רעיונות שונים לפתירת אינטגרלים

אינטגרלים של פונקציות רציונאליות

דרך פעולה עיקרית: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$, אם $\deg P > \deg Q$ אז מחלקים P ב Q

(חילוק פולינומים כאשר רושמים את המנה ללא מכנה ואת השארית עם המכנה).

מפרקים לסכום של שברים חלקיים:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2(x^2+cx+d)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+cx+d)}$$

חישוב הצורות השונות של השברים החלקיים:

$\int \frac{A}{(x-a)^j}dx = \frac{(x-a)^{-j+1}A}{-j+1} + C$ (או $A\ln|x-a|+C$ כאשר $j=1$).

$$\int \frac{2x}{(x^2+a^2)^j}dx = \frac{(x^2+a^2)^{-j+1}}{-j+1} + C$$

$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^j}dx = a^{-2j+1}\int \cos^{2j-2} t dt$ (בעזרת ההצבה $x = a\tan t$).

- לפעמים הפולינום במכנה לא מתפרק לגורמים (אין לו שורשים) אבל ניתן לרושמו בצורה של: $(x\pm d)+a^2$ וכך להגיע לאינטגרל של $\arctan x$.

<u>דוגמא:</u> $\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{9}\int \frac{3dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + C$

<u>הערה:</u> מומלץ להציב $t=\frac{x+1}{3}$, $dx = 3dt$ לפני חישוב האינטגרל של $\arctan x$ כדי לא לשכוח את הנגזרת הפנימית שצריך לחלק בה (תתקבל אוטומאטית מהצבה במקום ה dx).

- לפעמים אפשר לפרק את הפולינום במכנה גם ע"פ חוקי כפל מקוצר כך שהוא יתפרק לגורמים פשוטים יותר.

<u>דוגמא:</u> $\int \frac{2x^2-2x-2}{x^3-x}dx = \int \frac{2x^2-2x-2}{x(x^2-1)}dx = \int \frac{2x^2-2x-2}{x(x+1)(x-1)}dx$

- כאשר מופיע באחד הגורמים במכנה פולינום ממעלה 2 שהוא בריבוע בנוסף, אז מופיע גורם ליניארי גם מעל המכנה ללא הריבוע וגם מעל המכנה עם הריבוע.

<u>דוגמא:</u> $\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x+1}$

- מציאת שורשים במהירות- x^2+ax+b , סכומם הוא a ומכפלתם- b (רק בפולינום מתוקן, ולחשב עם מינוס על כל שורש).

מונה כנגזרת המכנה

דרך פעולה עיקרית: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

- לפעמים המונה מורכב משני איברים שאחד מהם ניתן לרשום ככפולה של המכנה ואז אחרי צמצום יש שני איברים שרק אחד מהם עם המכנה, והוא יכול להיות מתאים לנגזרת.

<u>דוגמא:</u> $\int \frac{2x+3}{x+1}dx = \int \frac{2(x+1)+1}{x+1} = \int 2+\frac{1}{x+1} = 2x+\ln|x+1|+C$

- כאשר בודקים אם המונה הוא נגזרת המכנה, יש לבצע צמצום אפשרי עד הסוף, אחרת מתקבלות תוצאות שגויות.
- כאשר המונה והמכנה מאותה מעלה, ניתן לפעמים להוסיף ולהחסיר מהמונה כדי לקבל משהו שיצטמצם עם המכנה ואז מה שנשאר יתאים לנגזרת.

<u>דוגמא:</u> $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+2x}} \xrightarrow[dx=t\cdot dt]{t=\sqrt{1+2x}} = \int \frac{t}{1+t}dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt = \int 1-\frac{1}{t+1}dt = t-\ln|t+1|$

- כאשר יש e^x במכנה, זוהי גם הנגזרת ולכן אם הוא לא קיים במונה, לפעמים ניתן להכפילו במונה ובמכנה (הרחבת השבר) כך שזה יסתדר מבחינת הנגזרת.

<u>דוגמא:</u> $\int \frac{dx}{1+e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})}dx = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x+1)+C$

אינטגרציה בחלקים

דרך פעולה עיקרית: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

- ניתן להגיע לאינטגרל הזהה לאינטגרל שהתחלנו איתו ואז להעביר אותו אגף כדי להגיע לפיתרון.

<u>דוגמא:</u>

$$I = \int e^x \sin x dx \xrightarrow[u=\sin x,\ u'=\cos x]{v'=e^x,\ v=e^x} = e^x\sin x - \int e^x \cos x dx \xrightarrow[u=\cos x,\ u'=-\sin x]{v'=e^x,\ v=e^x} = e^x \sin x$$

$$\text{-e}^x\cos x - \int e^x \sin x dx = I \to I = \frac{1}{2}\left(e^x(\sin x-\cos x)\right)+C$$

- כאשר יש $\ln x / e^x$ אז בדרך כלל נגזור את ה $\ln$ ונטגרל את ה e^x.
- כאשר מופיעה פונקציה אחת בלבד שהנגזרת שלה ידועה, אז ניתן לגזור אותה ולטגרל את 1.
- <u>דוגמא:</u>

$$\int \arctan x dx \xrightarrow[u=\arctan x,\ u'=\frac{1}{1+x^2}]{v'=1,\ v=x} = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \ln(1+x^2)+C$$

נוסחאות נסיגה

$$\int \cos^n xdx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} xdx \qquad \int \sin^n xdx = \frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2} xdx - \frac{\cos \sin^{n-1} x}{n}$$

שימוש בנוסה זו פעם אחר פעם נותן לבסוף, ע"פ הזוגיות של n תוצאה שבה יש לחשב את האינטגרל $\int 1dx = x$ או את $\int \cos xdx = \sin x$.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k} \qquad I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \qquad I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k$$

אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות

דרך פעולה עיקרית: $\sin x$ בחזקה אי זוגית- $t=\cos x$ $\cos x$ בחזקה אי-זוגית- $t=\sin x$

סכום החזקות של $\sin x$ ו $\cos x$ ביחד הוא זוגי- $t=\tan x$ או $t=\cos x$

$$\left(t=\tan x \to \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

הצבה כללית שתמיד תעבוד: $t=\tan\frac{x}{2} \to \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

- במונה יש $\sin x/\cos x$ ובמכנה יש את הפונקציה השנייה, אז ניתן להציב t שווה לפונקציה במכנה כי זאת שבמונה תהיה הנגזרת הפנימית ולכן חלק מה dt.

  דוגמא: $\int \frac{\cos x}{10+\sin x}dx \xrightarrow[dt=\cos xdx]{t=\sin x} = \int \frac{dt}{10+t} = \ln(10+\sin x)+C$

- מכפלה של $\sin\cdot\cos$ אז כדאי להשתמש בזהויות טריגונומטריות של המכפלה המתאימה כדי להגיע לסכום במקום המכפלה (ואז ניתן לטפל בכל מחובר לחוד).

  <u>דוגמא:</u> $\int \sin 5x\cos xdx = \int \frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 4x)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos 4x + C$

- $\sin/\cos$ במכנה בחזקה אי-זוגית, אז ניתן להעלות את החזקה ע"י הכפלת מונה ומכנה. ואז במכנה ישנה חזקה זוגית וניתן להשתמש בזהות: $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ ולהפך. (ואז ניתן להמשיך כפי שעשינו עבור פונקציות שונות במונה ובמכנה).

  <u>דוגמא:</u> $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^2}dx \xrightarrow[dt=-\sin xdx]{t=\cos x} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$

- כאשר מופיע arc אז ניתן להציב x שווה לפונקציה ההפוכה שלו ($\sin/\cos/\tan t$).

  <u>דוגמא:</u> $\int x\arcsin x^2dx \xrightarrow[dx=\frac{\cos tdt}{2\sqrt{\sin t}}]{x^2=\sin t,\ x=\sqrt{\sin t}} = \int \sqrt{\sin t}\,\frac{t\cos t}{2\sqrt{\sin t}}dt = \frac{1}{2}\int t\cos tdt$

ביטויים עם שורשים

דרך פעולה עיקרית: הצבות טריגונומטריות:

$\sqrt{a^2-x^2}$ - $x=a\sin t$ או $x=a\cos t$

$\sqrt{a^2+x^2}$ - $x=a\tan t$ ולהשתמש בזהות: $1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$

$\sqrt{x^2-a^2}$ - $x=\frac{a}{\sin t}$ או $x=\frac{a}{\cos t}$

הצבת אויילר: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}dx$ - $t=\sqrt{x^2+b}+x$ $\quad dx=\frac{\sqrt{x^2+b}}{t}dt$

- ישנן כמה אפשרויות להצבות עם שורשים, לכל אחת מהן דוגמא:
- t שווה לכל מה שמתחת לשורש: (כאשר יש רק את השורש)

$$\int\sqrt{1+\sqrt{x}}dx \xrightarrow[dx=2(t-1)dt]{t=1+\sqrt{x}} =2\int\sqrt{t}(t-1)dt=2\int(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt=\frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}+C$$

t שווה לשורש כולו: (כאשר יש משהו נוסף בסכום עם השורש)

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+2x}} \xrightarrow[dx=t\cdot dt]{t=\sqrt{1+2x}} =\int\frac{t}{1+t}dt=\int\frac{1+t-1}{1+t}dt=\int 1-\frac{1}{1+t}dt=\sqrt{1+2x}-\ln(1+\sqrt{1+2x})$$

- כאשר יש כמה שורשים ממעלות שונות אז נציב x שווה ל t מחזקה מספיק גבוהה כך שכל השורשים ייעלמו. דוגמא:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} \xrightarrow[dx=6t^5dt]{t^6=x} =\int\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=\int\frac{6t^2}{1+t^2}dt=6\int 1-\frac{1}{1+t^2}dt=6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)$$

- ניתן להשלים לריבוע את הביטוי שמתחת לשורש כדי להגיע לאחת ההצבות הידועות.

דוגמא: $\int\sqrt{-6x-x^2}dx=\int\sqrt{9-(x+3)^2}dx \xrightarrow[dx=dt]{t=x+3} =\int\sqrt{9-t^2}dt$

אינטגרלים מיוחדים

- $x^{n-1}e^{x^n}$ במקרה כזה גוזרים את ה e^{x^n} ומתקנים את האינטגרל הקיים להיות הנגזרת שלו.

דוגמא: $\int x^2e^{x^3}=\frac{1}{3}\int 3x^2e^{x^3}=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$