הוכחות של משפטים חשובים

תכונות סדר של גבולות

משפט: אם $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)=M$ אז אם $L<M$ אז קיימת סביבה נקובה של a שבה מתקיים: $f(x)<g(x)$.

הוכחה: הגבולות הנתונים קיימים לכל ε ובפרט ל $\varepsilon=\frac{M-L}{2}$ קיים δ_1 כך שעבור $|x-a|<\delta_1$ מתקיים: $|f(x)-L|<\varepsilon$ וקיים δ_2 כך שעבור $|x-a|<\delta_2$ מתקיים: $|g(x)-M|<\varepsilon$.

ולכן עבור $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ ועבור $|x-a|<\delta$ מתקיים:

$L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon=M-\varepsilon<g(x)<M+\varepsilon$ כלומר: $f(x)<g(x)$ בסביבה נקובה זו.

רעיון: אם גבול של פונקציה אחת גדול מגבול של פונקציה אחרת, הרי שקיימת סביבת אפסילון מספיק קטנה מסביב לכל גבול כך שפונקציה אחת תהיה ממש מעל הפונקציה השנייה. בשביל הנוחות ניתן לקחת אפסילון שהינו חצי המרחק בין שני הגבולות כך שהגבול העליון של סביבת אפסילון אחת הינו הגבול התחתון של השנייה ואז נוח להראות שפונקציה אחת גדולה ממש מהשנייה.

גבולות חד-צדדיים לפונקציה מונוטונית

משפט: אם $f(x)$ מונוטונית בקטע I, אז בכל נקודה ב I יש ל $f(x)$ גבולות חד-צדדיים (שהם ערך סופי).

הוכחה: נניח ש $f(x)$ עולה ונראה עבור $a\in I$ שקיים הגבול $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

נסמן: $D=\{x\in I\mid x>a\}$. לכל $x>a$ $f(a)\le f(x)$ (כי $f(x)$ פונקציה עולה) ולכן $f(x)$ חסומה מלרע ב D. ולכן קיים $m=\inf_{a<x} f(x)$. נוכיח כי: $\lim_{x\to a^+} f(x)=m$. בהינתן $\varepsilon>0$, $m+\varepsilon$ אינו חסם מלרע של $f(x)$ ב D כי m הוא חסם המלרע הגדול ביותר. לכן קיים $a<x_0$ שבו $f(x_0)<m+\varepsilon$. נבחר $0<\delta=x_0-a$ ואז עבור $a<x<a+\delta$ (הסביבה הימנית של a) מתקיים: $m-\varepsilon<m\le f(x)\le f(a+\delta)=f(x_0)<m+\varepsilon$, כלומר: $m-\varepsilon<f(x)<m+\varepsilon$ ולכן: $|f(x)-m|<\varepsilon$.

רעיון: $f(x)$ היא מונוטונית עולה ולכן ערך הפונקציה בכל נקודה $a<x$ (a נקודה כלשהי בקטע) גדול מערך הפונקציה בנקודה a ולכן ניתן לומר שבקטע זה שמתחיל ב a הפונקציה חסומה מלמטה וקיים לה אינפימום. מצד שני, אם נוסיף לו ε אז הוא כבר אינו חסם מלרע (מתכונות אינפימום-הוא חסם המלרע הגדול ביותר) ולכן קיימת איזושהי נקודה $a<x_0$ שערך הפונקציה בה הינו קטן מהאינפימום בתוספת ε. נבחר δ מאוס מסוימת: המרחב של הנקודה x_0 הספציפית הזו מ a. ואז מתקיים שהפונקציה הינה גדולה מה אינפימום ולכן גם גדולה ממנו כאשר מורידים ממנו ε. מהצד השני הפונקציה בסביבת δ ימנית של a הזו הינה קטנה מערך הפונקציה ב $a+\delta$ (כי היא מונוטונית עולה) כאשר $x_0=a+\delta$ וערך הפונקציה בנקודה זו הינו כאמור קטן מה אינפימום

בתוספת ε (כי כך בחרנו את x_0). ולכן יוצא מכך שהפונקציה חסומה בין אינפימום בתוספת ε אינפימום (ולכן גם מה אינפימום שהורידו ממנו ε), כלומר, הפונקציה מתכנסת אינפימום הזה.

סדרה עולה וסדרה יורדת שחוסמות אחת את השנייה

משפט: אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת ו $a_n \le b_n$ לכל n אז: שתי הסדרות מתכנסות. ואם גם: $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ אז: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

הוכחה: $a_1 \le a_n \le b_n$ לכל n (כי a_n סדרה עולה). נובע מכך ש $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת וחסומה מלרע ולכן היא מתכנסת. $a_n \le b_n \le b_1$ לכל n (כי b_n סדרה יורדת). נובע מכך ש $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ עולה וחסומה מלעיל ולכן היא מתכנסת. אם בנוסף: $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ (נובע מאריתמטיקה של גבולות).

רעיון: האיבר הראשון של הסדרה היורדת חוסם את שתיהן מלמעלה והאיבר הראשון של הסדרה העולה חוסם את שתיהן מלמטה. שתיהן סדרות מונוטוניות וחסומות ולכן הן מתכנסות לגבול סופי.

הלמה של קנטור

משפט: יהיו $I_n = [a_n, b_n]$ כך שכל קטע סגור I_{n+1} מוכל בתוך כל קטע I_n, אז חיתוך כל הקטעים האלה אינו ריק. ואם $|I_n| \to 0$ אז החיתוך מכיל נקודה יחידה.

הוכחה: ע"פ תנאי ההכלה של התנאים, a_n היא מונוטונית עולה ו b_n היא מונוטונית יורדת המקיימות: $a_n \le b_n$. כמו-כן, שתי הסדרות חסומות בקטע I_1, מונוטוניות חסומות ולכן הן מתכנסות לגבול סופי. נסמן: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. הסדרות חסומות בקטע סגור ולכן כל אחד מהגבולות נמצא בקטע (אם הקטע לא היה סגור, ייתכן שהגבול היה מתקבל באחד בקצוות שאינו מוכל בקטע). היות וזה נכון לכל קטע I_n אז A ו- B שייכים שניהם לחיתוך והוא אינו ריק. אם אורכי הקטעים שואפים לאפס אז יש בחיתוך נקודה אחת $A = B$ (לא ייתכן שיש שתי נקודות שונות כי אז אורך קטע יהיה לפחות $B - A > 0$).

רעיון: תנאי ההכלה של הקטעים מגדיר שתי סדרות מונוטוניות שחוסמות אחת את השניה ולכן מתכנסות. מכיוון ששתי הסדרות חסומות בקטע סגור אז הגבול שלהן גם מוכל בכל קטע ולכן שני הגבולות נמצאים בחיתוך כל הקטעים. אם אורך קטע שואף לאפס אז הקטע $[A, B]$ המוכל בחיתוך כל הקטעים הוא בעצם נקודה אחת, כלומר: $A = B$.

משפט בולצאנו-ויירשטראס

משפט: א. לכל סדרה חסומה יש ת"ס מתכנסת. ב. לסדרה לא חסומה מלעיל יש ת"ס שמתכנסת ל ∞. לסדרה לא חסומה מלרע יש ת"ס מתכנסת ל $-\infty$.

הוכחה: א. נניח ש $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. ולכן קיימים α_0 ו- β_0 כך ש: $\alpha_0 \le a_n \le \beta_0$. נחלק את הקטע $[\alpha_0,\beta_0]$ לשני חלקים שווים- $[\alpha_0,\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}]$ ו- $[\frac{\alpha_0+\beta_0}{2},\beta_0]$. מכיוון שכל איברי הסדרה נמצאים בקטע $[\alpha_0,\beta_0]$ הרי שלפחות באחד משני החצאים של הקטע חייבים להימצא אינסוף מהם. נסמן קטע זה ב-$[\alpha_1,\beta_1]$. ונחצה גם את הקטע הזה לשני חלקים שווים, לפחות אחד מהם יכיל שוב אינסוף מאיברי הסדרה ונסמן קטע זה ב-$[\alpha_2,\beta_2]$. נמשיך באותו האופן ונקבל סדרת קטעים $[\alpha_i,\beta_i]$ המקיימת את תנאי הלמה של קנטור. ומכיוון שאורך הקטע $[\alpha_i,\beta_i]$ הינו: $\beta_i-\alpha_i=\frac{\beta_0-\alpha_o}{2^i}\to 0$ אז ע"פ הלמה של קנטור, החיתוך מכיל נקודה יחידה- L. L הוא גבול חלקי של הסדרה אם לכל $\varepsilon>0$ קיימים אינסוף מאיברי הסדרה בסביבת ε של L. ובהינתן $\varepsilon>0$ קיים n כך ש-$[\alpha_n,\beta_n]$ מוכל ב $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ וע"פ בחירת הקטעים, אינסוף מאיברי הסדרה הם בסביבה זו ולכן L הוא גבול חלקי.

ב. נניח ש $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא חסומה מלעיל. היות שיש אינסוף מאיברי הסדרה הגדולים מ-1 נבחר אחד מהם ונסמנו באינדקס: n_1 ואז קיבלנו: $a_{n_1}>1$. באותו אופן יש אינסוף מאיברי הסדרה שגדולים מ-2 ונבחר אחד מהם להיות האיבר השני ואז $a_{n_2}>2$ ונמשיך ונבנה ת"ס כך ש $a_{n_k}>K$ לכל K טבעי ואז: $\lim_{n\to\infty} a_{n_k}=\infty$.

רעיון: א. a_n היא סדרה חסומה ולכן מוכלת בתוך קטע סגור, חוצים את הקטע לשניים וממשיכים לחצי שבו אינסוף מאיברי הסדרה (באחד מהם לפחות קיימים אינסוף איברים כי הסדרה כולה מוכלת בקטע). אורך הקטע ה i שואף לאפס כי: $\frac{\alpha_i-\beta_i}{2^i}\to 0$ ולכן ע"פ הלמה של קנטור, חיתוך כל הקטעים מכיל נקודה יחידה. ניתן לבחור n כך שהקטע ה I_n יהיה מוכל בסביבת ε של L וקטע זה גם יכיל אינסוף מאיברי הסדרה ע"פ בחירת הקטעים. ולכן זהו גבול חלקי-אינסוף מאיברי הסדרה בסביבת ε של הגבול.

ב. נניח ש a_n לא חסומה מלעיל, אז ניתן לבנות ת"ס המקיימת: $a_{n_k}>K$ לכל K טבעי (כי קיימים אינסוף מאיברי הסדרה שגדולים מ-1 וניתן לבחור אחד מהם, וקיימים אינסוף מאיברי הסדרה שגדולים מ-2 וניתן לבחור אחד מהם , וכן הלאה...) שזוהי הגדרת שאיפה של סדרה ל ∞.

משפט קושי

משפט: סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מתכנסת אם"ם היא סדרת קושי: לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $m,n>N$ מתקיים: $|a_m-a_n|<\varepsilon$.

הוכחה: לגבי הדוגמא הקלאסית: $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ שהינה הסדרה: $1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\pm\frac{1}{n!}$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש $n<m$. נשתמש באי-השיוויון: $k!>2^{k-1}$ ובנוסחה לטור גיאומטרי סופי עם $q=\frac{1}{2}$.

$$|a_m-a_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}\right|\le\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!}\le\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1-(1/2)^{m-n}}{1-(1/2)}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

ומאחר ש $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ אז בהינתן $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $m>n>N$ מתקיים: $|a_m-a_n|<\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$.

משפט ערך הביניים

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, ויהי γ מספר כלשהו בין $f(a)$ ל- $f(b)$. אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f(c)=\gamma$.

הוכחה: נניח בלי הגבלת הכלליות ש $f(a)<f(b)$ ונגדיר סדרת קטעים סגורים באופן הבא, הקטע הראשון יהיה $[a_0,b_0]$ כאשר $a_0=a$ ו $b_0=b$. נחלק קטע זה לשני חלקים שווים. ואז, אם: $\gamma=\frac{a_0+b_0}{2}$ אז סיימנו את ההוכחה (כי ניקח $c=\frac{a_0+b_0}{2}$). אם $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)>\gamma$ אז נמשיך לקטע השמאלי (שבו הערכים הקטנים יותר) ואם $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)<\gamma$ אז נמשיך לקטע הימני. נגדיר את הקטע אליו אנו ממשיכים כ $[a_1,b_1]$. נמשיך ונבנה סדרת קטעים $[a_n,b_n]$ כך שכל קטע מוכל בקודמו, $f(a_n)<\gamma<f(b_n)$ ו- $b_n-a_n=\frac{b_n+a_n}{2^n}\to 0$. ע"פ הלמה של קנטור חיתוך הקטעים מכיל נקודה יחידה, שנסמנה ב c ומתקיים: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c$. $f(x)$ רציפה ולכן: $\lim_{a_n\to c}f(a_n)=f(c)$ ו- $\lim_{b_n\to c}f(b_n)=f(c)$. אך $f(a_n)<\gamma$ לכל n ולכן גם הגבול יקיים: $f(c)\le\gamma$. באותו אופן, $f(b_n)>\gamma$ ולכן $f(c)\ge\gamma$. כלומר: $f(c)=\gamma$.

רעיון: בונים סדרת קטעים בשיטת החיפוש בינארי (מסיימים אם מוצאים את γ אחרת ממשיכים לחצי שבו סביר ש γ תימצא). הקטע הראשון הינו הקטע $[a,b]$ הנתון. ממשיכים לחצות את הקטעים ואז אורך כל קטע שואף לאפס ולכן ע"פ הלמה של קנטור, בחיתוך כל הקטעים קיימת נקודה יחידה- c. נקודה זו היא גם גבול של שתי סדרות הקצוות שמהם בנויים כל הקטעים. כאשר, בגלל רציפות הפונקציה, מתקיים: $f(a_n)\to f(c)$, $f(b_n)\to f(c)$. מתקיים גם ש γ חוסם את $f(a_n)$ מלמעלה ואת $f(b_n)$ מלמטה ולכן גם הגבול של כל אחד מהם יקיים, שהוא גדול-שווה וקטן-שווה מ γ ולכן הגבול $f(c)$ שווה בדיוק ל γ.

משפט ויירשטראס

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז: א. הפונקציה חסומה בקטע. ב. קיימים ל $f(x)$ מינימום ומקסימום בקטע.

הוכחה: א. נניח בשלילה ש $f(x)$ אינה חסומה בקטע, ונניח בלי הגבלת הכלליות שהיא אינה חסומה מלעיל. בפרט כל n טבעי אינו חסם מלעיל של הפונקציה ולכן לכל n קיים $x_n \in [a,b]$ כך ש $f(x_n) > n$. הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה (כי $a_n \le x_n \le b_n$) ולכן ע"פ משפט בולצאנו-ויירשטראס קיימת לה ת"ס מתכנסת $x_{n_k} \to x_0$. ומאחר ש $a \le x_{n_k} \le b_n$ לכל k אז גם הגבול מקיים זאת: $a \le x_0 \le b$. אז $x_0 \in [a,b]$ ובגלל ש $f(x)$ רציפה אז מתקיים: $f\left(x_{n_k}\right) \to f\left(x_0\right)$. אבל מצד שני ע"פ בחירת ה-x_n-ים מתקיים: $f\left(x_{n_k}\right) > n_k$ ו $n_k \to \infty$ ולכן: $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \infty$. סתירה.

ב. ע"פ סעיף א, $f(x)$ רציפה בקטע סגור ולכן חסומה בו. ולכן קיים לה סופרמום. נסמן: $M = \sup f(x)$. לפי הגדרת הסופרמום, לכל n קיים $x_n \in [a,b]$ כך ש: $f\left(x_n\right) > M - \frac{1}{n}$. הפונקציה חסומה מלעיל ולכן ע"פ בולצאנו-ויירשטראס קיימת לה ת"ס מתכנסת $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$. ע"פ בחירת ה x_n-ים מתקיים: $M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \le M$ וע"פ משפט הסנדוויץ: $f\left(x_{n_k}\right) \to M$. אך מרציפות הפונקציה נובע: $f\left(x_{n_k}\right) \to f(x_0)$ ולכן: $f(x_0) = M$.

רעיון: א. מניחים בשלילה שהפונקציה לא חסומה מלעיל בקטע ואז לכל n מתקיים: $f\left(x_n\right) > n$. אבל הסדרה x_n חסומה בקטע ולכן לפי BW קיימת לה ת"ס מתכנסת. הגבול x_0 גם בקטע (כי הת"ס גם היא חסומה בקטע). מרציפות הפונקציה מקבלים: $f\left(x_{n_k}\right) \to f\left(x_0\right)$ אבל מבחירת הנקודות x_n מקבלים: $f\left(x_{n_k}\right) > n_k$ לכל k טבעי. כלומר הגבול של הת"ס הינו גם סופי וגם אינסוף שזו סתירה.

ב. ע"פ סעיף א, הפונקציה חסומה בקטע ולכן קיים לה סופרמום. לפי הגדרת הסופרמום קיימת נקודה x_n בקטע כך שערך הפונקציה בנקודה גדול מ $M - \frac{1}{n}$. הסדרה x_n חסומה ולכן ע"פ BW קיימת לה ת"ס מתכנסת: $x_{n_k} \to x_0$. ואז מתקיים שערך הפונקציה ב x_{n_k} מצד אחד גדול מ $M - \frac{1}{n_k}$ (כך הוגדרה הסדרה x_n) ומצד שני הוא קטן מ M כי הוא הסופרמום, ולכן מסנדוויץ, ערך הפונקציה בנקודה שואף ל M. מרציפות הפונקציה נובע שערך הפונקציה בנקודה גם שואף ל $f\left(x_0\right)$ ולכן מקבלים: $f\left(x_0\right) = M$, כלומר הפונקציה מקבלת מקסימום בקטע.

משפט פרמה

משפט: תהי $f(x)$ מוגדרת וגזירה בנקודה פנימית x_0. אם x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f אז $f'(x_0)=0$.

הוכחה: נניח בלי הגבלת הכלליות ש x_0 היא נקודת מינימום מקומי של הפונקציה. אז קיימת סביבה של x_0 שבה מתקיים: $f(x_0)\le f(x)$ לכל x בסביבה. מהגדרת הנגזרת: $f'(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. המונה הינו אי-שלילי. ואילו המכנה חיובי עבור $x_0<x$ ושלילי עבור $x<x_0$. כלומר $f'_-(x_0)\le 0$ וגם $f'_+(x_0)\ge 0$ ולכן: $0\le f'_+(x_0)=f'(x_0)=f'_-(x_0)\le 0$ כלומר: $f'(x_0)=0$.

רעיון: עבור נקודת מינימום מקומי מתקיים שהפונקציה גדולה מערך הפונקציה בנקודה זו בסביבה מסוימת של הנקודה. אך זה מתקיים גם לערכי x מימין וגם לערכי x משמאל לנקודת המינימום. ואז כאשר רושמים את הגדרת הנגזרת לנקודת המינימום, מקבלים שהיא גדולה-שווה לאפס ל x משמאל למינימום וקטנה-שווה לאפס ל x מימין למינימום, ולכן הנגזרת שווה לאפס.

משפט רול

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אם $f(a)=f(b)$ אז קיימת נקודה $a<c<b$ שבה: $f'(c)=0$.

הוכחה: $f(x)$ רציפה בקטע ולכן ע"פ משפט ויירשטראס מקבלת שם מינימום m ומקסימום M. אם $m=M$ אז הפונקציה קבועה בכל הקטע ומקיימת $f'\equiv 0$. אחרת, מתקיים: $M>m$. מכיוון ש $f(a)=f(b)$ לפחות אחד מבין השניים מתקבל בנקודה פנימית בקטע (a,b). כלומר, קיימת $a<c<b$ נקודת קיצון גלובלית (ובפרט מקומית) של $f(x)$ בקטע. וע"פ משפט פרמה: $f'(c)=0$.

רעיון: הפונקציה רציפה בקטע ולכן ע"פ ויירשטראס מקבלת בו מקסימום ומינימום, מכיוון שערך הפונקציה בקצוות שווה הרי שאם המקסימום שווה למינימום אז הפונקציה קבועה ונגזרתה אפס בכל הקטע, אבל אם הם שונים אז רק אחד מהם יכול להתקבל בקצוות הקטע ולכן השני הינו נקודה פנימית בקטע. וע"פ משפט פרמה הנגזרת של נקודת קיצון זו (שינה גלובלית ומקומית) הינו אפס.

משפט לגרנג'

משפט: תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך שמתקיים: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

הוכחה: משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(a,f(a))$ ו- $(b,f(b))$ היא: $g(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. נגדיר פונקצית עזר: $h(x)=f(x)-g(x)$. הפונקציה הזו רציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב(a,b) (כהפרש של פונקציות גזירות או רציפות בהתאמה). הפונקציה

מקיימת: $h(a)=f(a)-(f(a)+0)=0$ ו- $h(b)=f(b)-f(a)-f(b)+f(a)=0$. כלומר: $h(a)=h(b)$. ע"פ משפט רול קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $h'(c)=0$. נגזור את $h(x)$ ונקבל: $h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ומכך נובע:

$$h'(c)=0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\longrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

רעיון: מגדירים פונקצית עזר שהינה הפונקציה $f(x)$ שמחסרים ממנה את משוואת הישר בין שתי הנקודות $(a,f(a))$ ו $(b,f(b))$. פונקצית עזר זו מתאפסת בנקודות a ו- b, וגם מקיימת את שאר תנאי משפט רול. ואז ע"פ רול קיימת נקודה c בין a ל b שבה הנגזרת מתאפסת. אז גוזרים את פונקצית העזר וכאשר מציבים את c בנגזרת מתקבל הביטוי שרצינו להוכיח.

אינטגרביליות בקטע סגור- פונקציה קדומה רציפה

משפט: תהי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז הפונקציה הקדומה: $F(x)=\int_a^x f$ רציפה בקטע.

הוכחה: נרצה להוכיח שלכל $x_0\in[a,b]$ מתקיים: $\lim_{x\to x_0}F(x)=f(x_0)$. נוכיח: $\lim_{x\to x_0}(F(x)-F(x_0))=0$ (ע"פ אריתמטיקה של גבולות).

$f(x)$ אינטגרבילית בקטע ולכן חסומה בו. נסמן ב M חסם מלעיל של הפונקציה, כלומר: $|f(x)|\le M$ לכל $x\in[a,b]$. נשים-לב כי: $\int_a^x f-\int_a^{x_0} f=\int_{x_0}^x f$ $F(x)-F(x_0)=$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש $x_0<x$ אז מתקבל: $|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_{x_0}^x f\right|\le\int_{x_0}^x|f|\le M|x-x_0|$ והגבול אותו רצינו לחשב הינו: $F(x)-F(x_0)=M|x-x_0|\xrightarrow{x\to x_0}0$.

רעיון: כדי להוכיח רציפות מוכיחים כי הגבול של הפונקציה הקדומה פחות ערך הפונקציה בנקודה x_0 שואף לאפס, כאשר x שואף ל x_0. משתמשים בכך שאם הפונקציה היא אינטגרבילית אז היא גם חסומה בקטע ואז קיים לה חסם מלעיל- M. ואז חוסמים מלמעלה את הגבול שרוצים להוכיח ומגיעים לכך שזהו אינטגרל בין x ל- x_0 (אחרי חיסור האינטגרלים) שניתן לחסום אותו מלמעלה ע"י $M|x-x_0|$ וביטוי זה שואף לאפס כאשר x שואף ל x_0, כפי שרצינו להוכיח.

המשפט היסודי של החדו"א

משפט: תהי f פונקציה אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ורציפה בנקודה $x_0\in[a,b]$, אז: $F(x)=\int_a^x f$ גזירה ב x_0 ומתקיים: $F'(x_0)=f(x_0)$ (אם x_0 היא נקודת קצה של הקטע אז הנגזרת היא חד-צדדית).

הוכחה: נרצה להוכיח כי $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=F'(x_0)=f(x_0)$. נניח כי $x_0<x$, אז בקטע $[x_0,x]$ f חסומה (כי היא אינטגרבילית שם) ונסמן: $M_x=\sup_{x_0\le t\le x}f(t)$ ו $m_x=\inf_{x_0\le t\le x}f(t)$.

כמו-כן, מתקיים: $\int_{x_0}^x f=\int_a^x f-\int_a^{x_0} f=F(x)-F(x_0)$ ולכן, ע"פ תכונות יסודיות של האינטגרל המסוים מתקיים גם: $m_x(x-x_0)\le\int_{x_0}^x f\le M_x(x-x_0)$. ומאי-השיוויונים האלה ניתן להגיע ל: $m_x\le\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\le M_x$. $M_x,m_x\xrightarrow{x\to x_0^+}f(x_0)$ (M_x,m_x הינם בעצם פונקציה של x)

בגלל ש f רציפה ב x_0. ואז ממשפט הסנדוויץ' מתקיים: $\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$ (באופן דומה מראים ש $F'_-(x_0)=f(x_0)$ עבור $x<x_0$).

רעיון: נוכיח ע"פ הגדרה שהנגזרת של F בנקודה x_0 שווה לערך של f בנקודה x_0. הפונקציה f חסומה בקטע, אז נגדיר מעין שתי פונקציות: M_x,m_x המקבלות את הסופרמום והאינפימום (בהתאמה) של f בקטע $[x_0,x]$. אינטגרל ההפרש בין $F(x)$ ל- $F(x_0)$ חסום בין $M_x(x-x_0)$ לבין $m_x(x-x_0)$. וכאשר מחלקים ב $(x-x_0)$ מגיעים לביטוי שהינו הנגזרת של F ע"פ הגדרה. הביטוי חסום בין M_x ל m_x אשר כל אחד מהם הינו פונקציה אשר שואפת ל $f(x_0)$ כאשר $x\to x_0^+$ עקב תכונת הרציפות של f ב-x_0. ואז מסנדוויץ', מתקבל שגם ביטוי הנגזרת של F שווה ל $f(x_0)$.