vec{N}=A\hat{i}+B\hat{j}+C\hat{k}$$

$$\overrightarrow{P_0P}=\vec{P}-\vec{P_0}=(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

ממשוואה $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{N}=0$ נקבל שכל נקודה במישור מקיימת את:

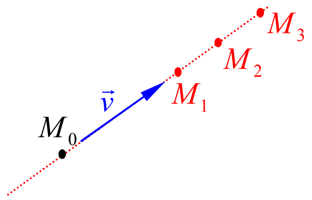
$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

כלומר, זהי **משוואת המישור**.

או בצורה נוספת: $\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$, כאשר $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

הגדרה:

קו ישר שעובר בנקודה $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ ומקביל לווקטור $\vec{v}$ הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות $M=(x,y,z)$, כך שלכל נקודה M מתקיים: $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{v}$.



$\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad \exists t:\overrightarrow{M_0M}=t\vec{v}$ (וקטורים פרופורציונאליים).

נסמן:

$$\vec{v}=(a,b,c)$$

$$\overrightarrow{M_0M}=\vec{M}-\vec{M_0}=(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

$$\overrightarrow{M_0M}=t\vec{v}$$

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=t(a,b,c)$$

ומכאן נקבל **הצגה פרמטרית של ישר** (משוואת הישר: $\vec{M}=\vec{M_0}+t\cdot\vec{v}$):

$$\boxed{\begin{cases}x=x_0+t\cdot a\\ y=y_0+t\cdot b\\ z=z_0+t\cdot c\end{cases}}$$

או **בהצגה קנונית**:

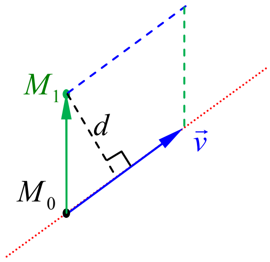
$$\boxed{t=\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$

 |

משפט:

מרחק מנקודה M_1 **לישר** שעובר דרך נקודה M_0 ומקביל ל- $\vec{v}$, נתון ע"י:

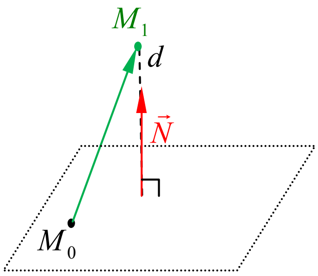
$$\boxed{d=\frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{v}|}}$$



שזהו שטח המקבילית ($\left|\vec{v}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|$) חלקי בסיס ($|\vec{v}|$) = גובה המקבילית.

משפט:

מרחק מנקודה $M_1=(x_1,y_1,z_1)$ **למישור** שעובר דרך נקודה $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ וניצב ל- $\vec{N}=(A,B,C)$, נתון ע"י:



$$\boxed{d=\frac{\left|\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{N}|}}$$

שזהו אורך ההיטל של $\overrightarrow{M_0M_1}$ על $\vec{N}$.

נובע מהעובדה ש- $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=|\vec{a}|\left|P_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)\right|$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\left|P_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)\right|=\frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{|\vec{a}|}$.

או עבור רישום ברכיבים:

$$\boxed{d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

כאשר $Ax+By+Cz+D=0$ משוואת המישור.

נובע מהפיתוח הבא:

$$d=\frac{\left|\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{N}|}=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1\overbrace{-Ax_0-By_0-Cz_0}^{D}\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

עיקרון חשוב:

משוואה אחת – מורידה מימד אחד.

למשל, במרחב תלת-מימדי: משוואה אחת זהו מישור (דו-מימדי), שתי משוואות – ישר (חד מימדי).

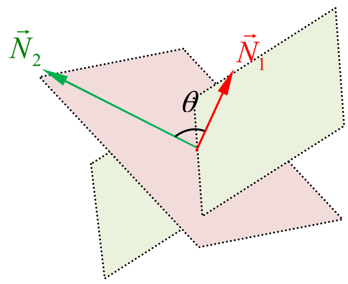
מצבים הדדיים בין מישורים

מישורים מקבילים:

אם ורק אם הניצבים $\vec{N}_1,\vec{N}_2$ למישורים קולינאריים – ($\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$), כלומר כאשר: $\boxed{\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = 0}$.

מישורים נחתכים:

הזווית בין שני המישורים מוגדרת כזווית <u>החדה</u> בין שני הניצבים $\vec{N}_1,\vec{N}_2$: $\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}}$.



מצבים הדדיים בין ישרים

ישרים מקבילים:

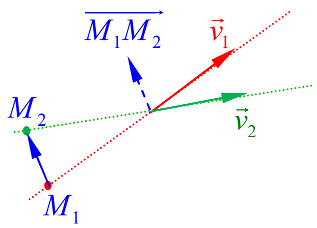
אם ורק אם וקטורי הכיוון $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ של ישרים קולינאריים – ($\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$), כלומר כאשר: $\boxed{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0}$.

ישרים נחתכים:

ניקח שני ישרים שהווקטורים המקבילים שלהם: $\vec{v}_1,\vec{v}_2$, ושתי נקודות על הישרים M_1,M_2 בהתאמה.

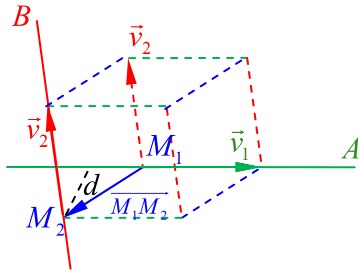
אם ווקטורים $\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2$ קופלנריים, אזי הישרים באותו מישור. ואם הם לא מקבילים, אז הם נחתכים:

$$\boxed{\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)=0}$$



ישרים מצטלבים:

אם ישרים מצטלבים ניתן לשאול לגבי המרחק ביניהם. למשל, **<u>מרחק בין ישר</u>** A **<u>לישר</u>** B זהו הקטע שניצב לשני הישרים, למעשה זהו הגובה (d) של המקבילון שנוצר ע"י ווקטורים: $\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2$. גובה המקבילון שווה לנפח המקבילון חלקי שטח הבסיס:



$$\boxed{d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)\right|}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}}$$

<u>חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי של פונקציות במספר משתנים</u>

<u>הגדרות</u>

<u>נקודה</u> ב- $\mathbb{R}^n$ זוהי n-יה סדורה: $x_1,x_2,...,x_n$. וברישום וקטורי: $\vec{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$.

תהי A תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$. **<u>פונקציה</u>** $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מתאימה לכל נקודה $\vec{x}\in A$ ערך <u>יחיד</u> בטווח $\mathbb{R}$.

<u>העתקה</u> $\vec{g}:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ מתאימה לכל נקודה $\vec{x}\in A$ בתחום, נקודה <u>יחידה</u> $\vec{y}\in\mathbb{R}^m$ בטווח.
העתקה היא בעצם m פונקציות $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$: $\vec{g}\left(\vec{x}\right)=\left(f_1\left(\vec{x}\right),f_2\left(\vec{x}\right),...,f_m\left(\vec{x}\right)\right)$.

נתבונן בפונקציה $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. **<u>הגרף של פונקציה</u>** f היא הקבוצה הבאה:

$$G\left(f\right)=\left\{\left(x,y,z\right)|\left(x,y\right)\in A,z=f\left(x,y\right)\right\}$$

כלומר זהו **<u>משטח</u>** דו-מימדי במרחב התלת-מימדי.
באופן כללי, עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הגרף נוצר במרחב ממימד $n+1$.

תהי $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה, ויהי c ערך ממשי כלשהו. **<u>קו גובה</u>** של f המתאים לערך c, הוא קבוצה של כל הנקודות $\left(x,y\right)\in A$, שעבורן מתקיים: $f\left(x,y\right)=c$.

תהי $f:A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציה, ויהי c ערך ממשי כלשהו. **<u>משטח רמה</u>** של f המתאים לערך c, הוא קבוצה של כל הנקודות $\left(x,y,z\right)\in A$, שעבורן מתקיים: $f\left(x,y,z\right)=c$.

<u>חתך של גרף</u> $z=f\left(x,y\right)$ הוא עקום (או קבוצה) של החיתוך בין משטח $z=f\left(x,y\right)$ לבין מישור (בקורס זה – חתך עם מישור מקביל למישורים הראשיים).

משטחים ריבועיים

הגדרה:

פולינום מסדר 2 במשתנים x,y:

$$F(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$$

כאשר a,b,c,d,e,f מספרים ממשיים כלשהם (לפחות אחד מ- a,b,c שונה מ-0).

הגדרה:

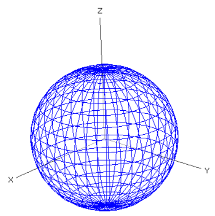
יהי $F(x,y,z)$ פולינום ריבועי במשתנים x,y,z. **משטח ריבועי** הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות $F(x,y,z)=0$.

קיים מספר סופי של אפשרויות למשטחים ריבועיים כלליים:

1. $x^2+y^2+z^2=R^2$.
2. $x^2+y^2=z^2$.
3. $x^2+y^2=z^2\pm a^2$.
4. $x^2\pm y^2=z$.

להלן המשטחים הנפוצים:

I. כדור



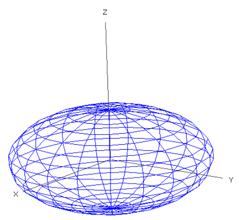
$x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$

אלה פני כדור שמרכזו בנקודה (x_0,y_0,z_0) ורדיוסו R.

כל החתכים של פני כדור הם מעגלים.

II. אליפסואיד



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1}$$

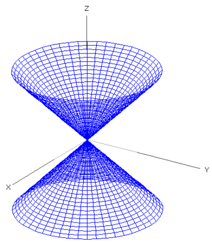
זהו אליפסואיד, שמרכזו בנקודה (x_0,y_0,z_0).

כאשר $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$ נקודות חיתוך עם הצירים הן: $(\pm a,0,0),(0,\pm b,0),(0,0,\pm c)$.

כל החתכים הם – אליפסות.

III. חרוט דו-צדדי

$$\boxed{(z-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$



$z^2=x^2+y^2$

זהו חרוט דו-צדדי, שציר הסימטריה שלו הוא הישר: $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$

(החיתוך של שני המישורים) ומישור הסימטריה: $z=z_0$.

החתכים שלו: עבור $z=c$ הם מעגלים, עבור $z=z_0$ זו נקודה, ועבור $x=x_0$ או $y=y_0$ אלה 2 ישרים $z^2=y^2$ $\quad (|z|=|y|)$.

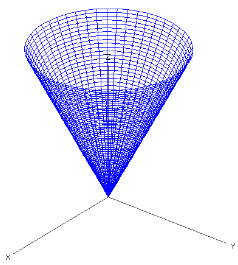
<u>הערה:</u>

חרוט שהחתכים שלו במקביל למישור XY הם אליפסות, נתון ע"י:

$$\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

IV. חרוט חד-צדדי

$$\boxed{z-z_0=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$

זהו חרוט חד-צדדי, שציר הסימטריה שלו הוא הישר: $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$

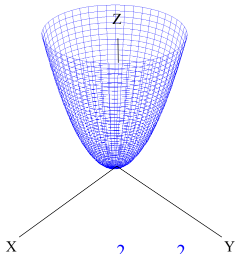
וקודקודו בנקודה (x_0,y_0,z_0).

<u>הערה:</u>

זהו אינו פולינום – כלומר, חרוט חד צדדי <u>אינו משטח ריבועי</u>.

V. פרבולואיד

$$\boxed{z-z_0=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$



$z=x^2+y^2$

זהו פרבולואיד, שציר הסימטריה שלו הוא הישר: $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$

וקודקודו בנקודה (x_0,y_0,z_0).

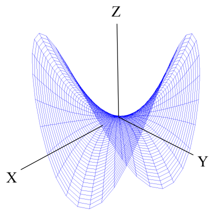
החתכים שלו: עבור $z=c$ הם מעגלים, עבור $z=z_0$ זו נקודה, ועבור $x=c$ או $y=c$ הם פרבולות.

<u>הערה:</u>

פרבולואיד, שהחתכים שלו במקביל למישור XY אליפסות, נתון ע"י: $z-z_0=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$

VI. **פרבולואיד היפרבולי**

$$\boxed{z-z_0=(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$$



$z=x^2-y^2$

זהו פרבולואיד היפרבולי, שמשטחי הסימטריה שלו הם מישורים:

$x=x_0, y=y_0$.

החתכים שלו: עבור $y=c$ הם פרבולות חיוביות ביחס לציר z,

עבור $x=c$ - פרבולות שליליות ביחס לציר z.

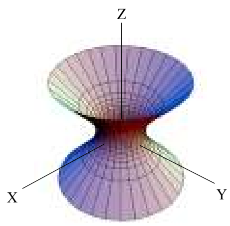
כל קווי הגובה שלו ($(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=c$) הם – היפרבולות, למעט:

$(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0$ - שני ישרים שנחתכים בנקודה (x_0,y_0).

<u>שם של גרף</u>: אוכף.

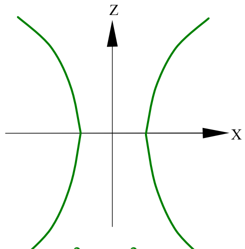
VII. **היפרבולואיד חד-יריעתי**

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(z-z_0)^2=1}$$



$z^2=x^2+y^2-1$

$x^2+y^2-z^2=1$

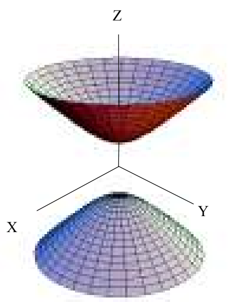


$x^2-z^2=1$

היפרבולואיד שבתמונה הוא
בעצם סיבוב של היפרבולה
$x^2-z^2=1$ סביב ציר z.

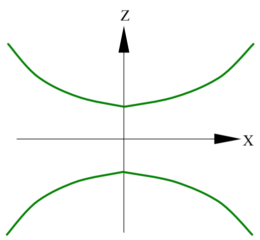
VIII. **היפרבולואיד דו-יריעתי**

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(z-z_0)^2=-1}$$



$z^2=x^2+y^2+1$

$x^2+y^2-z^2=-1$



$z^2-x^2=1$

היפרבולואיד שבתמונה הוא
בעצם סיבוב של היפרבולה
$z^2-x^2=1$ סביב ציר z.

<u>הערה</u>:

משטח גלילי הוא משטח שנתון ע"י פונקציה של 2 משתנים בלבד. למשל: $x^2+y^2=9$ וזהו גליל בעל רדיוס 3, כאשר ציר הסימטריה שלו – ציר z.

פונקציות והעתקות

הגדרות

עקום הוא התמונה ב- $\mathbb{R}^n$ של העתקה רציפה $[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$.

למשל:

עבור עקום ב- $\mathbb{R}^2$ אלה שתי פונקציות: $x(t),y(t)$, כאשר $\alpha\le t\le\beta$.

עבור עקום ב- $\mathbb{R}^3$ אלה שלוש פונקציות: $x(t),y(t),z(t)$, כאשר $\alpha\le t\le\beta$.

t נקרא **הפרמטר**, ו- $[\alpha,\beta]$ זהו **תחום הפרמטר**.

את **פרמטריזציה** של העקום מסמנים ע"י:

$$\boxed{\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}}$$

משפט:

תהי $\vec{r}(t)$ פרמטריזציה גזירה (כל רכיב גזיר) של עקום בתחום $\alpha\le t\le\beta$ ותהי נקודה $\alpha<t_0<\beta$.

אם $\vec{r}'(t_0)\ne\vec{0}$, **אזי** הוקטור $\vec{r}'(t_0)$ מקביל לישר המשיק לעקום בנקודה $\vec{r}(t_0)$:

$$\vec{r}'(t)=x'(t)\hat{i}+y'(t)\hat{j}+z'(t)\hat{k}$$

הערה:

זהו תנאי מספיק, אך לא הכרחי!

מטריקה

מרחק (מטריקה) בין שתי נקודות A,B במרחב $\mathbb{R}^n$, הוא מספר אי-שלילי $d(A,B)$, שמקיים:

$$1.\ d(A,B)=d(B,A)$$
$$2.\ d(A,B)=0 \quad\Leftrightarrow\quad A=B$$
$$3.\ d(A,B)\le d(A,C)+d(C,B)$$

התנאי האחרון – זהו אי-שוויון המשולש.

מטריקה אוקלידית:

$$A=(a_1,a_2),B=(b_1,b_2)$$
$$d(A,B)\triangleq\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

מטריקת הערך המוחלט:

$$A=(a_1,a_2),B=(b_1,b_2)$$
$$d(A,B)\triangleq|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$$

מטריקת המקסימום:

$$A=(a_1,a_2),B=(b_1,b_2)$$
$$d(A,B)\triangleq\max\{|a_1-b_1|,|a_2-b_2|\}$$

מרחב אוקלידי:

המרחב $\mathbb{R}^n$ שבו מרחקים נמדדים ע"י מטריקה אוקלידית.

מרחב מטרי:

המרחב $\mathbb{R}^n$ שבו מוגדרת מטריקה.

תהי M_0 נקודה במרחב ויהי R מספר אי-שלילי. קבוצת כל הנקודות M (באותו מרחב) שמקיימות $d(M,M_0)\le R$ נקראת **כדור**.

הערה: כדור ב- $\mathbb{R}^2$ זהו עיגול, וב- $\mathbb{R}$ זהו קטע.

אם $d(M,M_0)<R$ (ממש) זהו **כדור פתוח**.

כדור פתוח שרדיוסו ε (קטן בד"כ) נקרא – **סביבה**. (בכל סביבה מעגלית מוכלת סביבה ריבועית ולהפך).

נקודה M_0 בתת-קבוצה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת **נקודה פנימית**, אם קיימת סביבה של M_0, שכולה מוכלת בתוך U.

תת-קבוצה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ תקרא **קבוצה פתוחה**, אם כל הנקודות שלה הן פנימיות.

נקודה M_0 תקרא **נקודת שפה** של $U\subseteq\mathbb{R}^n$, אם בכל סביבה של M_0 יש נקודות של U ונקודות שאינן של U.

קבוצה סגורה – זו קבוצה שמכילה את כל נקודות השפה שלה.

U היא **קבוצה חסומה**, אם קיים כדור בעל רדיוס סופי R, כך ש- U מוכלת בתוכו.

סדרות של נקודות

הגדרה:

אומרים שנקודה L היא **גבול של סדרה** $\{M_k\}$, אם:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists K(\varepsilon)>0,\quad\forall k>K(\varepsilon)\quad\Rightarrow\quad d(M_k,L)<\varepsilon$$

כלומר החל מ- K כל הנקודות M_k נמצאות בסביבה של גבול L. L נקראת **נקודת הצטברות**.

משפטים/הגדרות:

1. **משפט בולצאנו ויירשטראס**: אם קבוצה U מכילה תת-קבוצה אינסופית וחסומה V, אז יש ב- U נקודת הצטברות של V.
2. קבוצה היא סגורה **אם ורק אם** היא מכילה את כל הנקודות ההצטברות שלה.
3. קבוצה שבה כל סדרות קושי מתכנסות לגבול (סופי, ששייך למרחב) נקראת **קבוצה קומפקטית**.
4. ב- $\mathbb{R}^n$ כל קבוצה סגורה וחסומה היא קומפקטית.

משפט:

תהי $\{M_k\}$ סדרת נקודות ב- $\mathbb{R}^n$: $\{M_k\}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)$ ותהי $L=(l_1,l_2,\ldots,l_n)$ נקודה. **אזי** $\lim\limits_{k\to\infty}M_k=L$ **אם ורק אם** הקואורדינטות מתכנסות בהתאמה, כלומר:

$$\lim_{k\to\infty}x_j^{(k)}=l_j\qquad(j=1,2,\ldots,n).$$

פונקציות

הגדרה:

תהיינה f,g מוגדרות על מרחבים מטריים:

$$f:X\to Y,\quad g:Y_1\to Z\qquad \left(Y\subseteq Y_1\right)$$

אזי הפונקציה המורכבת $g\circ f$ מוגדרת ע"י:

$$g\circ f:X\to Z$$
$$\left(g\circ f\right)(x)=g\left(f(x)\right)$$

למשל: אם $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ פרמטריזציה של עקום כלשהו, **אזי**

$f\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ היא פונקציה מורכבת ונקראת (בטכניון) **ההתנהגות של פונקציה לאורך העקום**.

תזכורת מחדו"א 1:

הגדרת גבול של פונקציה: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. ***אזי*** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ *אם ורק אם*:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \ \forall x:0<\left|x-x_0\right|<\delta_\varepsilon\ \ \Rightarrow\ \ \left|f(x)-L\right|<\varepsilon$$

הגדרה (הגדרה כללית של גבול):

תהי $f:X\to Y$ פונקציה, כאשר X מרחב מטרי עם מטריקה d_x ו-Y מרחב מטרי עם מטריקה d_y.

תהי f מוגדרת בסביבה של x_0 (ואולי גם ב-x_0 עצמה). **אזי** הפונקציה f שואפת לערך L, כאשר

$x\to x_0$ אם ורק אם:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \ \forall x:0<d_x\left(x,x_0\right)<\delta_\varepsilon\ \ \Rightarrow\ \ d_y\left(f(x),L\right)<\varepsilon$$

משפט (יחידות הגבול) (ניסוח עבור $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$):

אם הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=L$ קיים, **אזי** לכל מסלול $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$ $\left(\alpha\le t\le\beta\right)$

שמקיים $\lim\limits_{t\to t_0}\left(x(t),y(t)\right)=\left(x_0,y_0\right)$, מתקיים: $\lim\limits_{t\to t_0}f\left(x(t),y(t)\right)=L$.

מסקנה:

אם מצאנו שני מסלולים:

$$\left(\alpha_1\le t\le\beta_1\right)\qquad \vec{r}_1(t)=x_1(t)\hat{i}+y_1(t)\hat{j}$$
$$\left(\alpha_2\le t\le\beta_2\right)\qquad \vec{r}_2(t)=x_2(t)\hat{i}+y_2(t)\hat{j}$$

כך ש:

$$\lim_{t\to t_1}f\left(x_1(t),y_1(t)\right)\ne\lim_{t\to t_2}f\left(x_2(t),y_2(t)\right)$$

כאשר:

$$\lim_{t\to t_1}\left(x_1(t),y_1(t)\right)=\lim_{t\to t_2}\left(x_2(t),y_2(t)\right)=\left(x_0,y_0\right)$$

אזי לפונקציה אין גבול בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.

הגדרה (הגדרת גבול לפי היינה):

תהי $f: X \to Y$ פונקציה, כאשר X מרחב מטרי עם מטריקה d_x ו-Y מרחב מטרי עם מטריקה d_y.

תהיינה $L \in Y$ ו-$\{M_k\}, x_0 \in X$ המקיימות: $\forall k: M_k \neq x_0, \quad \lim\limits_{k\to\infty} M_k = x_0$. **אזי** קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $\{M_k\}$ כנ"ל מתקיים: $\lim\limits_{k\to\infty} f(M_k) = L$.

שיטות עיקריות לחישוב גבולות של פונקציות במספר משתנים:

1. משפט הסנדוויץ' – ע"י שימוש באי-שיוויונים.
2. שימוש באי-שיוויון: $\left|\frac{ab}{a^2+b^2}\right| \le \frac{1}{2}$.
3. אם ניתן לרשום $f(x,y) = g(x,y)\cdot h(x,y)$, כאשר g חסומה בסביבת (x_0,y_0) ו-$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} h(x,y) = 0$, **אזי** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0$.
4. מעבר לקואורדינטות אחרות (למשל – מעגליות, כדוריות וכו').
5. שימוש בגבולות ידועים מחדוו"א 1.

רציפות

הגדרה:

העתקה $\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ **רציפה** בנקודה $\vec{x}_0$, אם מתקיים:

1. $\vec{f}(\vec{x}_0)$ קיימת.
2. $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{f}(\vec{x})$ קיים.
3. $\boxed{\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(\vec{x}_0)}$.

או באופן שקול:

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta_\varepsilon>0,\quad\forall x: d_x(\vec{x},\vec{x}_0)<\delta_\varepsilon\quad\Rightarrow\quad d_y\left(\vec{f}(\vec{x}),\vec{f}(\vec{x}_0)\right)<\varepsilon}$$

הגדרה:

העתקה $\vec{f}:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ **רציפה** ב- A, אם $\vec{f}$ רציפה בכל נקודה $\vec{x}_0\in A$.

תכונות בסיסיות של העתקות/פונקציות רציפות:

1. אם f,g רציפות, **אזי** גם הפונקציות הבאות רציפות: $f\pm g,\ \alpha\cdot f,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}\ (g\neq0)$.
2. העתקה $\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ היא רציפה ב- $\vec{x}_0$ **אם ורק אם** כל אחד ממרכיביה $(f_1,f_2,...,f_m)$ הוא פונקציה רציפה ב- $\vec{x}_0$.
3. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- $\vec{x}_0$. אם $f(\vec{x}_0)\geq0$, **אזי** קיימת סביבה של $\vec{x}_0$, כך ש- $f(\vec{x})\geq0$ בסביבה זו.
4. נניח: $(Y\subseteq Y_1)\quad g:Y_1\to Z,\quad f:X\to Y$, כאשר $f(\vec{x}_0)=\vec{y}_0$. אם f רציפה ב- $\vec{x}_0$ ו- g רציפה ב- $\vec{y}_0$, **אזי** הפונקציה המורכבת $(g\circ f)(\vec{x})=g(f(\vec{x}))$ רציפה ב- $\vec{x}_0$.

הגדרה:

אומרים ש- $D\subset\mathbb{R}^n$ **קבוצה קשורה**, אם לכל שתי נקודות A,B ב- D ניתן למצוא עקום $\vec{r}(t)\quad(\alpha\leq t\leq\beta)$ שמקיים: $\vec{r}(\alpha)=A,\quad\vec{r}(\beta)=B$ וכך שכולו מוכל בתוך D.

משפט (ערך הביניים):

יהי D תחום קשור ב- $\mathbb{R}^n$ ותהי $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל D. תהיינה A,B שתי נקודות ב- D. **אזי** לכל מספר m בין $f(A)$ ל- $f(B)$ ניתן למצוא נקודה אחת לפחות $c\in D$, כך ש: $f(c)=m$.

משפט (ויירשטראס):

תהי D קבוצה קומפקטית (ב- $\mathbb{R}^n$ זו קבוצה סגורה וחסומה) ותהי f רציפה ב- D. **אזי**:

1. f חסומה ב- D.
2. f מקבלת ב- D את ערכי המינימום והמקסימום שלה.

גזירות

תזכורת מחדו"א 1:

אם הגבול:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

קיים וסופי, אז f גזירה בנקודה x_0. לגבול קוראים נגזרת ומסמנים ע"י: $f'(x_0),\frac{df}{dx}(x_0)$.

אם f גזירה ב- x_0, אז לגרף שלה $y=f(x)$ יש ישר משיק בנקודה $(x_0,f(x_0))$ ונוסחתו:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

הגדרה:

תהי $f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה ותהי $(x_0,y_0)\in U$ נקודה פנימית. אם הגבול:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}}$$

קיים וסופי, **אזי** נקרא לו **הנגזרת החלקית** של הפונקציה f לפי משתנה הראשון שלה (במקרה זה - x) בנקודה (x_0,y_0). ונסמן ע"י: $f_x(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ או $f_1(x_0,y_0)$ (נדיר).

עבור העתקה $\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$:

$$\boxed{\vec{y}_{(m\times1)}=\vec{f}(\vec{x}_0)_{(m\times1)}+D\vec{f}(\vec{x}_0)_{(m\times n)}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)_{(n\times1)}}$$

כאשר $D\vec{f}(\vec{x}_0)$ היא **מטריצת הנגזרות החלקיות** של $\vec{f}$.

נוסחאות שימושיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}\left(f(x,y_0)\right)\Big|_{x=x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{d}{dy}\left(f(x_0,y)\right)\Big|_{y=y_0}$$

הערות:

1. קיום הגבול $\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0}f(x,y)\right)$ לא גורר דבר, בפרט לא את קיום הגבול $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$!
2. לא בהכרח: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. אם כן, אז הנגזרת חלקית רציפה שם.
3. אם יש לפונקציה נגזרת חלקית בנקודה מסוימת – זה לא אומר שהיא רציפה בנקודה הזאת.

תזכורת מחדו"א 1:

הגדרה שקולה לנגזרת:

אם ניתן להציג את פונקציה $f(x)$ *בצורה:* $f(x_0+h)=f(x_0)+A\cdot h+\varepsilon(h)\cdot h$

כאשר A *קבוע ו-* $\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(h)=0$ *, אז* $f(x)$ *גזירה ב-* x_0 *ונגזרתה:* $f'(x_0)=A$.

$$\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}-A=0\quad\Rightarrow\quad A=f'(x_0)$$

הגדרה:

תהי $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה. f **<u>גזירה (דיפרנציאבילית)</u>** בנקודה פנימית $(x_0,y_0)\in D$ אם ורק

אם ניתן למצוא שני קבועים A,B ופוי $\varepsilon(x,y)$, כאשר $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\varepsilon(x,y)=0$, כך שניתן להציג את f

בצורה הבאה:

$$\boxed{f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

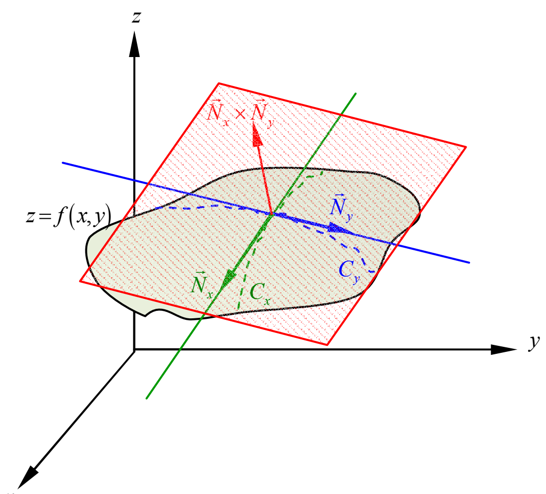
הערות:

1. אם f גזירה, אז: $A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad B=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
2. האיבר עם שורש הוא הביטוי של מרחק המתאים למטריקה שבה משתמשים.

משפט:

למשטח $z=f(x,y)$ <u>קיים מישור משיק</u> בנקודה (x_0,y_0) **<u>אם ורק אם</u>** $f(x,y)$ <u>גזירה</u>.

משוואת המישור המשיק:



יהי C_x עקום החיתוך בין המשטח $z=f(x,y)$ ומישור

$y=y_0$. **<u>אזי</u>** הווקטור המשיק לעקום זה בנקודה

$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ הוא: $\vec{N}_x=\left(1,0,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$

יהי C_y עקום החיתוך בין המשטח $z=f(x,y)$ ומישור

$x=x_0$. **<u>אזי</u>** הווקטור המשיק לעקום זה בנקודה

$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ הוא: $\vec{N}_y=\left(0,1,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

הנורמל של מישור שעובר בנקודה הנ"ל ומכיל את שני הווקטורים

נתון ע"י:

$$\vec{N}_x\times\vec{N}_y=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&0&f_x\\0&1&f_y\end{vmatrix}=(-f_x,-f_y,1)$$

ואז משוואת המישור המשיק: $-f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+1\cdot(z-z_0)=0$

משפט:

אם לגרף $z=f(x,y)$ <u>קיים מישור משיק</u> בנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, **<u>אזי</u>** הוא נתון ע"י:

$$\boxed{z-z_0=f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}$$

<u>הערה</u>:

למעשה, למישור משיק יש שני נורמלים (מנוגדים במגמתם): $\pm(-f_x,-f_y,1)$.

הגדרה:

תהי $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה ותהי $\vec{x}_0\in U$ נקודה פנימית. נסמן ע"י $\hat{e}_k=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ את הווקטור שכל רכיביו אפסים למעט הרכיב במקום k (שהוא 1). אם הגבול:

$$\boxed{\lim_{h\to0}\frac{f(\vec{x}_0+h\hat{e}_k)-f(\vec{x}_0)}{h}}$$

קיים וסופי, **<u>אזי</u>** נקרא לו **<u>הנגזרת החלקית</u>** של הפונקציה f לפי משתנה ה- k בנקודה $\vec{x}_0$. ונסמן ע"י:

$f_{x_k}(\vec{x}_0)$ או $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0)$.

הגדרה:

תהי $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה. f **<u>גזירה (דיפרנציאבילית)</u>** בנקודה פנימית $\vec{x}_0\in U$ אם ורק אם ניתן למצוא וקטור שורה $\vec{G}_{(1\times n)}$ ופונקציה $\varepsilon(\vec{x})$, כאשר $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\varepsilon(\vec{x})=0$, כך שניתן להציג את f בצורה הבאה:

$$\boxed{f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)+\vec{G}_{(1\times n)}(\vec{x}-\vec{x}_0)_{(n\times1)}+\varepsilon(\vec{x})\cdot|\vec{x}-\vec{x}_0|}$$

וזה שקול ל:

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\frac{f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)-\vec{G}(\vec{x}-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}=0}$$

הגדרה:

תהי $\vec{f}:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה. $\vec{f}$ **<u>גזירה (דיפרנציאבילית)</u>** בנקודה פנימית $\vec{x}_0\in U$ אם ורק אם קיימת מטריצה $T_{(m\times n)}$ ווקטור $\vec{\varepsilon}(\vec{x})\in\mathbb{R}^m$, כאשר $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{\varepsilon}(\vec{x})=\vec{0}$, כך שניתן להציג את $\vec{f}$ בצורה הבאה:

$$\boxed{\vec{f}(\vec{x})_{(m\times1)}=\vec{f}(\vec{x}_0)_{(m\times1)}+T_{(m\times n)}(\vec{x}-\vec{x}_0)_{(n\times1)}+\vec{\varepsilon}(\vec{x})_{(m\times1)}\cdot|\vec{x}-\vec{x}_0|}$$

וזה שקול ל:

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\frac{\left|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{x}_0)-T(\vec{x}-\vec{x}_0)\right|}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}=0}$$

מסקנה:

העתקה גזירה **<u>אם ורק אם</u>** כל אחד מרכיביה גזיר.

משפט:

תהי $\vec{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>גזירה</u> ב- $\vec{x}_0$, **<u>אזי</u>** $\vec{f}$ <u>רציפה</u> ב- $\vec{x}_0$.

משפט:

תהי $\vec{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>גזירה</u> ב- $\vec{x}_0$, **<u>אזי</u>** כל <u>הנגזרות החלקיות קיימות</u> ב- $\vec{x}_0$ ומתקיים:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \left(T_{(m\times n)}\right)_{i,j}$$

מסקנות:

1. אם $\vec{f}$ גזירה, אז הנגזרות החלקיות שלה הם הרכיבים של מטריצה הנגזרת.
2. אם נגזרת חלקית אחת לפחות לא קיימת, אז בהכרח העתקה $\vec{f}$ לא גזירה.
3. אם $\vec{f}$ גזירה ה- $\vec{x}_0$, אז נגזרתה $D\vec{f}(\vec{x}_0)$ יחידה.

הגדרה:

אם $m=1$, כלומר $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, **<u>אזי</u>** המטריצה הנגזרת היא בעצם ווקטור שורה באורך n:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

לווקטור זה <u>כווקטור עמודה</u> קוראים **<u>גרדיאנט</u>** ומסמנים ע"י $\vec{\nabla} f$.

הגדרה:

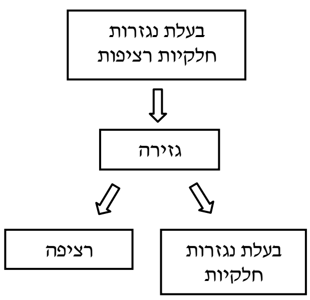
אם $m=n$, כלומר $\vec{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, **<u>אזי</u>** המטריצה הנגזרת היא מטריצה ריבועית מסדר n:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

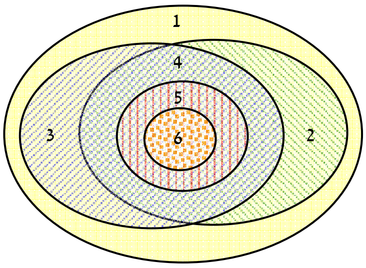
לדטרמיננטה של מטריצה זו קוראים **<u>יעקוביאן</u>** ומסמנים ע"י J.

משפט:

תהי $\vec{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ בעלת <u>נגזרות חלקיות רציפות</u> ב- $\vec{x}_0$, **<u>אזי</u>** $\vec{f}$ <u>גזירה</u> ב- $\vec{x}_0$.



לסיכום



1. כלל הפונקציות (למשל - דיריכלה).
2. רציפות ($f=|x|$).
3. בעלות נ"ח ($f=\frac{xy}{x^2+y^2}$).
4. רציפות ובעלות נ"ח ($f=\sqrt{|xy|}$).
5. גזירות ($f=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^4+y^4}$).
6. בעלות נ"ח רציפות ($f=x^2+y$).

משפט (כלל השרשרת):

תהיינה $\vec{f}:V\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p,\ \ \vec{g}:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ($\operatorname{Im}(\vec{g})\subset V$) העתקות.

תהי $\vec{g}$ גזירה בנקודה $\vec{x}_0\in U\subset\mathbb{R}^n$, ו- $\vec{f}$ גזירה ב- $\vec{y}_0=\vec{g}(\vec{x}_0)\in V\subseteq\mathbb{R}^m$.

אזי העתקה המורכבת $\vec{f}\circ\vec{g}$ גזירה בנקודה $\vec{x}_0$ ונגזרתה:

$$\boxed{D(\vec{f}\circ\vec{g})(\vec{x}_0)_{(p\times n)}=D\vec{f}(\vec{y}_0)_{(p\times m)}\cdot D\vec{g}(\vec{x}_0)_{(m\times n)}}$$

הערה:

אם העתקות לא גזירות, כלל השרשרת עלול להנפיק שתויות!!!

דוגמאות:

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$
$$x,y,z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$F(t)=f(x(t),y(t),z(t))$$

$$\frac{dF}{dt}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\frac{dy}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{dz}{dt}(t_0)$$

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$F(x,y)=f(u(x,y))$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{df}{du}(u_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{df}{du}(u_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$x,y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$F(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_0,v_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u_0,v_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)$$

הגדרה:

אומרים ש- C הוא **עקום חלק**, אם קיימת לו פרמטריזציה: $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$, שעבורה:

1. כל הפונקציות גזירות ברציפות בכל תחום הפרמטר ($\forall\ \alpha\le t\le\beta\ :\ x,y,z\in C^1$).
2. $\forall\ \alpha\le t\le\beta\ :\ \vec{r}'(t)\ne\vec{0}$.

הגדרה (נוספת למישור משיק):

נתבונן בכל העקומים החלקים, הנמצאים על המשטח ושעוברים בנקודה M_0 עליו. אם כל הישרים המשיקים לעקומים ב- M_0 מוכלים במישור אחד, אז זה יהיה מישור משיק למשטח ב- M_0.

משפט:

פונקציה $f(x,y)$ גזירה ב- (x_0,y_0), **אם ורק אם** לגרף שלה $z=f(x,y)$ יש מישור משיק בנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

נגזרת מכוונת

הגדרה:

תהי $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה ותהי $\vec{x}_0\in U\subset\mathbb{R}^n$ נקודה פנימית. נסמן ע"י $\hat{n}$ את וקטור יחידה.

אם הגבול:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}_0+h\hat{n})-f(\vec{x}_0)}{h}}$$

קיים וסופי, **אזי** נקרא לו **הנגזרת המכוונת** של הפונקציה f בכיוון $\hat{n}$ בנקודה $\vec{x}_0$. ונסמן ע"י: $D_n(\vec{x}_0)$ או $\frac{\partial f}{\partial n}(\vec{x}_0)$.

הערה:

נגזרת חלקית היא בעצם מקרה פרטי של נגזרת מכוונת.

טענה:

$$\frac{\partial f}{\partial n}(\vec{x}_0)=\frac{d}{dt}\left(f(\vec{x}_0+t\hat{n})\right)\Big|_{t=0}$$

בתנאי שאגף ימין קיים.

משפט:

תהי $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירה בנקודה פנימית $\vec{x}_0\in U$, **אזי** ל- f יש נגזרת מכוונת בכל כוון ומתקיים:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial n}(\vec{x}_0)=\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)\cdot\hat{n}}$$

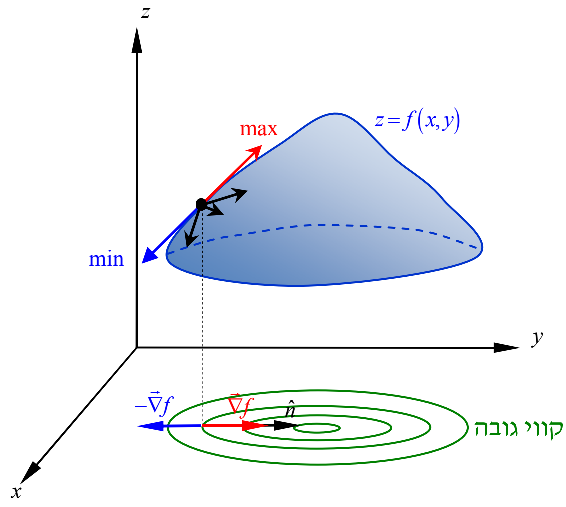
הערה: חייבים לנרמל את $\hat{n}$! (כך שאורכו יהיה 1)

תכונות של גרדיאנט

משפט:

תהי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ גזירה בנקודה פנימית $\vec{x}_0 \in U$, **אזי**:

הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\vec{x}_0$ בכיוון $\hat{n}$ מקבלת את ערכה המקסימלי בכיוון $\hat{n}$ שמקביל לגרדיאנט $Df\left(\vec{x}_0\right)$.



כלומר:

$\vec{\nabla}f\left(\vec{x}_0\right)$ כיוון "העלייה החזקה ביותר" של פונקציה.

$-\vec{\nabla}f\left(\vec{x}_0\right)$ כיוון "הירידה החזקה ביותר" של פונקציה.

משפט:

אם $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות, **אזי**

$\vec{\nabla}f\left(x_0,y_0\right)$ ניצב לקו גובה של f שעובר בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.

אם $f(x,y,z)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות, **אזי** $\vec{\nabla}f\left(x_0,y_0,z_0\right)$ ניצב למשטח רמה של f שעובר בנקודה $\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

נגזרת מסדר גבוה

דוגמאות לסימון נגזרות מסדר גבוה (הסדר של x,y,z – חשוב!):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\right)\right)=\frac{\partial^4 f}{\partial y\partial x\partial z\partial y}(x,y)=f_{yzxy}(x,y)$$

לנגזרות $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ קוראים **נגזרות מעורבות**.

משפט:

תהי $f(x,y)$ מוגדרת בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ וסביבתה וכך שכל הנגזרות החלקיות f_x,f_y,f_{xy},f_{yx} רציפות שם, **אזי** הנגזרות המעורבות שלה שוות: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0,y_0\right)$.

הערה:

זהו תנאי מספיק, אך לא הכרחי.

אינטגרל שתלוי בפרמטר

תזכורת מחדו"א 1:

המשפט היסודי של חדו"א:

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *רציפה ונגדיר* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

אזי g *גזירה ב-* (a,b) *ונגזרתה:*

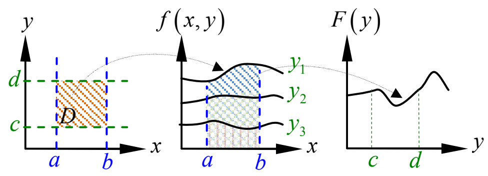
$$g'(x)=f(x)$$

הנוסחא:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right)=f(v(x))\cdot v'(x)-f(u(x))\cdot u'(x)$$

משפטים:

נסמן תחום מלבני ע"י: $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, c\le y\le d\}$.



נגדיר פונקציה: $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ $\quad F:[c,d]\to\mathbb{R}$.

1. תהי $f(x,y)$ <u>רציפה במלבן</u> D. **<u>אזי</u>** הפונקציה $F(y)$ <u>רציפה בקטע</u> $[c,d]$.
2. תהי $f(x,y)$ <u>רציפה במלבן</u> D. **<u>אזי</u>** הפונקציה $F(y)$ <u>אינטגרבילית</u> ומתקיים:

$$\int_c^d F(y)\,dy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

(וזהו משפט פוביני – שייך לנושא "אינטגרל כפולי").

משפט לייבניץ:

1. תהיינה $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), f(x,y)$ <u>רציפות במלבן</u> D. **<u>אזי</u>** הפונקציה $F(y)$ <u>גזירה בקטע</u> $[c,d]$ ומתקיים:

$$\boxed{F'(y)=\frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx}$$

2. תהיינה $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), f(x,y)$ <u>רציפות במלבן</u> D. ותהיינה $u(y),v(y)$ <u>גזירות בקטע</u> $[c,d]$ ומקיימות: $a\le u(y),\ v(y)\le b$. **<u>אזי</u>** הפונקציה $F(y)=\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx$ <u>גזירה בקטע</u> $[c,d]$ ומתקיים:

$$\boxed{F'(y)=\int_{u(y)}^{v(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx+f(v(y),y)\cdot v'(y)-f(u(y),y)\cdot u'(y)}$$

פונקציות סתומות

תזכורת מחדו"א 1:

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה הפיכה ורציפה בסביבת x_0. אם $f(x)$ גזירה ב- x_0 ו- $f'(x_0)\neq 0$, אזי גם הפונקציה ההפוכה שלה $x=g(y)$ גזירה בנקודה $y_0=f(x_0)$ ומתקיים: $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

משפט (הפונקציות הסתומות):

(ניסוח עבור חילוץ y מתוך $F(x,y)=0$)

תהי $F(x,y)$ מוגדרת ב- (x_0,y_0) וסביבתה. נניח שמתקיים:

1. $F(x_0,y_0)=0$.
2. $F\in C^1$ (נגזרות חלקיות רציפות ב- (x_0,y_0) וסביבתה).
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

אזי קיימת סביבה של הנקודה (x_0,y_0), שבתוכה מוגדרת פונקציה <u>יחידה</u> $f(x)$ שמקיימת:

1. $F(x,f(x))\equiv 0$ לכל x בסביבת x_0.
2. $y_0=f(x_0)$.
3. f רציפה ב- x_0 וסביבתה.
4. $f\in C^1$ (גזירה ברציפות) ב- x_0 וסביבתה ומתקיים:

$$\boxed{f'(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}}$$

הערה:

הנוסחה נובעת מפיתוח הבא (לפי כלל שרשרת, בהנחה ש- $f(x)$ גזירה):

$$F(x,f(x))=0 \qquad \Big|\frac{d}{dx} \qquad (y=f(x))$$

$$F_x\cdot 1+F_y\cdot f'(x)=0$$

$$f'(x)=-\frac{F_x}{F_y}$$

ובאופן דומה ניתן לחשב נגזרת שנייה (בתנאי <u>שכל הנגזרות החלקיות רציפות</u> ו- $f(x)$ גזירה פעמיים):

$$F_x(x,f(x))+F_y(x,f(x))\cdot f'(x)=0 \qquad \Big|{}^{d}/_{dx}$$

$$\left(F_{xx}\cdot 1+F_{xy}\cdot f'(x)\right)+\left(F_{yx}\cdot 1+F_{yy}\cdot f'(x)\right)\cdot f'(x)+F_y\cdot f''(x)=0$$

$$f''(x)=-\frac{F_{yy}\cdot\left(f'(x)\right)^2+2F_{xy}\cdot f'(x)+F_{xx}}{F_y}$$

משפט (הפונקציות הסתומות):

(ניסוח עבור חילוץ z מתוך $F(x,y,z)=0$)

תהי $F(x,y,z)$ מוגדרת ב- (x_0,y_0,z_0) וסביבתה. נניח שמתקיים:

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$.
2. $F\in C^1$ (נגזרות חלקיות רציפות ב- (x_0,y_0,z_0) וסביבתה).
3. $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

אזי קיימת סביבה של הנקודה (x_0,y_0,z_0), שבתוכה מוגדרת פונקציה <u>יחידה</u> $f(x,y)$ שמקיימת:

1. $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$ לכל x בסביבת x_0.
2. $z_0=f(x_0,y_0)$.
3. f רציפה ב- (x_0,y_0) וסביבתה.
4. $f\in C^1$ ב- (x_0,y_0) וסביבתה ומתקיים:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)&=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)&=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\end{aligned}}$$

משפט:

תהי $F(x,y,z)\in C^1$ בנקודה $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ ונניח:

1. $F(M_0)=0$.
2. $\vec{\nabla}F(M_0)\neq\vec{0}$ (כלומר לפחות אחת הנגזרות החלקיות לא מתאפסת, נוכל להניח לה"כ כי $\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)\neq 0$).

אזי למשטח $F(x,y,z)=0$ קיים מישור משיק בנקודה M_0, שנוסחתו:

$$\boxed{F_x(M_0)\cdot(x-x_0)+F_y(M_0)\cdot(y-y_0)+F_z(M_0)\cdot(z-z_0)=0}$$

הערות:

1. וקטור ניצב למשטח ($F(M_0)=c$ - משטח רמה, כאשר $c=0$):

$$\boxed{\vec{N}(M_0)=\vec{\nabla}F(M_0)}$$

2. אם C עקום חלק על פני המשטח $F(x,y,z)=0$ שעובר בנקודה M_0, אז הישר המשיק לעקום C ב- M_0 מוכל במישור המשיק למשטח שם.

משפט (הפונקציות הסתומות):

(ניסוח עבור חילוץ y מתוך $F(\vec{x},y)=0$, $F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ משוואה אחת ב-$n+1$ משתנים)

תהי $F(\vec{x},y)$ מוגדרת ב- $(\vec{x}_0,y_0)$ וסביבתה. נניח שמתקיים:

1. $F(\vec{x}_0,y_0)=0$.
2. $F\in C^1$ (נגזרות חלקיות רציפות ב- $(\vec{x}_0,y_0)$ וסביבתה).
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0,y_0)\neq 0$.

אזי קיימת סביבה של הנקודה $(\vec{x}_0,y_0)$, שבתוכה מוגדרת פונקציה __יחידה__ $f(\vec{x})$ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ שמקיימת:

1. $F(\vec{x},f(\vec{x}))\equiv 0$ לכל $\vec{x}$ בסביבת $\vec{x}_0$.
2. $y_0=f(\vec{x}_0)$.
3. f רציפה ב- $\vec{x}_0$ וסביבתה.
4. $f\in C^1$ ב- $\vec{x}_0$ וסביבתה ומתקיים:

$$\boxed{Df(\vec{x}_0)_{(1\times n)}=-\frac{D_{\vec{x}}F(\vec{x}_0,y_0)}{F_y(\vec{x}_0,y_0)}_{(1\times n)}}$$

משפט (ההעתקות הסתומות):

(ניסוח עבור חילוץ $\vec{y}$ מתוך העתקה $\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=\vec{0}$, $\vec{F}:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n,\ \mathrm{y}_0\in\mathbb{R}^m$)

תהי $\vec{F}(\vec{x},\vec{y})$ מוגדרת ב- $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ וסביבתה. נניח שמתקיים:

1. $\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)=\vec{0}$.
2. $\vec{F}\in C^1$ (נגזרות חלקיות רציפות ב- $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ וסביבתה).
3. היעקוביאן: $J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)=\det\left(D_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)_{(m\times m)}\right)\neq 0$.

אזי קיימת סביבה של הנקודה $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$, שבתוכה מוגדרת העתקה __יחידה__ $\vec{f}(\vec{x})$ $\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ שמקיימת:

1. $\vec{F}(\vec{x},\vec{f}(\vec{x}))\equiv\vec{0}$ לכל $\vec{x}$ בסביבת $\vec{x}_0$.
2. $\vec{y}_0=\vec{f}(\vec{x}_0)$.
3. $\vec{f}$ רציפה ב- $\vec{x}_0$ וסביבתה.
4. $\vec{f}\in C^1$ ב- $\vec{x}_0$ וסביבתה ומתקיים:

$$\boxed{D\vec{f}(\vec{x}_0)_{(m\times n)}=-\left(D_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\right)^{-1}_{(m\times m)}\cdot D_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)_{(m\times n)}}$$

<u>דוגמא</u>:

רוצים לחלץ נגזרות חלקיות של פונקציות:

$$\begin{cases} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \end{cases}$$

מתוך מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x+y+z+uv=1 \\ xyzu+v=1 \end{cases}$$

בסביבת הנקודה $(0,0,0,1,1)$.

נגדיר העתקה:

$$\vec{F}\left(\underbrace{x,y,z}_{\vec{x}},\underbrace{u,v}_{\vec{y}}\right):\mathbb{R}^{3+2}\to\mathbb{R}^2$$

$$\vec{F}(x,y,z,u,v)=\vec{0}$$

כאשר הפונקציות של ההעתקה הן (הן בעצם מעתיקות ווקטורים מ- $\mathbb{R}^5$ לווקטור $\vec{0}$ ב- $\mathbb{R}^2$):

$$\begin{cases} f_1(x,y,z,u,v)=x+y+z+uv-1 \\ f_2(x,y,z,u,v)=xyzu+v-1 \end{cases}$$

תנאי משפט ההעתקות הסתומות מתקיימים (נבדק ✍). נחשב את הנגזרות:

$$D\vec{F}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & v & u \\ yzu & xzu & xyu & xyz & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0,0,1,1)}=\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{D_{\vec{x}}\vec{F}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{D_{\vec{y}}\vec{F}\ (J)} \end{pmatrix}$$

$$D\vec{f}(\vec{x}_0)_{(m\times n)}=-\left(D_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\right)^{-1}_{(m\times m)}\cdot D_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)_{(m\times n)}$$

$$\vec{f}(\vec{x}_0)=\vec{y}_0=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

משפט (ההעתקות ההפוכות):

תהי $\vec{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה מוגדרת בנקודה $\vec{x}_0$ וסביבתה, ונסמן $\vec{y}_0 = \vec{F}(\vec{x}_0)$. נניח:

1. $\vec{F} \in C^1$ (נגזרות חלקיות רציפות ב-$(\vec{x}_0)$ וסביבתה).
2. היעקוביאן: $J\vec{F}(\vec{x}_0) = \det\left(D\vec{F}(\vec{x}_0)_{(n\times n)}\right) \neq 0$.

אזי קיימת סביבה של $\vec{x}_0$, שבתוכה מערכת המשוואות $\vec{y} = \vec{F}(\vec{x})$ מגדירה העתקה יחידה $\vec{F}^{-1}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ שמקיימת:

1. $\vec{F}^{-1}\left(\vec{F}(\vec{x})\right) = \vec{x}$.
2. $\vec{F}^{-1}(\vec{y}_0) = \vec{x}_0$.
3. $\vec{F}^{-1}$ רציפה ב-$\vec{y}_0$ וסביבתה.
4. $\vec{F}^{-1} \in C^1$ ב-$\vec{y}_0$ וסביבתה ומתקיים: $D\vec{F}^{-1}(\vec{y}_0) = \left(D\vec{F}(\vec{x}_0)\right)^{-1}$.

סימון נוח עבור העתקה $\vec{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = \left(u(x,y), v(x,y)\right)$:

$$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \triangleq \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}$$

המשמעות הגיאומטרית של יעקוביאן

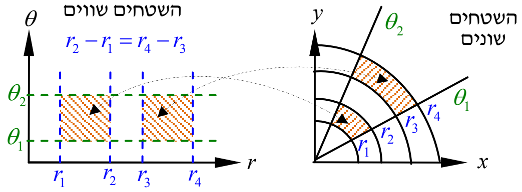
הגדרת יעקוביאן:

עבור העתקה $\vec{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = \left(u(x,y), v(x,y)\right)$:

$$\boxed{J \triangleq \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}$$

יעקוביאן (בערכו המוחלט) – הוא בעצם היחס בין האלמנטים הדיפרנציאליים של שטח בין מערכות בהן מבוצעת העתקה. כלומר, זהו יחס בין שטח של גוף (קטן מאוד) במערכת XY, לבין שטח של גוף כפי שהוא מועתק למערכת UV. למשל, עבור העתקה מקואורדינטות מעגליות לקרטזיות $(x,y) \leftarrow (r,\theta)$:

$$x(r,\theta) = r\cos\theta$$
$$y(r,\theta) = r\sin\theta$$
$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$



ולכן יחס בין אלמנטים של שטח: $\underbrace{dxdy}_{dA\in(x,y)} \leftarrow \underbrace{drd\theta}_{dA\in(r,\theta)} \cdot \underset{|J|}{\underset{\uparrow}{r}}$

(יותר לעומק – בפרק "חישוב אינטגרלים כפולים")

נוסחת טיילור במספר משתנים

__תזכורת מחדוו"א 1__:

__משפט טיילור-לגרנז' עבור משתנה יחיד (עם שארית לפי לגרנז')__: תהי $f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה x_0. אזי קיימת נקודה c בין x ל- x_0 כך שמתקיים:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n$$

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$$

__נוסחת מקלורן__ (פיתוח סביב $x_0=0$):

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)x^{n+1}$$

__פיתוח מקלורן מסדר 0__:

$$f(x)=f(0)+f'(c)\cdot x$$

כלומר מקבלים את הנוסחה ממשפט לגרנז':

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$$

משפט טיילור:

(ניסוח עבור $f(x,y)$)

תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר $n+1$ בנקודה (x_0,y_0) וסביבתה. **אזי** קיים ערך $0\le\tau\le 1$ שעבורו מתקיים השוויון הבא:

$$\boxed{\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)&=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left(f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y\right)+\\&+\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\right)+\\&+\frac{1}{3!}\left(f_{xxx}(x_0,y_0)\Delta x^3+3f_{xxy}(x_0,y_0)\Delta x^2\Delta y+3f_{xyy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y^2+f_{yyy}(x_0,y_0)\Delta y^3\right)+\ldots\\&\ldots+\frac{1}{n!}\left(f_{x^n}(x_0,y_0)\Delta x^n+\binom{n}{1}f_{x^{n-1}y}(x_0,y_0)\Delta x^{n-1}\Delta y+\ldots+\binom{n}{n-1}f_{xy^{n-1}}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y^{n-1}+f_{y^n}(x_0,y_0)\Delta y^n\right)+R_n\end{aligned}}$$

$$\boxed{R_n=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left(f(x_0+t\cdot\Delta x,y_0+t\cdot\Delta y)\right)\Big|_{t=\tau}}$$

למי שמחפש את τ
☺

ניתן לרשום <u>בצורה סימבולית</u>:

$$\boxed{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+R_n}$$

$$\boxed{R_n=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\tau\cdot\Delta x,y_0+\tau\cdot\Delta y)\Big|_{0\le\tau\le 1}}$$

נתבונן בפיתוח טיילור מסדר 2:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)=f\left(x_0, y_0\right)+f_x\left(x_0, y_0\right)\Delta x+f_y\left(x_0, y_0\right)\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}\left(x_0, y_0\right)\Delta x^2+2f_{xy}\left(x_0, y_0\right)\Delta x\Delta y+f_{yy}\left(x_0, y_0\right)\Delta y^2\right)+R_2$$

נרשום אותו בצורה ווקטורית, כאשר נסמן:

$$\vec{x}_0=\left(x_0, y_0\right)$$
$$\overrightarrow{\Delta x}=\left(\Delta x, \Delta y\right)$$

$$f\left(\vec{x}_0+\overrightarrow{\Delta x}\right)=f\left(\vec{x}_0\right)+\vec{\nabla}f^T\left(\vec{x}_0\right)_{(1\times 2)}\cdot\overrightarrow{\Delta x}_{(2\times 1)}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Delta x}\right)^T_{(1\times 2)}\cdot\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}_{(2\times 2)}\cdot\overrightarrow{\Delta x}_{(2\times 1)}+R_2$$

בצורה דומה, פיתוח טיילור מסדר 2 עבור $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

$$\boxed{f\left(\vec{x}_0+\overrightarrow{\Delta x}\right)=f\left(\vec{x}_0\right)+\vec{\nabla}f^T\left(\vec{x}_0\right)_{(1\times n)}\cdot\overrightarrow{\Delta x}_{(n\times 1)}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Delta x}\right)^T_{(1\times n)}\cdot\left(\mathrm{Hf}\right)_{(n\times n)}\cdot\overrightarrow{\Delta x}_{(n\times 1)}+R_2}$$

הגדרה:

למטריצה Hf, המכילה את כל הנגזרות החלקיות מסדר 2, קוראים מטריצת **הסיאן** (Hessian). וזו מטריצה סימטרית! (כי נגזרות עד לסדר $n+1$ רציפות לפי תנאי משפט טיילור ולכן $f_{ij}=f_{ji}$)

עבור $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$:

$$\mathrm{Hf}=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz}\end{pmatrix}$$

עבור $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{Hf}=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}\end{pmatrix}}$$

בעיות מינימום ומקסימום במספר משתנים

הגדרה:

אומרים שלפונקציה $f\left(\vec{x}\right)$ יש **ערך מקסימלי** (או מינימלי) בנקודה $\vec{x}_0$, אם קיימת סביבה של $\vec{x}_0$, שבתוכה: $f\left(\vec{x}\right)<f\left(\vec{x}_0\right)$ (או $f\left(\vec{x}\right)>f\left(\vec{x}_0\right)$).

תזכורת מחדו"א 1:

משפט פרמה:

אם $f\left(x\right)$ גזירה ב- x_0 ומקבלת שם ערך מקסימלי (או מינימלי), אז $f'\left(x_0\right)=0$.

משפט:

(תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום)

נניח כי לפונקציה $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ קיימות כל נגזרות חלקיות בנקודה $\vec{x}_0$. ונניח שידוע ש- f מקבלת ערך מקסימלי (או מינימלי) בנקודה $\vec{x}_0$. **אזי** בהכרח כל הנגזרות החלקיות של f מתאפסות ב- $\vec{x}_0$.

הערה:

המשפט בעצם אומר, שאם פונקציה $z=f\left(x,y\right)$ גזירה ומקבלת מינימום או מקסימום באיזושהי נקודה, אז המישור המשיק לגרף בנקודה זו מקביל למישור XY.

נקודות חשודות באקסטרמום:

1. נקודות שבהן כל הנגזרות החלקיות קיימות ומתאפסות ($\vec{\nabla}f\left(\vec{x}_0\right)=\vec{0}$) – **נקודות קריטיות**.
2. נקודות שבהן לפחות נגזרת חלקית אחת לא קיימת.

קצת עובדות מאלגברה:

הגדרות:

1. תהי $A_{n\times n}$ מטריצה סימטרית. אומרים ש- $A_{n\times n}$ **מוגדרת חיובית** אם ורק אם לכל $\vec{x}_{(n\times1)}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}\neq\vec{0}$ מתקיים: $\left(\vec{x}\right)^T A\vec{x}>0$.
2. תהי $A_{n\times n}$ מטריצה סימטרית. אומרים ש- $A_{n\times n}$ **מוגדרת שלילית** אם ורק אם לכל $\vec{x}_{(n\times1)}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}\neq\vec{0}$ מתקיים: $\left(\vec{x}\right)^T A\vec{x}<0$.
3. תהי $A_{n\times n}$ מטריצה סימטרית. אומרים ש- $A_{n\times n}$ **תבנית מעורבת** אם ורק אם קיימים $\vec{x}_{(n\times1)},\vec{y}_{(n\times1)}\in\mathbb{R}^n$ כך שמתקיים: $\left(\vec{x}\right)^T A\vec{x}>0,\quad\left(\vec{y}\right)^T A\vec{y}<0$.
4. לפונקציה: $\phi\left(\vec{x}\right)=\left(\vec{x}\right)^T A\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ קוראים **תבנית ריבועית**.

משפטים:

1. למטריצה סימטרית ממשית כל הערכים העצמיים – ממשיים.
2. מטריצה מוגדרת חיובית **אם ורק אם** כל הערכים העצמיים שלה חיוביים.
3. מטריצה מוגדרת שלילית **אם ורק אם** כל הערכים העצמיים שלה שליליים.
4. מטריצה מגדירה תבנית מעורבת **אם ורק אם** יש לה לפחות ערך עצמי אחד חיובי ואחד שלילי.

הגדרה (בקורס זה):

תהי $A_{n\times n}$ מטריצה, המורכבת מאיברי a_{ij} $(1\le i,j\le n)$. **מינור ראשי** – זהו הדטרמיננטה של מטריצה $M_{m\times m}$, המורכבת מאיברי a_{ij}, כאשר $1\le m\le n$.

משפט (קריטריון סילבסטר):

תהי $A_{n\times n}$ מטריצה סימטרית. היא מוגדרת חיובית **אם ורק אם** כל המינורים הראשיים שלה חיוביים והיא מוגדרת שלילית **אם ורק אם** כל המינורים הראשיים שלה מחליפים סימן.

הערה:

בכל מצב אחר, אם $\det A\ne 0$, המטריצה מגדירה תבנית מעורבת.

חזרה לחדוו"א:

תזכורת מחדוו"א 1:

מיון נקודות קריטיות:

אם $f''(x_0)>0$, אז x_0 נקודת מינימום.

אם $f''(x_0)<0$, אז x_0 נקודת מקסימום.

משפט:

(תנאי מספיק לקיום אקסטרמום, "מיון נקודות קריטיות")

תהי $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה $\underline{C^2}$. תהי $\vec{x}_0\in U$ נקודה פנימית קריטית של f: $\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)=\vec{0}$.

תהי $\mathrm{Hf}(\vec{x}_0)_{(n\times n)}$ מטריצת ההסיאן של הפונקציה f, בנקודה $\vec{x}_0$. **אזי**:

1. אם $\mathrm{Hf}(\vec{x}_0)$ מוגדרת חיובית, **אזי** $\vec{x}_0$ נקודת מינימום מקומית.
2. אם $\mathrm{Hf}(\vec{x}_0)$ מוגדרת שלילית, **אזי** $\vec{x}_0$ נקודת מקסימום מקומית.
3. אם $\mathrm{Hf}(\vec{x}_0)$ מגדירה תבנית מעורבת ו-$\det(\mathrm{Hf}(\vec{x}_0))\ne 0$, **אזי** $\vec{x}_0$ נקודת קריטית שאינה נקודת מינימום או מקסימום ("אוכף").
4. אם $\det(\mathrm{Hf}(\vec{x}_0))=0$ המיון נכשל.

עבור מקרה פרטי:

$f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. התנאים: $f(x,y)\in C^2$, (x_0,y_0) נקודה פנימית המקיימת:

$$\vec{\nabla}f^T(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)=(0,0)$$

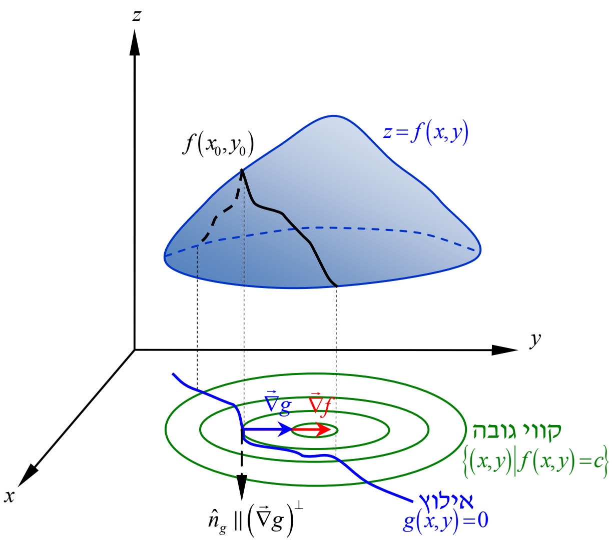
נסמן:
$$\Delta=\det(\mathrm{Hf})=\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}=f_{xx}f_{yy}-\left(f_{xy}\right)^2$$

1. אם $\Delta>0$ ו-$f_{xx}>0$, **אזי** (x_0,y_0) נקודת מינימום מקומית.
2. אם $\Delta>0$ ו-$f_{xx}<0$, **אזי** (x_0,y_0) נקודת מקסימום מקומית.
3. אם $\Delta<0$, **אזי** (x_0,y_0) נקודת "אוכף" (שני כיווני ירידה, ושני כיווני עליה).
4. אם $\Delta=0$ המיון נכשל.

אקסטרמום עם אילוצים

סוג הבעיה: מהי הנקודה הגבוהה ביותר על שביל שנמצא על ההר?

נניח שההר נתון ע"י פונקציה $z=f(x,y)$ והשביל נתון ע"י $g(x,y)=0$. נאמר שאנו מחפשים נקודות אקסטרמום של פונקציה $f(x,y)$ **בכפוף לאילוץ** $g(x,y)=0$ (יכולים להיות מספר אילוצים עבור $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$).



בנקודה הגבוהה ביותר על השביל (נניח ב-(x_0,y_0)) הנגזרת המכוונת של ההר בכיוון השביל ($\hat{n}_g$) מתאפסת:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}_g}=\vec{\nabla} f\cdot \hat{n}_g=0$$

ממשפט - הכיוון הניצב לקו גובה של פונקציה, הוא כיוון הגרדיאנט. במקרה של $g(x,y)=0$, עקום זה הוא קו גובה של $g(x,y)$, לכן הכיוון הניצב לעקום הוא $\vec{\nabla} g$, והמשיק לעקום זה: $(\vec{\nabla} g)^{\perp}$.

ומכאן שווקטור היחידה בכיוון האילוץ הוא:

$$\hat{n}_g=\frac{(\vec{\nabla} g)^{\perp}}{\left|(\vec{\nabla} g)^{\perp}\right|}.$$

כלומר $\hat{n}_g \,||\, (\vec{\nabla} g)^{\perp}$.

אבל:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}_g}=\vec{\nabla} f\cdot \hat{n}_g=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{\nabla} f\perp \hat{n}_g \quad\Leftrightarrow\quad \vec{\nabla} f\perp (\vec{\nabla} g)^{\perp}$$

כלומר אם ורק אם: $\vec{\nabla} f \,||\, \vec{\nabla} g$.

מסקנה:

בנקודת מקסימום (או מינימום) של פונקציה $f(x,y)$ בכפוף לאילוץ $g(x,y)=0$ מתקיים:

$$\boxed{\vec{\nabla} f \,||\, \vec{\nabla} g}$$

משפט (כופלי לגרנז'):

(עבור פונקציה $f(x,y)$, אילוץ אחד $g(x,y)=0$)

תהיינה $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציות C^1 בנקודה (x_0,y_0) וסביבתה. וכך שהפונקציה g מקיימת:

1. $g(x_0,y_0)=0$.
2. $\vec{\nabla}g(x_0,y_0)\neq\vec{0}$.

אם לפונקציה $f(x,y)$ יש ערך אקסטרמלי בכפוף לאילוץ $g(x,y)=0$ בנקודה (x_0,y_0), אז קיים קבוע λ (**כופל לגרנז'**) כך שמתקיים:

$$\boxed{\vec{\nabla}f(x_0,y_0)+\lambda\cdot\vec{\nabla}g(x_0,y_0)=\vec{0}}$$

הערות:

1. הנוסחה נובעת מכך ש- $\vec{\nabla}f \,||\, \vec{\nabla}g$, כלומר הגרדיאנטים תלויים לינארית.
2. הנעלמים של המשוואה (ווקטורית, כלומר מערכת משוואות) הם: x_0,y_0,λ, כאשר (x_0,y_0) היא הנקודה הקריטית שאותה מחפשים ו- λ כופל לגרנז' (קבוע לכל נקודה).
3. על מנת לפתור את המשוואה הווקטורית צריך 3 משוואות: 2 משוואות מתוך $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)+\lambda\cdot\vec{\nabla}g(x_0,y_0)=\vec{0}$ ועוד משוואת האילוץ $g(x_0,y_0)=0$.
4. ניתן לרשום את הפונקציה הנתונה ואת האילוצים כ**פונקצית לגרנז'**:

$$\phi(x_0,y_0,\lambda)=f(x_0,y_0)+\lambda\cdot g(x_0,y_0)$$

ואז לפתור:

$$\vec{\nabla}\phi(x_0,y_0,\lambda)=\vec{0}$$

משפט (כופלי לגרנז'):

(ניסוח כללי)

תהי $f(\vec{x}):\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$ $(n,m\geq 1)$ פונקציה ותהי $\vec{g}(\vec{x}):\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$ העתקה (m אילוצים).

נניח ש- $f,\vec{g}\in C^1$ בנקודה $\vec{x}_0$ וסביבתה ($\vec{x}_0\in\mathbb{R}^{n+m}$). נניח שהעתקה $\vec{g}$ מקיימת:

1. $\vec{g}(\vec{x}_0)=\vec{0}$.
2. דרגתה של $D\vec{g}(\vec{x}_0)_{(m\times(n+m))}$ היא בדיוק m (כלומר היעקוביאן: $J_{(m\times m)}\neq 0$. וזאת ע"מ שגם המשפט הפונקציות הסתומות יעבוד).

אם לפונקציה $f(\vec{x})$ יש ערך אקסטרמלי בכפוף ל- m אילוצים $\vec{g}(\vec{x}_0)=\vec{0}$ בנקודה $\vec{x}_0$, **אזי** קיים וקטור קבוע $\vec{\lambda}\in\mathbb{R}^m$ כך שמתקיים:

$$\boxed{\vec{\nabla}f^T(\vec{x}_0)_{(1\times(n+m))}+\left(\vec{\lambda}\right)^T_{(1\times m)}\cdot D\vec{g}(\vec{x}_0)_{(m\times(n+m))}=\left(\vec{0}\right)^T_{(1\times(n+m))}}$$

או בעזרת פונקצית לגרנז':

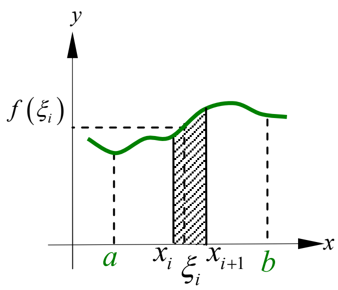
$$\phi\left(\vec{x}_0,\vec{\lambda}\right)=f(\vec{x}_0)+\vec{\lambda}\cdot\vec{g}(\vec{x}_0)$$

$$\vec{\nabla}\phi\left(\vec{x}_0,\vec{\lambda}\right)=\vec{0}$$

אינטגרלים

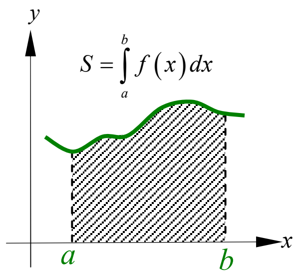
__תזכורת מחדו"א 1:__

__הגדרת פונקציה אינטגרבילית (תמצית):__



תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. נחלק את הקטע $[a,b]$ לקטעים בדרך כלשהי: $a=x_0<x_1<\ldots<x_{N-1}<x_N=b$. בקטע $[x_i,x_{i+1}]$ $(0\le i\le N-1)$ נבחר נקודה שרירותית ξ_i. נסמן $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$. לסכום $\sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ נקרא __סכום רימן__. אם קיים גבול:

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ \max_i\{\Delta x_i\}\to 0}} \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{f(\xi_i)}_{Height}\underbrace{\Delta x_i}_{Length}}_{Area}$$



והוא סופי __ללא תלות בשיטת החלוקה__, אז נאמר ש- f אינטגרבילית לפי רימן בקטע $[a,b]$ ונסמן את הגבול ע"י: $\int_a^b f(x)dx$

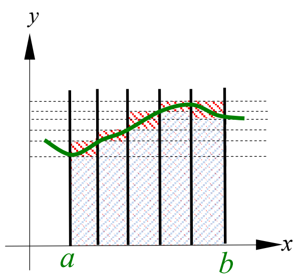
כאשר משמעותו של אינטגרל זה - __השטח__ שכלוא בין: ציר x, העקום $y=f(x)$ וישרים $x=a, x=b$.

__הגדרה שקולה (משפט):__

אם במקום לבחור ξ_i שרירותית בקטע $[x_i,x_{i+1}]$, נבחר נקודות שבהן $f(x)$ מקבלת ערכי הסופרמום והאינפימום בקטע ונסמן:

$$M_i=\sup\left\{f(x)\,\middle|\,x\in[x_i,x_{i+1}]\right\}$$
$$m_i=\inf\left\{f(x)\,\middle|\,x\in[x_i,x_{i+1}]\right\}$$

אזי לסכומים הבאים:



$$\overline{S}=\sum_{i=0}^{N-1} M_i\Delta x_i$$
$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{N-1} m_i\Delta x_i$$

נקרא __סכומי דרבו עליון ותחתון__ בהתאמה.

אם הגבולות הבאים:

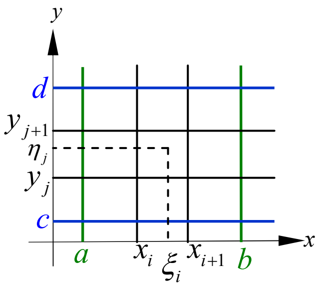
$$\overline{D}=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \max_i\{\Delta x_i\}\to 0}} \overline{S}$$
$$\underline{D}=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \max_i\{\Delta x_i\}\to 0}} \underline{S}$$

קיימים וסופיים ומתקיים: $\overline{D}=\underline{D}$, אזי f אינטגרבילית לפי רימן בקטע $[a,b]$ ומגדירים:

$$\overline{D}=\underline{D}=\int_a^b f(x)dx$$

אינטגרלים כפולים

הגדרת אינטגרביליות במלבן:

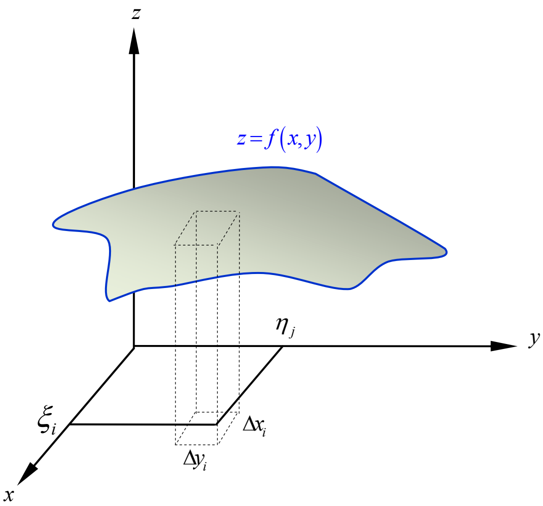


תהי $f\left(x,y\right)$ פונקציה מוגדרת במלבן $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$. נחלק את המלבן ע"י קווים ישרים מקבילים לצירים:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{N-1}<x_N=b$$

$$c=y_0<y_1<\ldots<y_{M-1}<y_M=d$$

בכל מלבן $\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right]$ נבחר נקודה שרירותית $\left(\xi_i,\eta_i\right)$. נסמן $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$. נתבונן בסכום:



$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\underbrace{\underbrace{f\left(\xi_i,\eta_j\right)}_{Height}\underbrace{\Delta x_i\Delta y_j}_{Base\ area}}_{Box\ volume}$$

אם הסכום הזה שואף לגבול סופי, כאשר

$$\max_{i,j}\left\{\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}\right\}\to 0\ ,N\to\infty,M\to\infty$$

ללא תלות בשיטת החלוקה של התחום המלבני, אזי

אומרים שהפונקציה $f\left(x,y\right)$ **אינטגרבילית לפי רימן**

במלבן $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$ ומסמנים את הגבול ע"י:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f\left(x,y\right)dxdy,\quad \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f\left(x,y\right)dA$$

בדומה לאינטגרל רגיל מחדוו"א 1 במקום נקודה שרירותית $\left(\xi_i,\eta_i\right)$ נבחר נקודות שנותנות סופרמום (M_{ij}) ואינפימום (m_{ij}), ונקבל סכומי דרבו:

$$\overline{S}=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

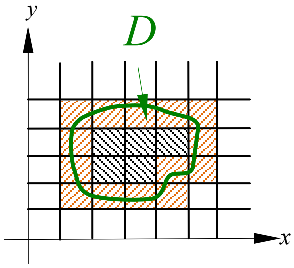
$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

משפט:

אם סכומי דרבו הנ"ל מתכנסים (ללא תלות בשיטת החלוקה) לגבולות $\overline{D}$ ו- $\underline{D}$ בהתאמה (כאשר $\max_{i,j}\left\{\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}\right\}\to 0\ ,N\to\infty,M\to\infty$), ואם $\overline{D}=\underline{D}$, אז:

$$\overline{D}=\underline{D}=\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f\left(x,y\right)dxdy$$

הגדרת "שטח":



יהי D תחום מישורי סגור וחסום. נפרוש עליו רשת של קווים ישרים שמקבילים לצירים כבציור. נקבל מלבנים $\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right]$. נתבונן באוסף כל המלבנים שמוכלים במלואם ב- D, כאשר שטחם:

$$\sum_{inside\, i,j}^{N,M}\Delta x_i\Delta y_j$$

את הגבול של הסכום הזה, כאשר: $N\to\infty, M\to\infty$, $\max_{i,j}\left\{\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}\right\}\to 0$, נסמן ע"י $\underline{S}$,

ונקרא לו **<u>השטח הפנימי</u>** של D.

נתבונן באוסף כל המלבנים שמכילים לפחות נקודה אחת מ- D, כאשר שטחם:

$$\sum_{inside+outside\, i,j}^{N,M}\Delta x_i\Delta y_j$$

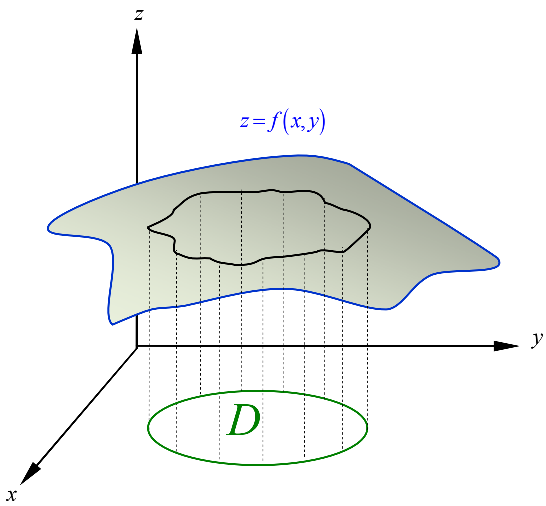
את הגבול של הסכום הזה, כאשר $N\to\infty, M\to\infty$, $\max_{i,j}\left\{\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}\right\}\to 0$, נסמן ע"י $\overline{S}$,

ונקרא לו **<u>השטח החיצוני</u>** של D.

אם $\overline{S}=\underline{S}$, אז אומרים ש- D הוא **<u>תחום בעל שטח</u>** ומסמנים:

$$\overline{S}=\underline{S}=\iint_D dxdy$$

משמעות גיאומטרית של אינטגרל כפול:



נניח לשם פשטות ש- $z=f(x,y)>0$, אזי

האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)dxdy$ שווה <u>לנפח</u>

הכלוא בין משטח $z=f(x,y)$ מלמעלה, מישור XY מלמטה ומשטח גלילי מצדדים שנקבע ע"י התחום D.

כאשר $f(x,y)\equiv 1$, מקבלים את <u>השטח</u> של תחום D.

הגדרה:

<u>תחום בעל שטח אפס</u> – זהו תחום שלכל $\varepsilon>0$ השטח החיצוני שלו קטן מ- ε.

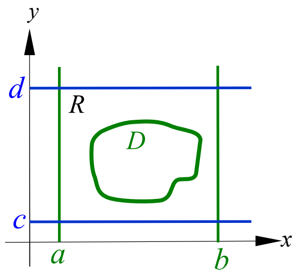
כלומר לכל $\varepsilon>0$ ניתן למצוא אוסף של מלבנים שמכסים את התחום וסכום שטחיהם קטן מ- ε.

משפטים:

1. תחום הוא <u>בעל שטח</u> **<u>אם ורק אם</u>** שפתו היא <u>עקום בעל שטח אפס</u>.
2. אם עקום במישור XY נתון ע"י פרמטריזציה $\left(x(t),y(t)\right)$ שהיא C^1, **<u>אזי</u>** העקום הוא בעל שטח 0.

הגדרה:

יהי D תחום בעל שטח (סגור וחסום) ותהי $f(x,y)$ מוגדרת ב-D. יהי R מלבן, שהתחום D חסום בתוכו (צלעות של מלבן מקבילים לצירים). נגדיר:



$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$

אנו נאמר ש-$f(x,y)$ **אינטגרבילית בתחום** D, אם $F(x,y)$ אינטגרבילית במלבן R.

הגדרה:

נאמר שפונקציה **רציפה כמעט בכל מקום (כב"מ)**, אם התחום של הנקודות אי-רציפות שלה – בעל שטח 0.

משפט:

פונקציה חסומה ורציפה כב"מ – אינטגרבילית.

הערות:

1. זוהי הקבלה לפונקציה רציפה למקוטעין בחד-מימד.
2. פונקציה רציפה בתחום D – אינטגרבילית בו.
3. פונקציה אינטגרבילית בתחום D – חסומה בו.

תכונות של פונקציות אינטגרביליות

משפט:

1. תהיינה f,g פונקציות אינטגרביליות בתחום משותף D. **אזי**:

א) $\alpha f \pm \beta g$ אינטגרבילית ב- D ומתקיים:

$$\iint_D \left(\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)\right) dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dxdy \pm \beta \iint_D g(x,y)\,dxdy$$

ב) $f \cdot g$ אינטגרבילית ב- D, ואם $g \neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב- D.

ג) אם $f \leq g$ לכל (x,y) ב- D, אז: $\iint_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint_D g(x,y)\,dxdy$.

2. תהי f פונקציה אינטגרבילית בתחום D (ולכן גם חסומה). נסמן: $m \leq f(x,y) \leq M$. **אזי**:

$$m\iint_D dxdy \leq \iint_D f(x,y)\,dxdy \leq M\iint_D dxdy$$

ובפרט: אם $0 \leq f(x,y)$, אז $0 \leq \iint_D f(x,y)\,dxdy$.

3. תהי $f(x,y)$ פונקציה אינטגרבילית בתחום D. **אזי** גם $\left|f(x,y)\right|$ אינטגרבילית ומתקיים:

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint_D \left|f(x,y)\right| dxdy$$

הערה:

הפוך – לא נכון!!! לדוגמא: פונקצית דיריכלה.

4. תהי $f(x,y)$ פונקציה אינטגרבילית בתחום D. נפרק את D לשני חלקים: D_1, D_2 ע"י <u>עקום בעל שטח 0</u>, כך שלתחומים D_1, D_2 אין נקודות משותפת (פרט לעקום). **אזי** $f(x,y)$ אינטגרבילית גם ב- D_1, D_2, ומתקיים:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

חישוב אינטגרלים כפולים

משפט:

תהי $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $[a,b]\times[c,d]$, ונניח:

1. $f(x,y)$ <u>אינטגרבילית</u> במלבן, כלומר קיים: $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy$.
2. לכל $a\le x\le b$ קיים אינטגרל חד-מימדי: $F(x)=\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$.

<u>אזי</u>:

$F(x)$ אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ ומתקיים:

$$\boxed{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b F(x)\,dx=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right]dx}$$

לאינטגרל זה קוראים **<u>אינטגרל נשנה</u>**.

משפט (פוביני):

תהי $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$, אזי:

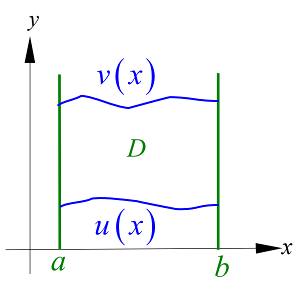
$$\boxed{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right]dx=\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right]dy}$$

הגדרה:

תהיינה $u(x),v(x)$ $u(x)\le v(x)$ פונקציות C^1 בקטע $[a,b]$.

נגדיר תחום:

$$D=\{(x,y)\,|\,u(x)\le y\le v(x),\ a\le x\le b\}$$



תחום כזה נקרא **<u>תחום פשוט ביחס לציר Y</u>**.

בדומה מגדירים גם תחום פשוט ביחס לציר X.

משפט:

תהי $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D, שהוא <u>פשוט ביחס לציר Y</u>. ונניח:

1. $f(x,y)$ <u>אינטגרבילית</u> ב-D, כלומר קיים אינטגרל: $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.
2. לכל $a\le x\le b$ קיים אינטגרל חד-מימדי: $G(x)=\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy$.

(כאן $u(x),v(x)$ פונקציות C^1 למקוטעין לפחות ומגדירות את תחום D)

<u>אזי</u>: $G(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ומתקיים:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b G(x)\,dx=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\right]dx}$$

חישוב אינטגרלים כפולים – שינוי משתנים

תזכורת מחדוו"א 1:

שינוי משתנים באינטגרל:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x(t))\cdot\frac{d}{dt}x(t)dt$$

כאשר $\frac{d}{dt}x(a)=\lim_{b\to a}\frac{x(b)-x(a)}{b-a}$ *(הגדרת הנגזרת) זהו יחס בין אורכי הקטעים* $[\alpha,\beta]$ *ו-* $[a,b]$,

כאשר $\alpha=x(a),\beta=x(b)$.

הגדרה:

העתקה $\vec{T}:\tilde{D}\to D$ תקרא ***חד-חד-ערכית***, אם לכל שתי נקודות $(u,v),(u',v')\in\tilde{D}$ מתקיים: אם $\vec{T}(u,v)=\vec{T}(u',v')$, אז בהכרח $(u,v)=(u',v')$.

משפט:

תהי $f(x,y)$ פונקציה <u>רציפה</u> בתחום D. נניח שהעתקה $\vec{T}(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ מקיימת:

1. $\vec{T}\in C^1$ בתחום $\tilde{D}$ (במישור UV).
2. $\vec{T}$ העתקה <u>חד-חד-ערכית</u> מ- $\tilde{D}$ <u>על</u> D (במישור XY).
3. $J=\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\neq 0$ בכל $\tilde{D}$.

<u>אזי</u>:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{\tilde{D}} f(x(u,v),y(u,v))\cdot|J|dudv}$$

הערות:

1. בדומה לשינוי משתנים באינטגרל רגיל – כאן $|J|$ הוא היחס בין האלמנטים של שטח.
2. משמעות של ערך מוחלט של יעקוביאן – החלפת סדר משתנים של העתקה (החלפת עמודות בדטרמיננטה):

$$J=\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)=-\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,u)}\right)$$

דוגמאות חשובות:

<u>העתקה לינארית:</u>

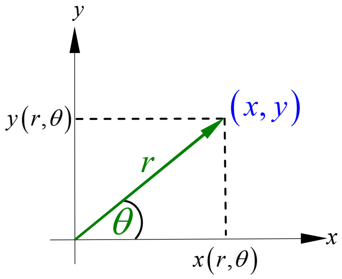
נגדיר העתקה ממישור UV למישור XY ע"י:

$$x(u,v)=\alpha u+\beta v$$
$$y(u,v)=\gamma u+\delta v$$

היעקוביאן:
$$J=\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \lambda & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\lambda=const$$

לכן, במקרה של העתקה לינארית היעקוביאן הוא <u>בדיוק יחס השטחים של תחומים</u>:

$$\iint_D dxdy=|J|\iint_{\tilde{D}}dudv=const\cdot\iint_{\tilde{D}}dudv$$



העתקה מעגלית:

נגדיר העתקה ממישור (r,θ) למישור XY ע"י:

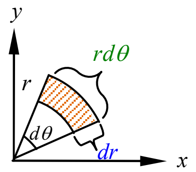
$$x(r,\theta)=r\cos\theta$$
$$y(r,\theta)=r\sin\theta$$

היעקוביאן:

$$J=\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right)=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

ואז, על מנת לעבור מקואורדינטות קרטזיות למעגליות נצטרך להכפיל ביעקוביאן:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{\tilde{D}} f\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right)\underbrace{r}_{|J|}\,drd\theta$$



משמעות הגיאומטרית של הביטוי $rdrd\theta$ היא ההכפלה של אלמנט אורך הקשת $r\cdot d\theta$ באלמנט אורך dr, וכך בעצם נוצר אלמנט שטח מעגלי $rdrd\theta$. (באופן דומה נוצרים אלמנטים של נפח בהעתקות של 3 משתנים – למשל, בקואורדינטות גליליות, כדוריות)

הערה:

היעקוביאן מתאפס בכל הנקודות מהצורה: $(r,\theta)=(0,\theta)$, כאשר כל הנקודות האלה עברות ל- $(x,y)=(0,0)$. לכן ההעתקה המעגלית <u>אינה חח"ע בכל תחום שמכיל את הראשית</u>! בכל זאת ניתן לבצע אינטגרציה מפני שנקודה אחת $(0,0)$ היא קבוצה בעלת שטח 0.

מסה של תחום מישורי

נניח נתון תחום מישורי D (לוח) בעל צפיפות (מסה ליחידת שטח): $\sigma(x,y)\geq 0$. אזי המסה של התחום תהיה:

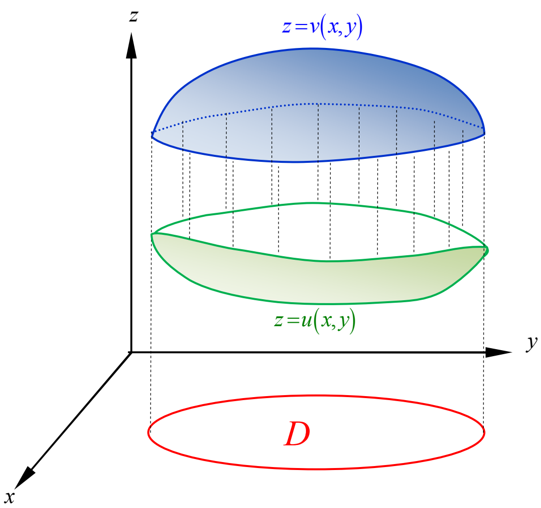
$$\boxed{M=\iint_D \sigma(x,y)\,dxdy}$$

קואורדינטות של מרכז מסה:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{x}&=\frac{1}{M}\iint_D x\cdot\sigma(x,y)\,dxdy\\ \hat{y}&=\frac{1}{M}\iint_D y\cdot\sigma(x,y)\,dxdy\end{aligned}}$$

אינטגרלים משולשים

שיטות לחישוב כאינטגרל נשנה



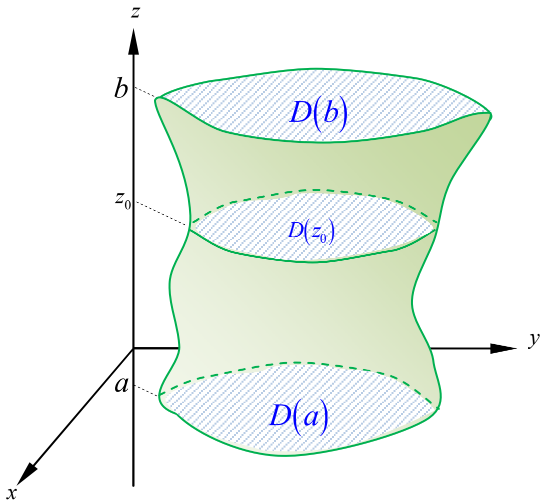
שיטה 1:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_D\left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dxdy$$

כאשר:

$$u(x,u)\le z\le v(x,y)$$
$$(x,y)\in D$$

זהו תחום חסום ע"י פונקציות מלמטה ומלמעלה וע"י משטח גלילי בצדדים שהיטלו על מישור XY הוא שפת D כמתואר בציור. שמות לא רשמיים: תחום פשוט ביחס לציר Z, תחום גלילי. כלומר, עושים אינטגרציה על "אורכי הקווים" המקבילים לציר Z, שחסומים ע"י פונקציות הנ"ל בתחום D.



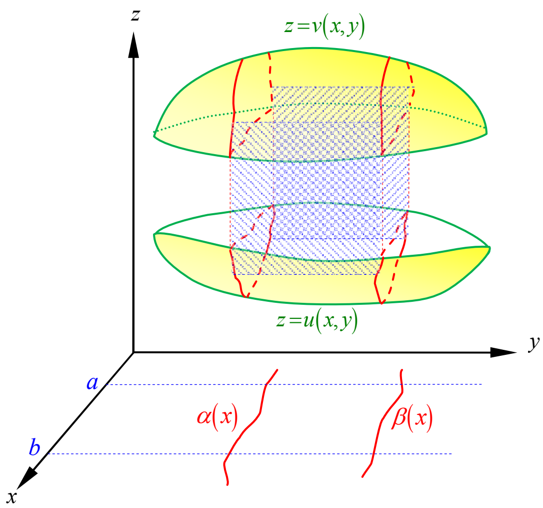
שיטה 2:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_a^b\left[\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,dxdy\right]dz$$

כאשר:

$$a\le z\le b$$
$$(x,y)\in D(z)$$

עושים אינטגרציה על התחום החסום ע"י המישורים $z=a,z=b$ מלמטה ומלמעלה ולכל חתך של התחום עם מישור $z=const$ (תחום $D(z)$).



שיטה 3:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_a^b\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right]dx$$

כאשר:

$$u(x,y)\le z\le v(x,y)$$
$$\alpha(x)\le y\le\beta(x)$$
$$a\le x\le b$$

הערה:

כאשר $f(x,y,z)\equiv 1$, משמעות האינטגרל המשולש היא <u>הנפח</u> שכלוא בתחום.

חישוב אינטגרלים משולשים – שינוי משתנים

משפט:

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה בתחום V.

נניח שהעתקה $\vec{T}(u,v,w)=\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)$ מקיימת:

1. $\vec{T}\in C^1$ בתחום $\tilde{V}$ (במרחב UVW).
2. $\vec{T}$ העתקה חד-חד-ערכית מ- $\tilde{V}$ על V (במרחב XYZ).
3. $J=\det\left(\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right)\neq 0$ בכל $\tilde{V}$.

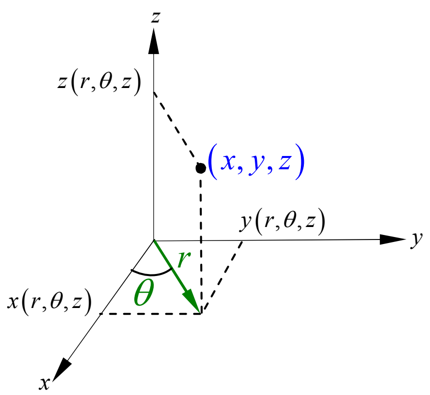
אזי:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_{\tilde{V}} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\cdot|J|\,dudvdw}$$

דוגמאות חשובות:

קואורדינטות גליליות:

נגדיר העתקה ממישור (r,θ,z) למישור XYZ ע"י:



$$x(r,\theta,z)=r\cos\theta \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$
$$y(r,\theta,z)=r\sin\theta \qquad 0\le r\le R$$
$$z(r,\theta,z)=z \qquad a\le z\le b$$

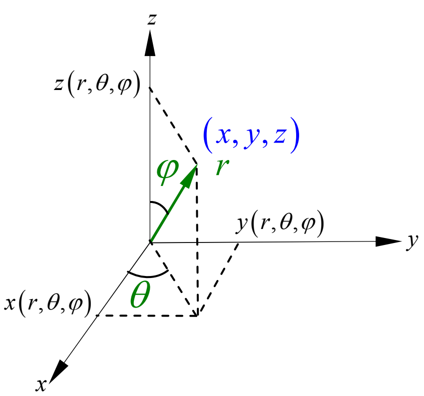
היעקוביאן:

$$J=\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right)=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta & x_z\\ y_r & y_\theta & y_z\\ z_r & z_\theta & z_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

היעקוביאן מתאפס על ציר המרכזי (במקרה זה – ציר Z).

קואורדינטות כדוריות:

נגדיר העתקה ממישור (r,θ,φ) למישור XYZ ע"י:



$$x(r,\theta,\varphi)=r\cos\theta\sin\varphi \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$
$$y(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta\sin\varphi \qquad 0\le\varphi\le\pi$$
$$z(r,\theta,\varphi)=r\cos\varphi \qquad 0\le r\le R$$

היעקוביאן:

$$J=\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right)=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta & x_\varphi\\ y_r & y_\theta & y_\varphi\\ z_r & z_\theta & z_\varphi\end{vmatrix}=\ldots=r^2\sin\varphi$$

היעקוביאן מתאפס על ציר ששייך ל- φ (במקרה זה – ציר Z).

מסה של גוף נפחי

נניח נתון תחום מרחבי V בעל צפיפות (מסה ליחידת נפח): $\rho(x,y,z)\ge 0$. אזי המסה של התחום תהיה:

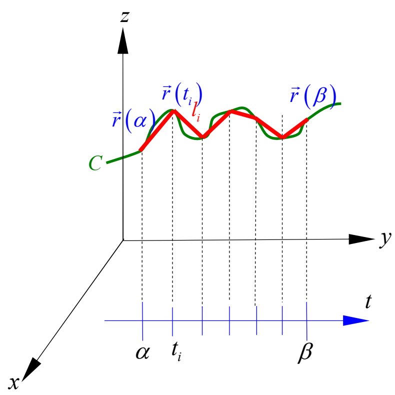
$$\boxed{M=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz}$$

קואורדינטות של מרכז מסה:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{x}&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V x\cdot\rho(x,y,z)\,dxdydz\\ \hat{y}&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V y\cdot\rho(x,y,z)\,dxdydz\\ \hat{z}&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V z\cdot\rho(x,y,z)\,dxdydz\end{aligned}}$$

אינטגרלים קוויים

הגדרה:



יהי C עקום שנתון בצורה פרמטרית ע"י 3 פונקציות רציפות:

$x(t), y(t), z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$. העקום הוא התמונה של

העתקה $\mathbb{R}^3 \leftarrow \mathbb{R} \supset [\alpha,\beta]$. נחלק את הקטע $[\alpha,\beta]$ (תחום

הפרמטר) לתת-קטעים:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = \beta$$

נחבר בקווים ישרים את הנקודות $\vec{r}(t_i)$ לקבלת **קו פוליגונלי**.

אורכו של קו פוליגונלי אחד (לפי פיתגורס):

$$l_i = \left|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right| = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}$$

כאשר:

$$\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$$
$$\Delta y_i = y(t_{i+1}) - y(t_i)$$
$$\Delta z_i = z(t_{i+1}) - z(t_i)$$

אורכו של כל הקו הפוליגונלי (אדום): $\sum_{i=0}^{N-1} l_i$. אם הגבול של הסכום הזה קיים וסופי, כאשר $N \to \infty$,

$\max_i \{l_i\} \to 0$ (ללא תלות בשיטת החלוקה של תחום הפרמטר לתת-קטעים), אז אנו נגיד שהעקום C

הוא **בעל אורך** ונסמן את אורכו ע"י:

$$L = \int_C ds$$

כאשר ds זהו אלמנט של אורך הקשת.

משפט:

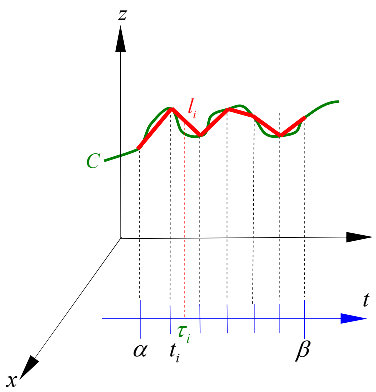
יהי C עקום שנתון ע"י פרמטריזציה גזירה ברציפות: $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right) \quad (\alpha \le t \le \beta)$

בקטע $[\alpha,\beta]$. **אזי** C הוא עקום בעל אורך ואורכו נתון ע"י:

$$\boxed{L = \int_C ds = \int_\alpha^\beta \left|\vec{r}'(t)\right| dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt}$$

אינטגרל קווי מסוג ראשון

הגדרה:



תהי $f(x,y,z)$ מוגדרת על העקום C. בדומה להגדרה של עקום בעל אורך (הקודמת), נחלק את תחום הפרמטר, נגדיר קו פוליגונלי ונתבונן בסכום:

$$\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\right) l_i$$

כאשר τ_i - נקודה שרירותית בקטע ה- i.

אם הגבול של הסכום הזה קיים וסופי, כאשר $N\to\infty$, $\max_i\{l_i\}\to 0$ (ללא תלות בשיטת החלוקה של תחום הפרמטר לתת-קטעים), אז נקרא לגבול זה <u>**האינטגרל הקווי מן הסוג הראשון**</u> של $f(x,y,z)$ לאורך מסלול C.

משפט:

יהי C עקום שנתון ע"י פרמטריזציה <u>גזירה ברציפות</u>: $\vec{r}(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ בקטע $[\alpha,\beta]$ ותהי $f(x,y,z)$ פונקציה <u>רציפה</u>. <u>**אזי**</u> האינטגרל הקווי מן הסוג הראשון של הפונקציה $f(x,y,z)$ קיים ונתון ע"י:

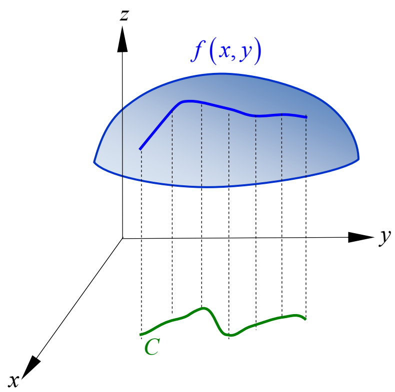
$$\boxed{\int_C f(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\left|\vec{r}\,'(t)\right|dt}$$

<u>**הערה**</u>:

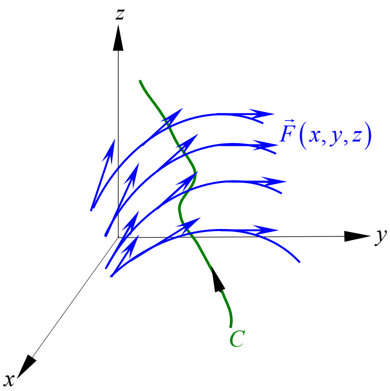
כאשר $f(x,y,z)\equiv 1$ מקבלים את אורך העקום.

<u>**משמעות גיאומטרית**</u>:

עבור פונקציה $f(x,y)$ והעקום הדו-מימדי C המשמעות הגיאומטרית של $\int_C f(x,y)\,ds$ היא – השטח של משטח גלילי ("גדר" או "וילון") מעל העקום C, שחסום ע"י $z=f(x,y)$ מלמעלה וע"י מישור XY מלמטה (שבו עובר העקום C).



<u>אינטגרל קווי מסוג שני</u>

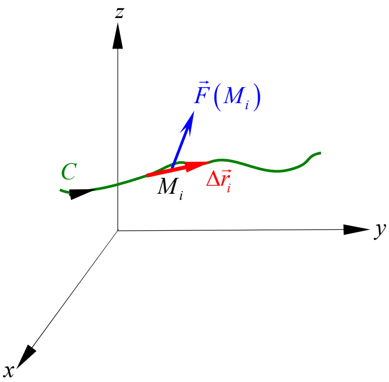


להעתקה $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שבמסגרתה מתאימים לכל נקודה (x,y,z) וקטור:

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{z}$$

שמתחיל בנקודה (x,y,z), כאשר P,Q,R פונקציות, נקרא <u>**שדה וקטורי**</u>.

<u>**הגדרה**</u>:



יהי עקום C בעל פרמטריזציה $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}\quad(\alpha\le t\le\beta)$. ויהי שדה ווקטורי: $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{z}$.

בדומה להגדרות קודמות, נחלק את תחום הפרמטר $[\alpha,\beta]$ לתת-קטעים, נגדיר קו פוליגונלי ונתבונן בקטע פוליגונלי שמחבר את $\vec{r}(t_i)$ עם $\vec{r}(t_{i+1})$. כיוונו: $\Delta\vec{r}_i=\Delta x_i\hat{i}+\Delta y_i\hat{j}+\Delta z_i\hat{k}$. נבחר בקטע $[t_i,t_{i+1}]$ ערך שרירותי τ_i ונסמן נקודה: $M_i=\vec{r}(\tau_i)=(x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i))$. השדה בנקודה M_i:

$$\vec{F}(M_i)=P(M_i)\hat{i}+Q(M_i)\hat{j}+R(M_i)\hat{z}$$

נתבונן במכפלה סקלרית: $\vec{F}(M_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$. זאת העבודה בהעברת חלקיק בתוך השדה $\vec{F}$ הקבוע בנקודה M_i לאורך הקטע $\Delta\vec{r}_i=\vec{r}(t_{i+1})-\vec{r}(t_i)$. נתבונן בסכום: $\sum_{i=0}^{N-1}\vec{F}(M_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$. אם הגבול של הסכום הזה קיים וסופי, כאשר $N\to\infty$, $\max_i\{l_i\}\to 0$ (ללא תלות בשיטת החלוקה של תחום הפרמטר לתת-קטעים), אז נקרא לגבול זה <u>**האינטגרל הקווי מן הסוג השני**</u> של שדה $\vec{F}$ לאורך מסלול C ונסמן ע"י (אלה סימונים בלבד):

$$\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C(P,Q,R)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C Pdx+Qdy+Rdz$$

<u>**משפט**</u>:

יהי C עקום שנתון ע"י פרמטריזציה <u>גזירה ברציפות</u>: $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\quad(\alpha\le t\le\beta)$ בקטע $[\alpha,\beta]$ ויהי $\vec{F}$ <u>שדה ווקטורי רציף</u> (P,Q,R רציפות). <u>**אזי**</u> האינטגרל הקווי מן הסוג השני של שדה $\vec{F}$ קיים ונתון ע"י:

$$\boxed{\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha^\beta\vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt}$$

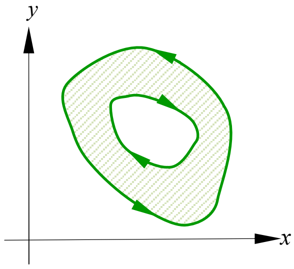
סימון נוסף:

$$\int_C Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\left(P(x,y,z)\cdot x'+Q(x,y,z)\cdot y'+R(x,y,z)\cdot z'\right)dt$$

משמעותו של האינטגרל הקווי מהסוג השני: <u>**העבודה**</u> שיש לבצע על מנת להעביר חלקיק במסלול C בתוך שדה $\vec{F}$.

משפט גרין

הגדרה:



יהי C עקום במישור XY, שנתון ע"י פרמטריזציה

$\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ $(\alpha\le t\le\beta)$. **הכיוון של המסלול** מוגדר ככיוון

שמושרה ע"י עליית הפרמטר t.

אם המסלול סגור, כלומר: $x(\alpha)=x(\beta), y(\alpha)=y(\beta)$, אז מקובל לבחור

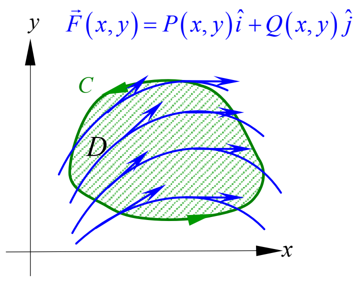
פרמטריזציה שתיתן כיוון כך, שהתחום הכלוא בתוך העקום יהיה בצד שמאל (נגד כיוון השעון, לפי כלל יד ימין). אם בתחום יש חור, על המסלול התוחם את החור – הכיוון ה"חיובי" הוא עם מחוגי השעון (כמו בציור).

תזכורת מחדו"א 1:

משפט ניוטון-לייבניץ:

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$$

משפט גרין:



יהי D תחום סגור וחסום שהוא איחוד של מספר סופי של תחומים פשוטים (ביחס ל-2 הצירים) ותהי C שפתו. נגדיר על C כיוון נגד מחוגי השעון. תהיינה $P(x,y),Q(x,y)$ פונקציות $\underline{C^1}$ בתחום פתוח המכיל את D ואת שפתו C. **אזי**:

$$\boxed{\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy}$$

הערה:

קיים דמיון בין משפט גרין לבין משפט ניוטון-לייבניץ. במשפט ניוטון-לייבניץ במקום המסלול התוחם את השטח, ישנן שתי נקודות שתוחמות את הקטע, ובמקום השדה – פונקציה.

חישוב שטחים:

אם $Q_x-P_y\equiv1$, אז ממשפט גרין: $\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D(Q_x-P_y)dxdy=\iint_D dxdy$ וזה שווה לשטח

של תחום D שכלוא ע"י מסלול סגור C. כלומר, ע"י בחירת שדה דמיוני כלשהו שייתן $Q_x-P_y\equiv1$, נוכל לחשב את השטח של תחום D ע"י חישוב ישיר של אינטגרל על מסלול סגור C.

דוגמאות של שדות כאלה:

1. $P\equiv0,\quad Q=x$ $\Leftarrow$ $A=\oint_C xdy$.
2. $P=-y,\quad Q\equiv0$ $\Leftarrow$ $A=\oint_C -ydx$.
3. $P=-\frac{1}{2}y,\quad Q=\frac{1}{2}x$ $\Leftarrow$ $A=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$ (בד"כ המומלץ).

שדה משמר

דו-מימדי

הגדרה:

יהי $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$ שדה וקטורי רציף בתחום D. אם לכל 2 נקודות A,B ב-D מתקיים, שערכו של אינטגרל $\int\limits_{A\to B} Pdx+Qdy$ איננו תלוי במסלול המחבר את A,B (בתנאי שכל המסלול בתוך D), אלא בקצוות A,B בלבד, אזי אומרים ש-$\vec{F}$ **שדה משמר** ב-D.

משפט:

תהיינה $P(x,y),Q(x,y)$ פונקציות רציפות ב-D. **אזי** שלושת הטענות הבאות שקולות:

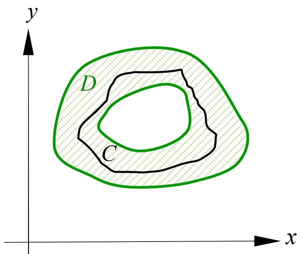
1. לכל עקום סגור C בתוך D מתקיים: $\oint\limits_C Pdx+Qdy=0$.
2. השדה $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$ משמר (ע"פ ההגדרה לעיל).
3. קיימת פונקציה $U(x,y)$ שהיא C^1 ב-D שמקיימת: $\vec{\nabla}U=\vec{F}$ ומתקיים: $\int\limits_{A\to B} Pdx+Qdy=U(B)-U(A)$.

הערה:

בפיזיקה U נקראת פוטנציאל.

הגדרה:

תחום $D\subseteq\mathbb{R}^2$ ייקרא **פשוט קשר**, אם כל מסלול פשוט וסגור שמוכל ב-D ניתן "לכווץ באפן רציף" לנקודה.



דוגמא לתחום D ש**אינו** פשוט קשר

משפט:

תהיינה $P(x,y),Q(x,y)$ פונקציות C^1 בתחום פשוט קשר D. **אזי** שלושת הטענות ממשפט קודם שקולות לטענה הבאה:

4. $Q_x=P_y$ בכל נקודה של D.

משפט:

(שדות משמרים סינגולריים – שדות עם נקודות אי-רציפות)

יהי $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$ שדה ותהיינה $P(x,y),Q(x,y)$ פונקציות C^1 בכל התחום D, למעט הנקודה (x_0,y_0). ונניח שמתקיים:

1. $Q_x=P_y$ בכל נקודה של D, למעט הנקודה (x_0,y_0).
2. קיים מעגל שמרכזו ב-(x_0,y_0), כך ש: $\oint\limits_C Pdx+Qdy=0$.

אזי שדה זה משמר בתחום D, למעט נקודה (x_0,y_0).

משטחים

הגדרות

משטח הוא התמונה של העתקה $\vec{R}:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, כלומר 3 פונקציות בשני משתנים:

$$x(u,v),y(u,v),z(u,v) \qquad (u,v)\in D$$

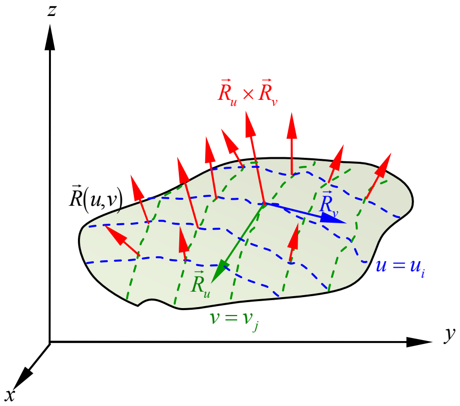
כאשר u,v הם **פרמטרים** ו-D הוא **תחום הפרמטרים**. כלומר ההצגה הווקטורית:

$$\boxed{\vec{R}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}}$$

לעקום:

$$\vec{R}(u_0,v)=x(u_0,v)\hat{i}+y(u_0,v)\hat{j}+z(u_0,v)\hat{k}$$

נקרא **קו שווה-** u. בדומה עבור קו שווה-v.



הקווים שווי- u ושווי- v הם קווים שנמצאים על המשטח. אם הפרמטריזציה של המשטח $\vec{R}(u,v)$ היא C^1, אז הישרים המשיקים לקווים אלה מוכלים במישור המשיק למשטח (בהנחה שהתנאים מתקיימים).

הכיוון המשיק לעקום שווה- u בנקודה $\vec{R}(u_0,v_0)$ הוא: $\vec{R}_v(u_0,v_0)$.

הכיוון המשיק לעקום שווה- v בנקודה $\vec{R}(u_0,v_0)$ הוא: $\vec{R}_u(u_0,v_0)$.

אם שני הכיוונים $\vec{R}_v(u_0,v_0),\vec{R}_u(u_0,v_0)$ אינם קולינאריים (ואינם $\vec{0}$), אז הוקטור:

$$\boxed{\vec{N}=\vec{R}_u(u_0,v_0)\times\vec{R}_v(u_0,v_0)}$$

יהיה **ניצב למשטח** בנקודה $\vec{R}(u_0,v_0)$.

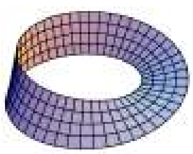
לנקודה על פני משטח, שבה מתקיים: $\vec{N}=\vec{R}_u(u_0,v_0)\times\vec{R}_v(u_0,v_0)\neq 0$ קוראים **נקודה רגולרית**.

אחרת – זאת **נקודה סינגולרית**.

משטח שכל נקודותיו רגולריות נקרא – **משטח חלק**.

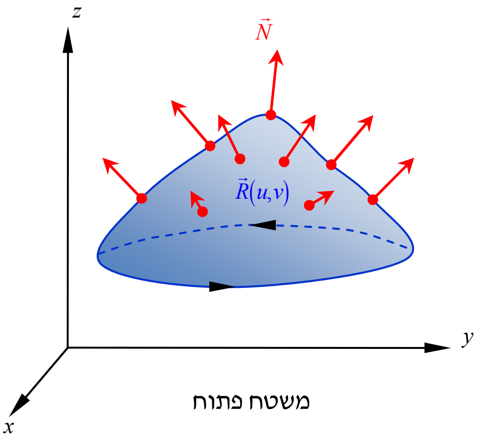
נניח S - משטח חלק, ו-$\vec{N}=\vec{R}_u\times\vec{R}_v$ הנורמל עליו. אם $\vec{R}(u_0,v_0)$ פרמטריזציה C^1, $\vec{N}(u,v)=\vec{R}_u\times\vec{R}_v$ הוא וקטור רציף. אם לכל עקום סגור על משטח S הנורמל $\vec{N}=\vec{R}_u\times\vec{R}_v$ רציף, אז אומרים שזהו **משטח דו-צדדי** (בקורס זה יש רק כאלה).

דוגמא מפורסמת למשטח חד-צדדי – טבעת מביוס (Möbius).



טבעת מביוס
(משטח חד-צדדי)

עקום סגור – מחלק את המישור לשני חלקים זרים (בפנים ובחוץ). **משטח סגור** – מחלק את המרחב לשני חלקים זרים (בפנים ובחוץ).



משטח פתוח

כיוון המשטח מוגדר ככיוון אליו פונה הווקטור $\vec{N}=\vec{R}_u\times\vec{R}_v$.

אם המשטח סגור, נהוג לבחור את הפרמטריזציה כך, שהנורמל פונה החוצה. אם יצא והנורמל פונה פנימה, נחליף את סדר הפרמטרים: $\vec{N}=\vec{R}_v\times\vec{R}_u$.

אם המשטח פתוח, אז יש לו שפה. מקובל לבחור את כיוון המסלול של השפה ע"י כלל יד ימין (כמו בציור).

הגדרה:

תהי S התמונה של העתקה $\vec{R}:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, כאשר $x(u,v),y(u,v),z(u,v)\in C^1$ ב- D. נגדיר את **שטח של משטח** S ע"י:

$$\boxed{A=\iint_D\left|\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right|dudv}$$

דוגמא חשובה:

נניח קיים משטח $z=f(x,y)$. שניתן להגדירו ע"י פרמטריזציה XY "טבעית":

$$x(x,y)=x$$
$$y(x,y)=y$$
$$z(x,y)=z(x,y)\quad (x,y)\in D$$
$$\vec{R}(x,y)=x\hat{i}+y\hat{j}+z(x,y)\hat{k}$$

אזי וקטור הנורמל יהיה:

$$\vec{N}=\vec{R}_x\times\vec{R}_y=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&0&z_x\\0&1&z_y\end{vmatrix}=-z_x\hat{i}-z_y\hat{j}+\hat{k}$$
$$\left|\vec{R}_x\times\vec{R}_y\right|=\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}$$

ואז השטח של משטח $z=f(x,y)$ יהיה:

$$A=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

"סיסמת המשטחים":

נניח נתון משטח:

$$S=\left\{(x,y,z)\middle|\ \ f(x,y,z)=a,\ \ g(x,y,z)\le b\right\}$$

אזי השיוויון מתאר את המשטח, ואי-השיוויון (יכול להיות יותר מאחד) מתאר את התחום.

אינטגרל משטחי מסוג ראשון

הגדרה:

יהי S משטח דו-צדדי שנתון ע"י פרמטריזציה $\vec{R}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$,

$(u,v)\in D$, כאשר $x(u,v),y(u,v),z(u,v)\in C^1$ בתחום D, ותהי $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה,

שמוגדרת על המשטח S. אנו נגדיר את **האינטגרל המשטחי מן הסוג הראשון** של f על S ע"י:

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,dS \triangleq \iint_D f\left(\vec{R}(u,v)\right)\cdot\left|\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right|dudv}$$

הערות:

1. $\left|\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right|dudv$ - זהו אלמנט השטח.
2. משמעות פיסיקלית: זוהי מסה של משטח בעל צפיפות מסה ליחידת שטח הנתונה ע"י f.
3. אם $f(x,y,z)\equiv 1$ נקבל שטח המשטח: $\iint_S dS$.
4. היפוך כיוון הנורמל – אינו משנה את האינטגרל המשטחי מן הסוג הראשון.

אינטגרל משטחי מסוג שני

הגדרה:

יהי S משטח דו-צדדי שנתון ע"י פרמטריזציה $\vec{R}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$,

$(u,v)\in D$, כאשר $x(u,v),y(u,v),z(u,v)\in C^1$ בתחום D. יהי $\vec{N}$ וקטור נורמל למשטח (כאשר

וקטור היחידה בכיוון הנורמל: $\hat{n}=\frac{\vec{R}_u\times\vec{R}_v}{\left|\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right|}$). יהי $\vec{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי רציף, שמוגדר על המשטח

S. אנו נגדיר את **האינטגרל המשטחי מן הסוג השני** של השדה $\vec{F}$ דרך S ע"י:

$$\boxed{\iint_S\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS}$$

כאשר:

$$\boxed{\iint_S\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iint_D\vec{F}\cdot\left(\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right)dudv}$$

הערות:

1. פיתוח של הנוסחא האחרונה: $\iint_S\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iint_D\left(\vec{F}\cdot\frac{\vec{R}_u\times\vec{R}_v}{\cancel{\left|\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right|}}\right)\underbrace{\cancel{\left|\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right|}dudv}_{Area\ element}$
2. היפוך כיוון הנורמל – משנה את סימנו של האינטגרל המשטחי מן הסוג השני.
3. משמעות גיאומטרית – בנקודות שבהן הנורמל למשטח מקביל לכיוון השדה (השדה ניצב למשטח) שם $\left|\vec{F}\cdot\hat{n}\right|$ מקסימלי, ובנקודות שהנורמל של המשטח ניצב לשדה - $\vec{F}\cdot\hat{n}=0$.
4. משמעות פיסיקלית: זהו שטף של השדה $\vec{F}$ דרך המשטח S בכיוון $\hat{n}$.

אנליזה וקטורית

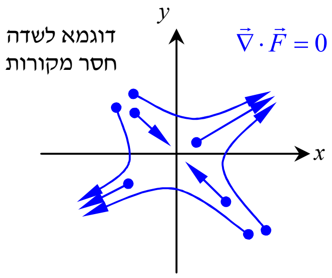
ניתן להגדיר רישום סימבולי לאופרטור **נבלה (Nabla)** ע"י הווקטור: $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$

משהו מעניין (לשם שינוי ☺):

מקורה של המילה "נבלה" הוא... **בשפה העברית**: "נבל" – כלי נגינה, שצורתו מאוד דומה:

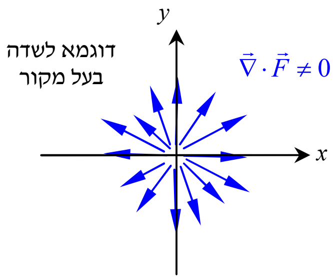
גרדיאנט (שהוזכר לעיל) זה הכפלה של וקטור (נבלה) בסקלר (פונקציה), ולכן מקבלים וקטור (שדה וקטורי):

$$\boxed{\vec{\nabla}f=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot f=\left(\frac{\partial}{\partial x}f,\frac{\partial}{\partial y}f,\frac{\partial}{\partial z}f\right)}$$



יהי $\vec{F}(x,y,z)=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ שדה ווקטורי C^1. ל"מכפלה סקלרית של ווקטורים" הבאה קוראים **דיברגנט** של שדה $\vec{F}$ (התוצאה היא סקלר, כלומר פונקציה):

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=DIV\left(\vec{F}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(Q,P,R)=\frac{\partial}{\partial x}Q+\frac{\partial}{\partial y}P+\frac{\partial}{\partial z}R}$$



שדה C^1 שמקיים $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0$ נקרא **שדה חסר מקורות**.

יהי $\vec{F}(x,y,z)=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ שדה ווקטורי C^1. ל"מכפלה וקטורית" הבאה קוראים **רוטור** של שדה $\vec{F}$ (התוצאה היא – וקטור, כלומר שדה וקטורי):

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F}=Rot\left(\vec{F}\right)=Curl\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\left(R_y-Q_z\right)\hat{i}+\left(P_z-R_x\right)\hat{j}+\left(Q_x-P_y\right)\hat{k}}$$

שדה C^1 שמקיים $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ נקרא **שדה חסר מערבולות**.

הערות חשובות:

1. יהי $\vec{F}$ שדה ווקטורי $\underline{C^2}$, אזי $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\equiv 0$ (דיברגנט של רוטור).
2. תהי f פונקציה $\underline{C^2}$, אזי $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\vec{F}\right)\equiv\vec{0}$ (רוטור של גרדיאנט).

תהי f פונקציה $\underline{C^2}$. אזי לביטוי הבא (דיברגנט של גרדיאנט) קוראים **לפלסיאן** (התוצאה היא סקלר, כלומר פונקציה):

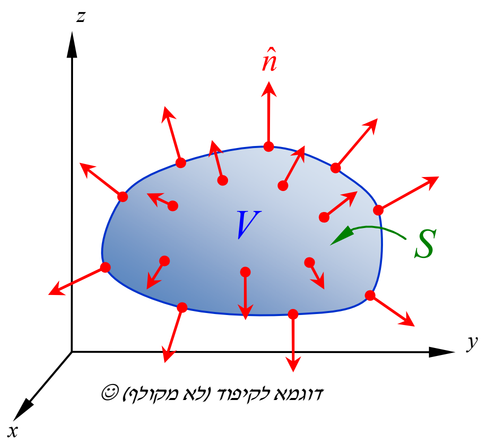
$$\boxed{\Delta f=Lap(f)=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)=\vec{\nabla}^2(f)\triangleq f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}}$$

משפט גאוס

משפט גאוס (משפט הדיברגנט):

יהי V תחום סגור וחסום ב- $\mathbb{R}^3$, שהוא איחוד של מספר סופי של תחומים "פשוטים", ותהי שפתו S משטח חלק למקוטעין, כך שהנורמל $\hat{n}$ על S פונה החוצה מ- V. יהי $\vec{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי C^1 בקבוצה פתוחה, שמכילה את V ואת שפתו S. **אזי**:

$$\boxed{\oiint\limits_{S}\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iiint\limits_{V}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)dxdydz}$$



דוגמה לקיפוד (לא מקופף) ☺

תזכורת מחדו"א 1:

משפט הערך הביניים האינטגרלי:

תהי f רציפה בקטע $[a,b]$, אזי קיימת נקודה $c\in[a,b]$, כך ש:

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

הגדרת דיברגנט – ללא תלות במערכת צירים

יהי B_R כדור קטן (מאוד), שמרכזו בנקודה (x_0,y_0,z_0) ורדיוסו R. נסמן את פני הכדור ע"י ∂B_R.

נסמן את הנפח של הכדור ע"י V_R. ממשפט גאוס: לכל שדה $F\in C^1$ מתקיים:

$$\oiint\limits_{\partial B_R}\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iiint\limits_{B_R}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)dxdydz$$

אם $F\in C^1$, אז $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\in C$, כלומר זו פונקציה רציפה. לכן לפי המשפט הערך הביניים האינטגרלי (המקביל שלו בתלת-מימד) קיימת נקודה (x_1,y_1,z_1) בתוך כדור שבה מתקיים:

$$\iiint\limits_{B_R}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)dxdydz=\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)(x_1,y_1,z_1)\cdot V_R$$

ומכיוון שהכדור קטן מאוד:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)(x_1,y_1,z_1)\cdot V_R=\left[\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)(x_0,y_0,z_0)+\varepsilon\right]\cdot V_R \qquad \left(\lim_{R\to0}\varepsilon=0\right)$$

כלומר קיבלנו:

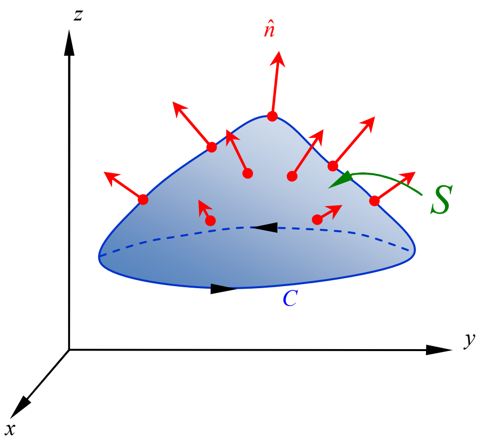
$$\oiint\limits_{\partial B_R}\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\left[\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)(x_0,y_0,z_0)+\varepsilon\right]\cdot V_R \qquad \left(\lim_{R\to0}\varepsilon=0\right)$$

ולאחר העברת האגפים:

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)(x_0,y_0,z_0)=\lim_{R\to0}\frac{1}{V_R}\oiint\limits_{\partial B_R}\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS}$$

משפט סטוקס

משפט סטוקס:



יהי S משטח חלק למקוטעין, ותהי שפתו C עקום חלק למקוטעין. נקבע את כיוון הנורמל $\hat{n}$ על S ואת כיוון המסלול C ע"פ כלל יד ימין (כמתואר בציור). יהי $\vec{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי C^1. **אזי**:

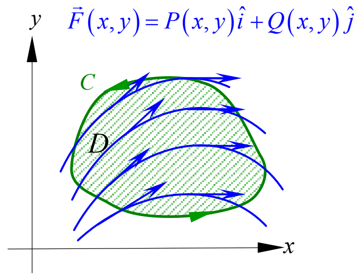
$$\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\right]dS}$$

הערות:

1. המשפט אומר, שעבודה לאורך המסלול סגור C שווה לשטף של $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ דרך איזשהו משטח S, ש-C שפתו.
2. נתבונן במקרה פרטי שבו S הוא חלק של מישור XY חסום – D, כלומר C מסלול מישורי, והשדה הוא דו-מימדי במישור XY:

$$\vec{F} = P\hat{i}+Q\hat{j}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \cancel{\dfrac{\partial}{\partial z}}^{\,0} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(Q_x - P_y\right)\hat{k}$$



לפי משפט סטוקס נקבל:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\right]dS = \iint_D \left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{k}\right]dxdy = \iint_D \left(Q_x - P_y\right)dxdy$$

מסקנה: עבור משטח מישורי XY משפט סטוקס מצטמצם למשפט גרין!

שדה משמר

תלת-מימדי

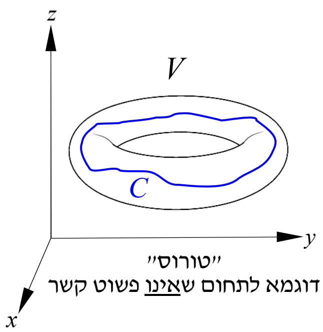
הגדרה:

יהי $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{j}$ שדה וקטורי <u>רציף</u> בתחום V. אם לכל 2 נקודות A,B ב- V מתקיים, שערכו של אינטגרל $\int\limits_{C}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{A\to B}Pdx+Qdy+Rdz$ <u>איננו תלוי במסלול</u> המחבר את A,B (בתנאי שכל המסלול בתוך V), אלא בקצוות A,B בלבד, אזי אומרים ש- $\vec{F}$ **<u>שדה משמר</u>** ב- V.

משפט:

יהי $\vec{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{j}$ שדה וקטורי <u>רציף</u> בתחום V. **<u>אזי</u>** שלושת הטענות הבאות <u>שקולות</u>:

1. לכל עקום סגור C בתוך V מתקיים: $\oint\limits_{C}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.
2. השדה $\vec{F}$ משמר (ע"פ ההגדרה לעיל).
3. קיימת פונקציה (פוטנציאל בפיסיקה) $U(x,y,z)$ שהיא C^1 ב- V שמקיימת: $\vec{\nabla}U=\vec{F}$
   ומתקיים: $\int\limits_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=U(B)-U(A)$.



"טורוס"
דוגמה לתחום ש<u>אינו</u> פשוט קשר

הגדרה:

תחום $V\subseteq\mathbb{R}^3$ ייקרא **<u>פשוט קשר</u>**, אם כל מסלול פשוט וסגור שמוכל ב- V ניתן "לכווץ באופן רציף" לנקודה.

משפט:

תהיינה $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ פונקציות C^1 בתחום <u>פשוט קשר</u> V. **<u>אזי</u>** שלושת הטענות ממשפט קודם שקולות לטענה הבאה:

4. $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}$ בכל נקודה של V.

