גבול של פונקציה $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

תהי $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של (x_0,y_0) (אולי f לא מוגדרת בנקודה (x_0,y_0) עצמה). אנו נגיד ש– f שואפת לערך L כאשר (x,y) שואפת ל–(x_0,y_0), ונסמן: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)=L$

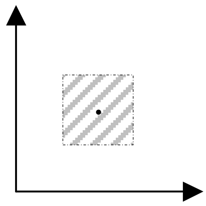
או: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$

אם: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_{(\varepsilon)}>0,\ \ 0<d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\ \Rightarrow\ |f(x,y)-L|<\varepsilon$

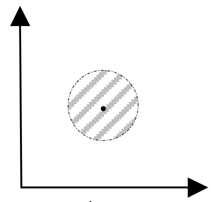
הקבלה לחדו"א 1

$0<|x-x_0|<\delta \qquad |f(x)-L|<\varepsilon$

כאשר המרחק d נמדד ע"י אחת המטריקות הרצויות לנו:



סביבה ריבועית ע"י מטריקת max

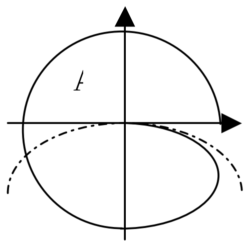


סביבה מעגלית עפ"י המטריקה האוקלידית

עבור סביבה מעגלית: $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$

עבור סביבה ריבועית: $|x-x_0|<\delta,\ \ |y-y_0|<\delta,\ \ |x-x_0|+|y-y_0|>0$

<u>**דיון:**</u> בשיעור הקודם דנו בקבוצה A, הקבוצה הסגורה שבציור:



$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in A\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

ראינו – בכל נקודה פנימית ב–A הגבול קיים וערכו 1.
בכל נקודה חיצונית ל–A הגבול קיים וערכו 0.
בכל נקודת שפה הגבול לא קיים, לרבות הנקודה $(0,0)$, כי בכל סביבה של נקודת שפה יש נקודות פנימיות (שם $f=1$) ונקודות חיצוניות (שם $f=0$).

ראינו – שעל כל <u>קרן</u> (ישר דרך הראשית) ערך הפונקציה קבוע 1, בסביבה של $(0,0)$, כלומר כביכול על כל קו ישר שכזה "הגבול מימין = לגבול משמאל".

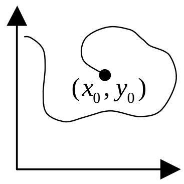
<u>אבל</u> כפי שהוכחנו קודם, הגבול בנקודה $(0,0)$ לא קיים.

<u>ואמנם</u> – על מסלול מעגלי שבציור (מקווקוו) ערך הפונקציה קופץ מ-0 ל-1 בנקודה $(0,0)$.

"משפט יחידות הגבול"

אם קיים הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L$, אז לכל מסלול $(x(t),y(t))$ שמקיים $\lim\limits_{t\to t_0}(x(t),y(t))=(x_0,y_0)$,

מתקיים: $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t),y(t))=L$



הביסוס התיאורטי – הגדרת הגבול על פי היינה.

מסקנות:

1. אם מצאנו 2 מסלולים שונים שלאורכם מקבלת הפונקציה גבולות שונים – אז אין גבול.
2. אפילו אם קיים גבול לאורך אינסוף מסלולים שונים, וכל ערכי הגבולות זהים, אין זה מבטיח קיום גבול.

הדגמה לסתירת קיום גבול

דוגמה 1: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=?$ $\quad f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

נתבונן בהתנהגות הפונקציה הזו לאורך כל הקרניים $t\to 0$ $\quad x(t)=t$:

$y(t)=kt$

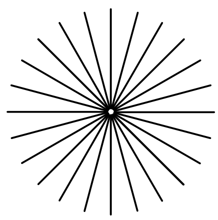
$$\lim_{t\to 0} f(x(t),y(t))=\lim_{t\to 0} f(t,kt)=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot kt}{t^2+k^2t^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

ערך הפונקציה שווה ל– $\dfrac{k}{1+k^2}$ על כל קרן.

בפרט לפונקציה זו אין גבול ב– $(0,0)$ כי ערכה על הקרן $k=0 \to 0$.

$k=1 \to \frac{1}{2}$

משמעות גיאומטרית – פונקציה זו מקבלת ערך קבוע על כל קו ישר דרך הראשית.
קווי הגובה שלה הם הקרניים האלה:



<u>דוגמה 2:</u> $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=?$ $\qquad f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

ננסה שוב לבדוק את התנהגות הפונקציה לאורך הקרניים:

$$\lim_{t\to 0} f(t,kt)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cdot kt}{t^4+k^2t^2}=\frac{kt}{t^2+k^2}=0$$ לכל ערך k !

זה לא אומר כלום! נתבונן במסלול $x(t)=t$, $y(t)=kt^2$:

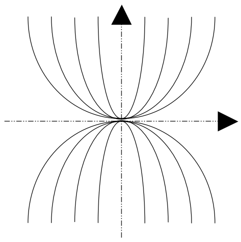
$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2kt^2}{t^4+k^2t^4}=\frac{k}{1+k^2}$$

מצאנו שני מסלולים שלאורכם הפונקציה מקבלת גבולות שונים:

- קרן – שם הגבול 0.
- פרבולה עם $k=1$ – שם הגבול $\frac{1}{2}$.

לכן אין גבול!

<u>משמעות גיאומטרית</u> – פונקציה זו קבועה על גבי פרבולות $y=kx^2$

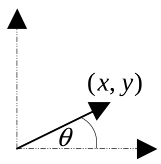


<u>3 שיטות בסיסיות לחישוב גבולות</u>

<u>חשוב:</u> אין לופיטל רב-מימדי!

<u>שיטה 1</u> – מעבר לקואורדינאטות מעגליות $x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$



r הוא המרחק מן הראשית ל–(x,y) . <u>תמיד</u> $r\geq 0$.

θ הזווית הנמדדת מהכיוון החיובי של ציר x .

θ מוגבלת לתחום שאורכו 2π : $[-\pi,\pi]$, $[0,2\pi]$.

שיטה זו מוגבלת למקרה אחד <u>בלבד</u>:

1. ניתן לרשום $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=f(r)\cdot g(\theta)$
2. מתעניינים בגבול $x\to 0$, $y\to 0$

אם: $\lim\limits_{r\to 0}\overbrace{f(r)}^{\text{שואף לאפס}}\overbrace{g(\theta)}^{\text{חסום}}$ אז: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

<u>לדוגמא:</u> $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\overset{?}{=}\lim\limits_{r\to0}\frac{r^2\cos^2\theta\, r\sin\theta}{r^2}=\overbrace{\lim\limits_{r\to0}r}^{\text{שואף לאפס}}\ \overbrace{\cos^2\theta\, r\sin\theta}^{\text{חסום}}$

הגבול קיים וערכו 0.

<u>שיטה 2</u> – כלל הסנדוויץ' (שימוש באי-שיוויונים)

אם $\forall(x,y),\ a(x,y)\le f(x,y)\le b(x,y)$,

ואם $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\y\to y_0}}a(x,y)=L=\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\y\to y_0}}b(x,y)$

אז: $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\y\to y_0}}f(x,y)=L$

<u>אי-שיוויונים שימושיים</u>

1. מקטינים את המכנה ← מגדילים את השבר
2. $\left|\frac{ab}{a^2+b^2}\right|\le\frac{1}{2}$

<u>דוגמא:</u> $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\y\to y_0}}\frac{x^2y}{x^2+y^4}$

$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right|\le\left|\frac{x^2y}{x^2}\right|=|y|\to0$$

הוכחנו: $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\y\to y_0}}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=0$

בגלל שהגבול 0, התוצאה נכונה גם ללא ערך מוחלט:

$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

<u>שיטה 3</u> – אם ניתן לרשום $f(x,y)=g(x,y)\cdot h(x,y)$, כאשר: $g(x,y)$ חסומה
$\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_0}} h(x,y)=0$,

אז: $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_0}} f(x,y)=0$ (הכללה של המקרה עם θ, r).

<u>דוגמא:</u> $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\overbrace{x^2}^{a}\overbrace{y}^{b}}{\underbrace{x^4}_{a^2}+\underbrace{y^2}_{b^2}}\cdot x=0$ (כי $\frac{ab}{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}$, $x\underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\to}0$)

- **הערה 1:** אנו הגדרנו גבול עבור $f(x,y)$ המוגדרת בסביבה מנוקבת, לכן למשל $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x-y)}{x-y}$ לא קיים כי הפונקציה לא מוגדרת עבור הישר $x=y$.

- **הערה 2:** גבול נִשְׁנֶה: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$
זהו עניין חסר תועלת. לא נתעסק בו.

<u>רציפות</u>

<u>הגדרה:</u> $d:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
$f(x,y)$ רציפה ב- (x_0,y_0) פנימית ל- A אם: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

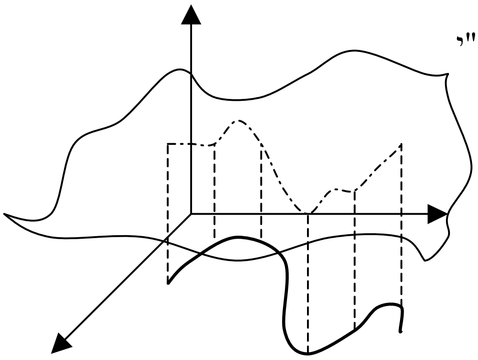
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_{(\varepsilon)}>0:\ d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\ \Rightarrow\ \left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$$

<u>ארבע תכונות יסודיות של פונקציות רציפות</u>

1. אם g, f רציפות אז $f\cdot g$, $f\pm g$ רציפות, ואם $g\neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ רציפה.

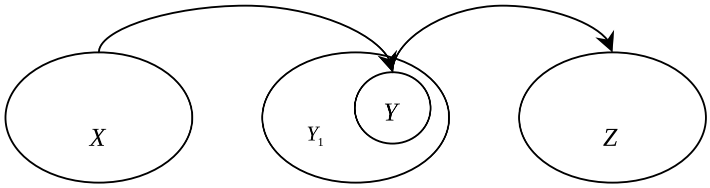
2. אם $f(x,y)$ רציפה ב- (x_0,y_0), $f(x_0,y_0)>0$ ($f(x_0,y_0)<0$), אז קיימת סביבה של (x_0,y_0) שם $f(x_0,y_0)>0$ ($f(x_0,y_0)<0$).

3. <u>רציפות הפונקציה המורכבת</u>



המשמעות הגיאומטרית: אם $f(x,y)$ רציפה, אז ה"הר" שמתואר ע"י הגרף שלה הוא רציף, במובן שאין בו צוקים. לפיכך התנהגות הפונקציה לאורך העקום (הרציף) $f(x(t),y(t))$ משמעותה ש"על השביל אין קפיצות".

$f:X\to Y,\ g:Y\to Z$



הפונקציה $(g\cdot f)(x)=g(f(x))$ נקראת הרכבה של g על f.

<u>משפט</u>

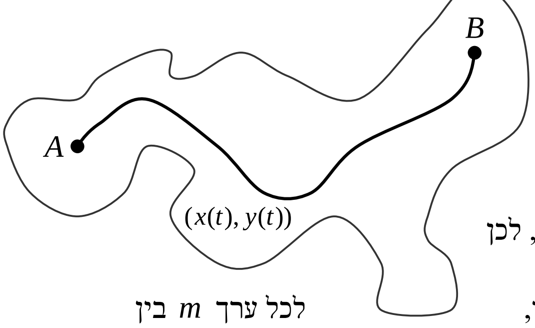
אם f רציפה ב- x_0, g רציפה ב- $y_0=g(x_0)$, אז $(g\cdot f)(x)$ רציפה ב- x_0.

4. <u>משפט ערך הביניים</u>

לפני כן, <u>הגדרה – קבוצה קשירה:</u>

תהי $D\subseteq\mathbb{R}^2$. אומרים ש- D קבוצה קשירה אם לכל שתי נקודות $A,\ B$ ב- D ניתן למצוא מסלול $\vec{r}(t)=x(t)i+y(t)j$, $\alpha\le t\le\beta$ כזה ש: $\begin{matrix}(x(\alpha),y(\alpha))=A\\(x(\beta),y(\beta))=B\end{matrix}$, וכך שכולו מוכל בתוך D.

<u>המשפט</u> – תהי D קבוצה קשירה, $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- D (כלומר רציפה בכל נקודה ב- D, ותהיינה $A,\ B$ נקודות ב- D.
אזי לכל מס' ממשי m בין $f(A)$ ל- $f(B)$ קיימת נקודה אחת לפחות c ב- D כך ש: $f(c)=m$.



<u>הוכחה:</u> יהי $(x(t),y(t))$, $\alpha\le t\le\beta$, עקום שמחבר את A עם B, ושכולו נמצא בתוך D (יש עקום כזה כי D קשירה).

נתבונן בפונקציה המורכבת $F(t)=f(x(t),y(t))$:
$x(t),y(t)$ פונקציות רציפות (עקום), f רציפה (נתון), לכן לפי המשפט הקודם הפונקציה המורכבת רציפה לכל $\alpha\le t\le\beta$. לכן לפי משפט ערך הביניים במשתנה יחיד, לכל ערך m בין $F(\alpha)=f(A)$ ל- $F(\beta)=f(B)$ קיים ערך $\alpha\le\gamma\le\beta$ עבורו $F(\gamma)=m$, ונסמן $c=(x(\gamma),y(\gamma))$. זו נקודה בתוך D כנדרש. מש"ל.