נוצר ע"י טל יונתן חדו"א2ת 22/2/09 טכניון

דף נוסחאות: **מרחק נקודה מישר**: $d=\frac{|\vec{v}\times M_0M_1|}{|\vec{v}|}$ **ממישור**: $d=\frac{|\vec{N}\cdot M_0M_1|}{|\vec{N}|}$ $d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ **ישרים נחתכים**: $M_0M_1\cdot(v_1\times v_2)=0$

בין ישרים מצטלבים: $d=\frac{|M_0M_1\cdot(v_1\times v_2)|}{|v_1\times v_2|}$ **זווית בין מישורים**: $\cos\theta=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}$ **פ.ה** $z-z_0=(x-x_0)^2-(y-y_0)^2$

וקטור מקביל לישר משיק: תהי $\vec{r}(t)$ פרמטר' גזירה של עקום בתחום [a,b] ותהי t_0 בקטע (a,b) אם $\vec{r}\,'(t_0)\neq 0$ אזי $\vec{r}\,'(t_0)$ מקביל לישר המשיק לעקום בנקודה t_0.

משע"ב: יהי D תחום קשיר ב- R^n ותהי $f:D\subset R^n\to R$ פו' רציפה בכל D. יהו A,B שתי נקודות בD. אזי לכל מספר m בין F(A) לF(B) ניתן למצוא נקודה 1 לפחות c כך ש: f(c)=m.

וירש': תהי D קבוצה קומפקטית ותהי f רציפה ב-D אזי: 1. f חסומה בD 2. f מקבלת את ערכי המיני' והמקס שלה. **דוגמאות לאי קיום גבול**: $\frac{xy}{x^2+y^2}$ בעזרת פרמט' x=t y=kt,

$\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ בעזרת פרמט' x=kt y=kt^2. **דוגמא לפונ' בעלת נ"ח(שתיהן 0 בראשית) אבל לא רציפה**: $\frac{xy}{x^2+y^2}$ כש- $(x,y)\neq(0,0)$ ו-0 אחרת.

מישור משיק: למשטח z=f(x,y) יש מישור משיק בנק' $(x_0,y_0,f(x,y))$ אמ"ם f גזירה ב- (x_0,y_0) והוא נתון ע"י: $z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

כלל השרשרת: תהי f(x,y) גזירה ב-(x_0,y_0) ותהיינה $x(t)$ $y(t)$ גזירות ב- t_0 כך ש- $x(t_0)=x_0$ ו- $y(t_0)=y_0$, F(t)= f(x(t),y(t)). אזי 1) F(t) גזירה ב t_0 2) $\frac{dF}{dt}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial t}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial t}(t_0)$.

נגזרת מכוונת: תהי f(x,y) מוגדרת ב (x_0,y_0) וסביבתה ויהי וקטור יחידה $\hat{n}=(n_1,n_2)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ אם קיים הגבול: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+n_1h,y_0+n_2h)-f(x_0,y_0)}{h}$

אז נקרא לו הנגז' המכוונת של f(x,y) ב (x_0,y_0) בכוון $\hat{n}$. משפט: תהי f(x.y) גזירה ב (x_0,y_0) אזי לf יש נגז מכוונת בכל כיוון ב (x_0,y_0) ומתקיים: $\frac{df}{dn}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\hat{n}$.

הנגז' המכוונת מקבלת ערך מקסימלי בכוון הגרדיאנט(כיוון הגידול של הפונ'). אם f(x,y,z) בעלת נ"ח רציפות ב(x_0,y_0,z_0) ובנוסף $\nabla f(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ אז הווקטור $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ ניצב למשטח הרמה של f(x,y,z) שעובר דרך הנקודה (x_0,y_0,z_0).(בשתי משתנים וקטור הגרדיאנט ניצב לקו הגובה של f(x,y) שעובר דרך הנק' (x_0,y_0)).

לייבניץ: f(x,y) רציפה במלבן D אזי $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ רציפה בקטע [c,d]. אם f(x,y) ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות במלבן D אזי: $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ גזירה בקטע (c,d) ומתקיים: $F'(y)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

אם בנוסף u(y) וv(y) גזירות בקטע (c,d) כך ש- $a\le u(y),v(y)\le b$ אזי $F(y)=\int_{u(y)}^{v(y)}f(x,y)dx$ גזירה ב(c,d) ומתקיים: $F'(y)=\int_{u(y)}^{v(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx+f(v(y),y)\cdot v'(y)-f(u(y),y)\cdot u'(y)$.

תהי f(x,y) רציפה במלבן D אזי $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ אינטגרבילית ומתקיים $\int_c^d F(y)dy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$.

המשפט היסודי של החדו"א: תהי f:[a,b]→R רציפה ונגדיר g:[a,b]→R ע"י $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ אזי g גזירה ונגזרתה: g'(x)=f(x). מתקיים: $\frac{d}{dt}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x)$

פונקציות סתומות: חילוץ z- תהי F(x,y,z) מוגדרת ב(x_0,y_0,z_0) וסביבתה ומתקיים: 1) $F(x_0,y_0,z_0)=0$ 2) $F\in c^1$ 3) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ אזי קיימת סביבה של הנק' שבתוכה מוגדרת פונ' יחידה f(x.y) שמקיימת: 1) $F(x,y,f(x,y))=0$ לכל x בסביבת x_0. 2) $z_0=f(x_0,y_0)$ 3) f רציפה ב(x_0,y_0) וסביבתה. 4) $f\in c^1$ ב(x_0,y_0) וסביבתה ומתקיים: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$

תהי $F\in c^1$ בנקודה $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ ונניח: 1) $F(M_0)=0$ 2) $\nabla F(M_0)\neq 0$ (לפחות אחת הנ"ח לא מתאפסת)אזי למשטח $F(x,y,z)=0$ קיים מישור משיק ב M_0 שנוסחתו: $F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0$. דוגמא: $F(x,y)=x-y^3$ כאן $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$ נשים לב כי ב0=x הפונ' המחולצת לא גזירה.

מע' פונ' סתומות: תהיינה: $P_0=(x_0,y_0,z_0),\ M_0=(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)$ $F(x,y,z,u,v)$ $G(x,y,z,u,v)$ מוגדרות בנק' M_0 וסביבתה ומתקיים 1) $F(M_0)=0$ $G(M_0)=0$ 2) $G,F\in c^1$ ב M_0 וסביבתה. 3) $J=\left|\begin{pmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{pmatrix}\right|_{M_0}\neq 0$ אזי קיימת סביבה של M_0 שבה מוגדרות שתי פונ' יחידות: $u(x,y,z)$ $v(x,y,z)$ המקיימות: 1) $F(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z))=0$ $G(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z))=0$ ב- P_0 וסביבתה 2) $u_0=u(x_0,y_0,z_0),\ v_0=v(x_0,y_0,z_0)$ 3) u,v רציפות וגזירות ב-P_0 וסביבתה ומתקיים: $\begin{pmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{pmatrix}_{P_0}=-\begin{pmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{pmatrix}_{M_0}$. משפט הפונ' ההפוכות התנאים הם 1) F,G: $R^4\to R^2$ 2) $G,F\in c^1$ $J=\left|\begin{pmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{pmatrix}\right|_{M_0}\neq 0$

טיילור: תהי f(x,y) בעלת נ"ח רציפות עד לסדר n+1 בנק' וסביבתה אזי

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}+R_n \quad ,, \quad R_n(x_0,y_0)=\frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(f(x_0+\Delta xt,y_0+\Delta yt)\Big|_{t=\tau}$$

מיון נק' קריטיות: תהי f(x,y) פונ' c^2 וכך שמתקיים $\nabla f(x_0,y_0)=\vec{0}$ אזי אם $\Delta>0$: אם $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ מיני' אם $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ מקס'. אם $\Delta<0$ אוכף. אחרת המיון נכשל.

כופלי לגראנז'- תהיינה f,g פונ' c^1 ב (x_0,y_0) ובסביבתה כך שg מקיימת $g(x_0,y_0)=0$ $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$ אם לf יש ערך אקסטרמלי בכפוף לאילוץ בנק' אזי $\nabla f+\lambda\nabla g=\vec{0}$.(כתוצאה מ- $\nabla f\parallel\nabla g$)

טריקים: 1) סוגריים-פסילת מקרים. 2)מבודדים את x(λ) ואת y(λ) ומציבים במשוואת האילוץ ופותרים עבור λ. 3)מטריצה לפתרון מע' משוואות. **עבור שני אילוצים** נדרש בנוסף שהמטריצה שמורכבת מהגרדיאנטים של האילוצים צריך להיות מדרגה מלאה- ע"מ שכופלי לגראנז' יעבוד.

אינטגרלים: תהי f(x,y) אינטגרבילית בD אזי גם |f(x,y)| אינטגרבילית(ולא להפך) ומתקיים: $\left|\iint f(x,y)dxdy\right|\le\iint|f(x,y)|dxdy$. אם f רציפה כב"מ וחסומה בתחום D היא אינטי' שם.

משפט "פוביני": f(x,y) רציפה במלבן אזי: $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$. **משפט**: תהי f(x,y) מוגדרת בתחום D שהוא פשוט ביחס לציר y

ונניח: 1) f(x,y) אינט' שם. 2) לכל x בקטע [a,b] קיים אינט' חד מימדי: $G(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy$. u(x) ו- v(x) הן c^1 ומגדירות את תחום D. אזי G(x) אינט' ב[a,b] ומתקיים:

$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b G(x)dx=\int_a^b\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy\right]dx$. **משפט שינוי משתנים באינט' כפול**: תהי f(x,y) רציפה בD. נניח שההעתקה T מקיימת: 1) $T\in c^1$ בD' (מישור UV) 2) T חח"ע ועל D. 3) $J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\neq 0$ בכל D'. אזי אפשר להחליף משתנים ולא לשכוח יעקוביאן. **אינטגרל קווי סוג1**: יהי C עקום שנתון ע"י פרמטי' גזירה ברציפות: r(t)=(x(t),y(t),z(t)) בקטע [a,b]

ותהי f(x,y,z) רציפה. אזי האינט' הקווי מהסוג ה1 של הפונ' קיים ונתון ע"י: $\int_c f(x,y,z)ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))|\vec{r}'(t)|dt$ **סוג2:** C עקום שנתון ע"י פרמטר(כמו קודם) ויהי F שדה וקטורי

רציף אזי האינט' הקווי מן הסוג ה2 של השדה קיים ונתון ע"י: $\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\vec{r}'(t)dt=\int_c Pdx+Qdy+Rdz=\int_a^b (P(x,y,z)\cdot x'+Q(x,y,z)\cdot y'+R(x,y,z)\cdot z')dt$

משפט גרין: יהי D תחום סגור וחסום שהוא איחוד של מספר סופי של תחומים פשוטים (ביחס לצירים) ותהי C שפתו. תהינה P(x,y) Q(x,y) פונ' c^1 בתחום פתוח המכיל את D ואת שפתו C.

אזי $\oint_c Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$. **שדה משמר**: שדה וקטורי רציף שבו לכל 2 נק' מתקיים שערכו של האינט' אינו תלוי במסלול המחבר את הנק' אז השדה משמר. **משפט1**: תהיינה P(x,y) Q(x,y) פונ' רציפות בD אזי הטענות הבאות שקולות: 1) לכל עקום C בתוך D מתקיים $\oint_c Pdx+Qdy=0$ 2) השדה $\vec{F}(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$ משמר. 3) קיימת פונ' U(x,y) שהיא c^1 בD שמקיימת gard(U)=F ומתקיים: $\int_{A\to B} Pdx+Qdy=U(B)-U(A)$. **משפט2:** תהיינה P(x,y) Q(x,y) פונ' c^1 בתחום פשוט D. אזי $Q_x=P_y$ בכל נק' בD (בנוסף ל3 הקודמות).

משפט (סינגולריים) $\vec{F}(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$ שדה ותהיינה P(x,y) Q(x,y) פונ' c^1 בכל התחום D. למעט הנק' (x_0,y_0) ונניח שמתקיים: 1) $Q_x=P_y$ בכל נק' פרט ל(x_0,y_0) 2) קיים מעגל שמרכזו ב(x_0,y_0) כך ש- $\oint_c Pdx+Qdy=0$ אזי השדה משמר בתחום D למעט בנק' (x_0,y_0) **שטח של משטח:** $S=\iint_D|\vec{R}_u\times\vec{R}_v|dudv=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$.

אינט' משטחי סוג1: יהי S משטח דו"צ שנתון ע"י הפרמט' $R(u,v)=x(u,v)i+y(u,v)j+z(u,v)k$ כאשר(u,v) בD ו $x(u,v),y(u,v),z(u,v)\in c^1$ בתחום D ותהי f(x,y,z) רציפה שמוגדרת על S. האינט' מוגדר ע"י: $\iint_s f(x,y,z)dS=\iint_D f(R(u,v))\cdot|R_u\times R_v|dudv$. **סוג2**: כמו קודם ובנוסף N נורמל למשטח(כאשר וקטור היחידה בכיוון הנורמל $\hat{n}=\frac{\vec{R}_u\times\vec{R}_v}{|\vec{R}_u\times\vec{R}_v|}$) וF שדה רציף שמוגדר על S $\iint_s(\vec{F}\cdot\hat{n})dS=\iint_D \vec{F}\cdot(R_u\times R_v)dudv$. $f,F\in c^2,\nabla\times\nabla f=0,\nabla\cdot(\nabla\times F)=\vec{0}$. **משפט גאוס** יהי V תחום סגור וחסום ב- $\mathbb{R}^3$ שהוא איחוד של מספר סופי של תחומים פשוטים ותהי שפתו S משטח חלק למקוטעין, כך שהנורמל על S פונה החוצה מV. יהיה F(x,y,z) שדה וקטורי c^1 בקבוצה פתוחה שמכילה את V ואת של S

אז: $\iint_S(F\cdot\hat{n})dS=\iiint_V(\nabla\cdot F)dxdydz$. **משפט סטוקס** יהי S משטח חלק למקוטעין ותהי שפתו C עקום חלק למקוטעין כיוון הנורמל על S וכיוון המסלול C ע"פ כלל יד ימין יהי F(x,y,z) שדה וקטורי c^1 אזי: $\oint_C F\cdot dr=\iint_S[(\nabla\times F)\cdot\hat{n}]ds$ (עבודה לאורך המסלול C שווה לשטף דרך איזשהו משטח S שC שפתו). **שדה משמר תלת מימדי**: יהי F=Pi+Qj+Rk שדה וקטורי רציף בתחום V אזי הטענות הבאות שקולות: 1) לכל עקום C בתוך V מתקיים $\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$. 2) השדה F משמר. 3) קיימת פונ' U(x,y,z) שהיא c^1 בV שמקיימת gard(U)=F ומתקיים $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=U(B)-U(A)$

קוסינוס: $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\pm\cdots$ for all x

בנוסף אם השדה הוא גם פשוט קשר אז הטענות הקודמות שקולות לזה ש rot(F)=0.

אינט' מוכלל: תהי f(x,y) אי שלילית בתחום D ותהי {Dn} סדרה של תת"ק סגורות, חסומות ובעלות שטח כל D שמקיימות: 1) $D_1\subset D_2....\subset D_n$ 2) $\lim_{n\to\infty}D_n=D$ 3) f(x,y) אינט' בDn אזי:

$\iint_D f(x,y)dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$ בתנאי שהגבול קיים. דוגמא: (אינטגרנד לא חסום) $\iint_{x^2+y^2\le1}\frac{1}{(x^2+y^2)^k}dxdy$ נבחר $D_n=\{(x,y)|\frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le1\}$ ונמשיך רגיל.

דוגמא(תחום לא חסום): $\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy$ נבחר $D_n=\{(x,y)|x^2+y^2\le n^2\}$ נעבור לקור' מעגליות ונקבל לבסוף pi. מסקנה: $\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\int_1^\infty\frac{dx}{x^k}$ מתכנס אמ"ם k>1 $\int_0^1\frac{dx}{x^k}$ אמ"ם k<1.

אינט' מוכלל תלוי פרמטר: למשל $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(px)dx$ אחרי האינט' נקבל פונ' של p. **מבחןM**: תהי f(x,p) מוגדרת לכל $a\le x<\infty$ ו$p\in I$ ותהי M(x)≥0 מוגדרת לכל $a\le x<\infty$ נניח: 1) f(x,p) אינט'

שורש ריבועי: $\sqrt{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)n!^2 4^n}x^n$ for $|x|<1$ לוגריתם טבעי: $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ for $|x|<1$

לפי x בכל קטע [a,b] ולכל p. 2) $|f(x,p)|\le M(x)$ $\forall x\in[a,\infty),\forall p\in I$ 3) $\int_a^\infty M(x)dx<\infty$. אזי $\int_a^\infty f(x,p)dx$ מתכנס במ"ש ב$p\in I$. דוגמא: $\int_0^\infty\frac{x^2}{t^2}e^{-t-\frac{x^2}{t^2}}dt$ x פרמטר.

סדרה הנדסית (טור גאומטרי): $\frac{x^m}{1-x}=\sum_{n=m}^{\infty}x^n$ for $|x|<1$

$\left|\frac{x^2}{t^2}e^{-t}e^{-\frac{x^2}{t^2}}\right|=\left|\frac{x^2}{t^2}e^{-\frac{x^2}{t^2}}\right|e^{-t}\le ke^{-t}$ $\int_0^\infty e^{-t}dt$ קיים, עפ"י מבחן M האינט' הנתון מתכנס במ"ש ב x שייך לR. **לייבניץ**: תהיינה f(x,p), $\frac{\partial f}{\partial p}(x,p)$ רציפות בתחום $a\le x<\infty$ נניח: 1) האינט'

סינוס: $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\cdots$ for all x

$\int_a^\infty f(x,p)dx$ מתכנס עבור $p\in I$ כלשהו. 2) האינט' $\int_a^\infty\frac{\partial f}{\partial p}(x,p)dx$ מתכנס במ"ש ב $p\in I$ לכל p. אזי הפונ' $F(p)=\int_a^\infty f(x,p)dx$ גזירה ונגזרתה $F'(p)=\int_a^\infty\frac{\partial f}{\partial p}(x,p)dx$.

אקספוננט: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ for all x