הקדמה

פונקציות של משתנה ממשי יחיד

מושג הפונקציה:

הגדרה: תהיינה D, E שתי קבוצות של מספרים ממשיים. פונקציה F מ-D ל-E: $f:D\longrightarrow E$ הינה חוק מוגדר היטב וידוע מראש, אשר על-פיו מותאם לכל מספר $x\in D$ מספר יחיד $y\in E$.

- המשתנה x החל על המספרים ב-D נקרא **המשתנה הבלתי תלוי** והמשתנה y החל על המספרים ב-E נקרא **המשתנה התלוי**.

תחום ההגדרה הטבעי: קבוצת המספרים הממשיים הגדולה ביותר עבורם הפונקציה $f(x)$ מוגדרת.

תמונה: אם $f:D\longrightarrow E$ אזי: התמונה של f היא קבוצת כל המספרים $y\in E$ אשר קיים $x\in D$ כך ש: $f(x)=y$.

- ברוב המקרים הטווח של הפונקציה הוא "הרבה יותר גדול" מן התמונה.

פונקציה חסומה: נאמר שהפונקציה $y=f(x)$ חסומה מלמעלה בתחום D אם קיים מספר ממשי M כך ש: לכל $x\in D$, $f(x)\le M$. אומרים ש-M הוא **חסם מלעיל** של f(x). ההגדרה נכונה גם עבור חסם תחתון-m **חסם מלרע**.

נאמר ש-f חסומה כשהיא חסומה משני הצדדים: קיים M כך שלכל $x\in D$ $|f(x)|\le M$.

פונקציות זוגיות ואי-זוגיות:

הגדרה: תהי f(x) פונקציה בעלת תחום הגדרה D סימטרי ביחס לראשית הצירים:

$$\forall x\in\mathbb{R}: x\in D\longleftrightarrow -x\in D$$

פונקציה זוגית: f(x) זוגית מעל D אם $f(-x)=f(x)$.

פונקציה אי-זוגית: f(x) אי-זוגית מעל D אם $f(-x)=-f(x)$.

משפט: אם f(x) פונקציה המוגדרת מעל תחום סימטרי D, אזי ניתן להציג אותה כסכום של פונקציה זוגית עם פונקציה אי-זוגית.

משפט: הגרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר y. הגרף של פונקציה אי-זוגית סימטרי ביחס לראשית הצירים.

פונקציות מחזוריות:

הגדרה: פונקציה f(x) המוגדרת מעל תחום D נקראת מחזורית אם קיים מספר חיובי T כך שלכל x, אם $x\in D$ אז $x\pm T\in D$ ו-$f(x\pm T)=f(x)$. המספר T הקטן ביותר (אם הוא קיים) בעל תכונה זו נקרא **המחזור** של f(x).

פונקציות מונוטוניות:

הגדרה: תהי f פונקציה המוגדרת בתחום D_0 (תת-חום של D, תחום ההגדרה הטבעי או D).

נאמר ש-f(x) היא **מונוטונית עולה** בתחום D_0 אם:

$$\forall x_1 x_2 \in D_0 : x_1 \le x_2 \longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

נאמר ש-f(x) היא **מונוטונית עולה ממש** בתחום D_0 אם:

$$\forall x_1 x_2 \in D_0 : x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

נאמר ש-f(x) היא **מונוטונית יורדת** בתחום D_0 אם:

$$\forall x_1 x_2 \in D_0 : x_1 \le x_2 \longrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

נאמר ש-f(x) היא **מונוטונית יורדת ממש** בתחום D_0 אם:

$$\forall x_1 x_2 \in D_0 : x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

פונקציות הפוכות:

פונקציה חד-חד-ערכית: נאמר שהפונקציה $f : D \longrightarrow E$ היא **ח.ח.ע** אם:

לכל $y \in E$ קיים לכל היותר x אחד כך ש- y = f(x).

פונקציה על: פונקציה $f : D \longrightarrow E$ היא פונקציה מ-D **על** E, אם:

לכל $y \in E$ **קיים** $x \in D$ כך ש- y = f(x).

- כלומר, E היא התמונה של f מעל D.

פונקציה הפוכה: אם $f : D \longrightarrow E$ היא ח.ח.ע ו-על אז ניתן להגדיר $g: D \xrightarrow[on]{1-1} E$ ע"י

g(y) = x אם ורק אם f(x) = y.

זו הפונקציה ההפוכה שפועלת הפוך לפעולה של f ומסומנת ע"י: f^{-1}.

$$\forall x \in D : f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall y \in E : f(f^{-1}(y)) = y$$

דוגמא: $f(x) = x^2$ ו- $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

גרפים של פונקציות הפוכות: הגרף x = g(y) (כלומר- f^{-1}) הוא **השיקוף** של הגרף y = f(x) **ביחס לישר** y = x (וגם ההפך נכון).

הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

Arcsin x: הפונקציה sin x ח.ח.ע רק בקטע סגור באורך π למשל: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ בקטע הזה sin x היא מונוטונית עולה ממש. ז"א sin x היא פונקציה ח.ח.ע מ- $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ על [-1,1]. לכן בתחומים האלה קיימת פונקציה הפוכה שנקראת arcsin x.

Arccos x: באותו אופן, cos x היא ח.ח.ע ומונוטונית יורדת מ- [0, π] על [-1,1]. לכן קיימת פונקציה הפוכה שנקראת arcos x.

Arctan/cot x: הפונקציה tan x ח.ח.ע מ-(1,-1) על כל R. לכן קיימת הפונקציה ההפוכה. ובאותו אופן cot x היא ח.ח.ע מ-(0, π) על כל R.

	ArcSin x	ArcCos x	ArcTan x	ArcCot x
תחום הגדרה	[-1,1]	[-1,1]	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
תמונה	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	[-1,1]	$[0, \pi]$

פונקציות חסומות:

חסימות מלמעלה: פונקציה $f:A\longrightarrow B$ נקראת **חסומה מלמעלה/מלעיל** אם קיים מספר ממשי כך שלכל $x\in A$ מתקיים $f(x)\le M$.

חסימות מלמטה: באותו אופן פונקציה f נקראת **חסומה מלמטה/מלרע** אם קיים מספר ממשי m כך שלכל $x\in A$ מתקיים $f(x)\ge m$.

- פונקציה f נקראת חסומה אם היא חסומה משני הצדדים- $m\le f(x)\le M$ או: $|f(x)|\le M$.

גבולות

גבולות של פונקציות

מושג הגבול

הגדרה: תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה a, פרט אולי לנקודה a עצמה.
נאמר שיש ל-f גבול בנקודה a וערכו L אם:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta(\varepsilon)$ התלוי ב ε כך שלכל x המקיים: $0 < |x-a| < \delta$,

(כלומר, קיים $\delta > 0$ כך ש-f(x) מוגדרת בכל נקודה של הקטע $(a-\delta, a+\delta)$)

מתקיים: $|f(x)-L| < \varepsilon$.

(כלומר, y=f(x) עבור xה בקטע $(a-\delta, a+\delta)$ חסומה בקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$).

נסמן זאת ע"י $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

סביבה: סביבת δ של נקודה a היא קטע פתוח שהנקודה a היא במרכזו והרדיוס שלו הוא δ.

סביבה מנוקבת: אותו הקטע הפתוח אולם ללא הנקודה a עצמה נקרא סביבה מנוקבת של a.

- ובמונחים אלו נאמר: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ אם לכל סביבה של L (קטנה ככל שתהיה), קיימת סביבה נקובה של a שבה כל ערכי f נמצאים בסביבה זו של L.

הערה: בהגדרת הגבול f אינה חייבת להיות מוגדרת בנקודה a עצמה. החשיבות העקרונית בכך היא שמושג הגבול מתאר תופעה "דינמית": ההתנהגות של הפונקציה f כאשר ערכי x מתקרבים לנקודה a. אנו לא מתעניינים בערך של f בנקודה a, אלא רק בשאלה אם כאשר מתקרבים לנקודה a ערכיה מתקרבים למספר L.

דוגמאות לגבולות שימושיים:

$\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ (a>0)

$\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} x = a$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} c = c$

דוגמאות לפונקציות שאין להן גבול בנקודה a:

$\lim\limits_{x\to a} [x]$: לא קיים גבול עבור a שלם כי המספרים מצד אחד של a נמצאים ב"מדרגה" אחרת ולכן אין שאיפה של מספרים משני הצדדים של ה"גבול" כלומר, אין גבול. כאשר a לא-שלם $\lim\limits_{x\to a} [x] = [a]$.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$: ערך $\frac{1}{x}$ הולך וגדל ובאינסוף אין לsin גבול, הוא עושה אינסוף תנודות.

טענה: אם $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אז לכל K<L קיימת סביבה מנוקבת של a כך ש: לכל x באותה סביבה מתקיים: $K\le f(x)$, ולהפך- לכל L<K יש סביבה מנוקבת של a כך ש $f(x)\le K$.

(כלומר, אם K קטן מהגבול ישנם ערכי פונקציה שגדולים ממנו ואם הוא גדול מהגבול ישנם ערכי פונקציה שקטנים ממנו, בסביבה מנוקבת של a, כאשר נבחר ε קטן כמו למשל: L-K, ההפרש בין K לגבול).

טענה: אם הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים אז הוא יחיד. כלומר, אם $\lim_{x\to a} f(x)=L$ וגם $\lim_{x\to a} f(x)=K$ אז K=L.

טענה: אם קיים $\lim_{x\to a} f(x)$ אז קיימת סביבה נקובה של a שבה f חסומה. למשל, עבור ε בסביבת δ המתאימה -> $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$.

אריתמטיקה של גבולות

משפט: תהיינה f ו-g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מסוימת של a (פרט אולי לנקודה a עצמה) והמקיימות: $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)=M$, אזי הגבולות הבאים קיימים וניתנים ע"י הנוסחאות המתאימות:

1. $\lim_{x\to a}\alpha f(x)=\alpha L \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

2. $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} f(g)=L\pm M$

3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=[\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)]=LM$

4. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{L}{M}$

הערה: המשפט ההפוך אינו תקף: מתוך ידיעת הגבול של הפונקציה הסופית אי-אפשר להסיק כלום על רכיביה ועל איזה מתוך תוצאת הגבול הסופית, מתאים כגבול לאיזה פונקציה המרכיבה את הפונקציה הסופית.

גבולות חד-צדדיים

הגדרה: תהי f מוגדרת בקטע (a,b). נאמר כי L הוא גבול מימין של f בנקודה a אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים: $a<x<a+\delta$ מתקיים: $|f(x)-L|<\varepsilon$. סימון: $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$.

תהי f מוגדרת בקטע (b,a). נאמר כי L הוא גבול משמאל של f בנקודה a אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים: $a-\delta<x<a$ מתקיים: $|f(x)-L|<\varepsilon$. סימון: $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$

דוגמא: לפונקציה $f(x)=[x]$ יש גבולות חד-צדדיים גם בנקודות השלמות, והם שונים זה מזה:

אם a מספר שלם אז $\lim_{x\to a^+}[x]=a$ ואילו $\lim_{x\to a^-}[x]=a-1$.

טענה: לפונקציה f(x) קיים גבול L בנקודה x=a אם ורק אם קיימים הגבולות החד-צדדיים בנקודה זו ושניהם שווים ל-L.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=L \text{ וגם } \lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

הערה: "חוקי האריתמטיקה" של גבולות תקפים גם עבור גבולות חד-צדדיים.

גבולות אינסופיים

הגדרה: תהי f מוגדרת בקרן (a,∞). נאמר כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים K>a כך שלכל x>K מתקיים:

$|f(x)-L|<\varepsilon$.

אם f מוגדרת בקרן שמאלית $(-\infty,a)$ נגדיר $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים K<a כך שלכל x<K מתקיים:

$|f(x)-L|<\varepsilon$.

הגדרה: תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. נאמר ש $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ אם:

לכל מספר M קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים: $0<|x-a|<\delta$ מתקיים:

$M<f(x)$.

באופן דומה, נאמר ש $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ אם:

לכל מספר M קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים: $0<|x-a|<\delta$ מתקיים:

$f(x)<M$.

מינוח: $\lim_{x\to} f(x)$ קיים- יש גבול והוא סופי

$\lim_{x\to} f(x)$ קיים במובן הרחב- יש גבול והוא: $\infty/-\infty$/סופי.

כללי אריתמטיקה של גבולות במובן הרחב

- "חוקי האריתמטיקה" של גבולות תקפים גם עבור גבולות באינסוף.
- רוב הזמן, האינטואיציה בסדר, למשל: $\frac{\to 1}{\to\infty}=0$
- במקרה של מכנה $\leftarrow 0$: $\frac{\to 1}{\to 0^+}=\infty$ $\quad \frac{\to 1}{\to 0^-}=-\infty$
  - כאשר $f(x)\to 0$ מתקיים $\frac{1}{f(x)}\to\infty$ רק אם: $f(x)>0$.

- ישנה אי וודאות במקרים $0*(\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\infty-\infty$.

תכונות סדר של גבולות

משפט: תהיינה f ו-g מוגדרות בסביבה מנוקבת של a כך ש $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ו $\lim_{x\to a} g(x)=M$

1. אם $g(x)\le f(x)$ לכל x בסביבה אז: $M\le L$.
   - אם נדרוש אי-שוויון חריף $g(x)<f(x)$, לא נוכל להסיק כי $M<L$ אלא רק $M\le L$.
2. אם $L<M$ אז קיימת סביבה נקובה של a שבה מתקיים $f(x)<g(x)$.

הערה: נכון גם לגבולות חד-צדדיים, גבולות באינסוף וגבולות אינסופיים.

משפט הסנדוויץ'

אם שלוש הפונקציות f,g,h מוגדרות בסביבה נקובה של a ובסביבה זו $g(x)\le f(x)\le h(x)$.

ואם $\lim_{x\to a} h(x)=L$ וגם $\lim_{x\to a} g(x)=L$ אז: $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

$$\begin{array}{ccccc} g(x) & \le & f(x) & \le & h(x) \\ \searrow & & \downarrow & & \swarrow \\ & & L & & \end{array}$$

דוגמאות:

$\lim_{x\to 0}\cos x=1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}\sin x=0$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

קבוצות ופונקציות חסומות

*הרחבת מושג החסימות מפונקציות לקבוצות

הגדרה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ נקראת:

חסומה מלעיל- אם קיים M כך שלכל $x \in A$ מתקיים: $x \le M$

חסומה מלרע- אם קיים m כך שלכל $x \in A$ מתקיים: $m \le x$

חסומה- אם היא חסומה מלעיל וגם מלרע: $m \le x \le M$

סופרמום: חסם המלעיל הקטן ביותר של הקבוצה- supA/ $\sup_{x \in A} x$.

מקסימום: סופרמום שגם שייך לקבוצה- maxA/ $\max_{x \in A} x$.

אינפימום: חסם המלרע הגדול ביותר של הקבוצה- InfA/ $\inf_{x \in A} x$.

מינימום: אינפימום שגם שייך לקבוצה- mina/ $\min_{x \in A} x$.

פונקציות: הטרמינולוגיה לפונקציות מתקבלת כאשר משתמשים במונחים אלה עבור התמונה שלהן. כך למשל M הוא חסם מלעיל של הפונקציה f בתחום D אם הוא חסם מלעיל של הקבוצה $\{f(x) \mid x \in D\}$. הסופרמום יסומן ב: $\sup_D f$ או- $\sup_{x \in D} f(x)$ ושאר הסימונים בהתאם.

דוגמאות:

- (a,b] חסומה מלעיל ע"י b ומלרע ע"י a. יש מקסימום בx=b והמינימום לא קיים
- $\mathbb{N}$ חסומה מלמטה ע"י 0 שהוא המינימום אבל לא קיים סופרמום לקבוצה.

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים החסומה מלמעלה/למטה קיים סופרמום/אינפימום.

טענה: M=supA אם מתקיים:

1. לכל $x \in A$ $x \le M$ (כלומר, M הוא חסם מלעיל)
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_0 \in A$ כך ש: $M - \varepsilon < x_0$ (כל דבר קטן מM כבר אינו חסם מלעיל).

משפט: תהי f פונקציה מונוטונית בקטע I. אז הגבולות החד-צדדיים של f קיימים בכל נקודה בקטע.

הערות:

- משפט דומה נכון גם כאשר I קרן והגבול הוא ב ∞ או $-\infty$.
- כאשר f מונוטונית ואינה חסומה בסביבה חד-צדדית של נקודה a, אז יש לה גבול חד-צדדי אינסופי בנקודה ($\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$).

סדרות של מספרים ממשיים

סדרה: אוסף אינסופי מסודר של מספרים (באופן פורמלי ניתן להתבונן על סדרה כעל פונקציה מהמספרים הטבעיים למספרים הממשיים).

גבולות של סדרות

הגדרה: נאמר ש $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (או $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$) אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים: $|a_n - L|<\varepsilon$.

הערות:

- לכל $0<\varepsilon$ יש לכל היותר מספר סופי של איברי הסדרה מחוץ לסביבת ε של L.
- שינוי (כולל הוספה או מחיקה) של מספר סופי מאיברי הסדרה לא משנה קיום גבול או את ערכו.
- הדרישה ש N טבעי אינה חיונית, ולפעמים לא נקפיד על כך.

גבולות אינסופיים

הגדרה: נאמר ש $\lim_{x\to\infty} a_n = +\infty$ אם לכל $k<0$ קיים N טבעי כך שלכל $N<n$, $a_n<k$.

הגדרה: נאמר ש $\lim_{x\to\infty} a_n = -\infty$ אם לכל $0<k$ קיים N טבעי כך שלכל $N<n$, $k<a_n$.

אריתמטיקה של גבולות

משפט: אם $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$ שתי סדרות המקיימות $\lim a_n = L$ ו- $\lim b_n = M$, אז קיימים הגבולות:

1. $\alpha a_n = \alpha L,\ \forall L\in\mathbb{R}$
2. $\lim(a_n+b_n) = L+M$
3. $\lim(a_n b_n) = LM$
4. $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{M}$ (בתנאי ש- $M\neq 0$).

הערה: אריתמטיקה של גבולות אינסופיים אנלוגית גם היא לגבולות של פונקציות (עם אותה התייחסות זהירה עבור $\frac{1}{a_n}$ כאשר $a_n\to 0$ ולגבולות לא מוגדרים מהצורה $\infty-\infty$ או $\frac{\infty}{\infty}$ וכו').

תכונות סדר של גבולות

משפט:

- כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

תהיינה a_n ו b_n שתי סדרות המקיימות: $a_n \to L$, $b_n \to M$,

- אם קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים: $a_n \leq b_n$, אז: $L \leq M$.
- אם $L < M$ אז: קיים N כך שלכל כך שלכל $n \geq N$ מתקיים: $a_n \leq b_n$.

הערה: מהמשפט נובע שגבול של סדרה נקבע באופן יחיד (ע"פ המשפט השני אם $a_n \to L$ וגם $a_n \to M$ אז עם $a_n = b_n$ נקבל: $a \leq b$ וגם $b \leq a$ ולכן $a = b$).

משפט סנדוויץ':

אם 3 הסדרות הבאות מקיימות $a_n \leq b_n \leq c_n$ (החל ממקום N מסוים) כך ש- $\lim a_n = \lim c_n = L$ אז הגבול $\lim b_n$ קיים וערכו שווה ל L. אם $a_n \leq b_n$ ו- $\lim a_n = \infty$ אז גם $\lim b_n = \infty$.

משפט השורש הn-י: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

סדרות מונוטוניות

משפט: סדרה מונוטונית וחסומה- מתכנסת לגבול סופי

הערות:

- אם סדרה היא מונוטונית עולה היא חסומה מלרע ע"י a_1 ולכן, אם היא גם חסומה מלעיל אז היא מתכנסת ל $\sup a_n$.
- לסדרה מונוטונית תמיד יש גבול במובן הרחב (אם אינה חסומה מלעיל: $+\infty$ ואם אינה חסומה מלרע: $-\infty$).

הגבול המפורסם השני: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$,

לכל מספר α מתקיים: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e$, ובאופן כללי: $\lim_{x\to\infty}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^x$

טענה: לכל סדרה $x_n \to x$ (רציונאלית או לא, מונוטונית או לא) מתקיים: $a^{x_n} \to a^x$, $0 < a \neq 1$.

למה: אם $\{a_n\}$ סדרה עולה ו $\{b_n\}$ סדרה יורדת וגם $a_n \le b_n$ לכל n אז: שתי הסדרות מתכנסות (a_n חוסמת מלמטה את b_n שחוסמת אותה מלמעלה).

ואם גם: $\lim(b_n - a_n) = 0$ אז הגבולות שלהם שווים.

הלמה של קנטור:

יהיו $I_n = [a_n, b_n]$ קטעים סגורים כך שכל קטע סגור I_{n+1} מוכל בתוך I_n ($\forall n \ \ ,I_{n+1} \subseteq I_n$).

אז חיתוך כל הקטעים האלה הוא אינו ריק ($\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \varnothing$).

ואם גם אורך כל הקטעים האלה שואף ל0, אז החיתוך מכיל נקודה יחידה.

הסבר ההוכחה:

ע"פ תנאי ההכלה, הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית עולה ו $\{b_n\}$ מונוטונית יורדת. הסדרות גם חסומות כי הן מוכלות בקטע I_1 ולכן הן מתכנסות. נסמן: $\lim a_n = A$ ו- $\lim b_n = B$.

נקבע n ואז לכל $n < k$ מתקיים: $a_k \in I_n$. קטע זה הוא סגור ולכן גם גבול הסדרה A נמצא בקטע (אם הקטע לא היה סגור, הגבול יכול היה להיות אחד הקצוות שאולי אינו שייך לקטע).
בגלל שזה נכון לכל n אז A בכל קטע כזה ולכן החיתוך אינו ריק. באותו אופן מראים לגבי B ולכן כל הקטע $[A, B]$ מוכל בחיתוך (שהוא למעשה בדיוק הקטע הזה).

אם אורכי הקטעים שואפים לאפס, כלומר $a_n - b_n \to 0$ אז A=B וזוהי גם הנקודה היחידה בחיתוך.

תת-סדרות

הגדרה: תהא $\{a_n\}$ סדרה נתונה, תת-סדרה של $\{a_n\}$ היא סדרה שאיבריה הם חלק מאיברי הסדרה המקורית כשהם מופיעים באותו הסדר כמו בסדרה המקורית. **סימון:** $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כאשר $n_1 < n_2 < \ldots$ מייצגים את המיקומים בסדרה המקורית. לכל k מתקיים ש $k \le n_k$.

גבול חלקי:

- L הוא גבול חלקי של הסדרה $\{a_n\}$ אם קיימת ת"ס של $\{a_n\}$ המתכנסת ל L.
- L הינו גבול חלקי של הסדרה $\{a_n\}$ אם"ם לכל $0 < \varepsilon$, הקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ מכיל אינסוף מאיברי $\{a_n\}$.

טענה: אם הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת לגבול L (סופי או אינסופי), אז גם כל תת-סדרה שלה מתכנסת ל L. בפרט, אם יש לסדרה שתי ת"ס המתכנסות לגבולות שונים, אז היא איננה מתכנסת.

משפט בולצאנו-ויירשטראס:

לכל סדרה חסומה $\{a_n\}$ יש תת-סדרה מתכנסת.

לסדרה שאינה חסומה מלעיל יש ת"ס שמתכנסת ל $+\infty$

לסדרה שאינה חסומה מלרע יש ת"ס שמתכנסת ל $-\infty$

הגדרה: תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה. הגבול העליון שלה הוא: $\sup\{L \mid \text{הוא גבול חלקי של הסדרה } L\}$

(שזה הסופרמום של קבוצת הגבולות החלקיים) **סימון:** $\limsup a_n$ או $\overline{\lim} a_n$

הגבול התחתון מוגדר באופן דומה. **סימון:** $\liminf a_n$ או $\underline{\lim} a_n$.

טענה: גם הגבול העליון של סדרה, הוא בעצמו גבול חלקי שלה (כלומר- הגבול העליון הוא המקסימום של קבוצת הגבולות החלקיים).

סדרות קושי

לא תמיד קיימים הכלים למציאת גבול, אך ניתן לתת אפיון לסדרות מתכנסות ללא כל התייחסות לגבול שלהן.

הגדרה: סדרה $\{a_n\}$ נקראת סדרת קושי (או סדרה המקיימת את תנאי קושי) אם

לכל $0<\varepsilon$ קיים N טבעי כך שלכל $N \le n,m$ מתקיים: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

משפט קושי: סדרה $\{a_n\}$ מתכנסת אם"ם היא סדרת קושי

הערות:

- העובדה שסדרה מתכנסת מקיימת את תנאי קושי היא מאוד אינטואיטיבית: אם אברי הסדרה קרובים למספר קבוע L אז הם בהכרח קרובים זה לזה. בכיוון ההפוך- לא ייתכן שאברי הסדרה יהיו קרובים זה לזה מבלי שהדבר ינבע מזה שהם כולם קרובים לאיזשהו מספר קבוע.
- תנאי קושי מתייחס לכל $N \le n,m$ ולכן אי-אפשר להסתפק בכך שהמרחק בין איברים עוקבים הוא קטן כרצוננו.

הקשר בין גבול של פונקציות לגבול של סדרות

הגדרת הגבול לפי היינה:

תהי f מוגדרת בסביבה נקובה של a.

אם לכל סדרת נקודות $x_n \ne a$ המקיימת $x_n \to a$ מתקיים ש $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$

אז גם: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (ולהפך $\leftrightarrow$).

הערה: באופן דומה, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם"ם לכל סדרה x_n המקיימת $x_n \to \infty$,

מתקיים ש- $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

פונקציות רציפות

הגדרה ותכונות יסודיות

הגדרה: תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של a (כולל בנקודה a עצמה).

נאמר ש f רציפה בנקודה a אם הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים ושווה ל $f(a)$.

בלשון $\varepsilon-\delta$:

לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל x המקיים $|x-a|<\delta$, מתקיים: $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

בלשון סדרות:

לכל סדרה $\{x_n\}$ כך ש- $x_n \to a$, מתקיים: $f(x_n)\to f(a)$.

דוגמאות:

$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$ וכנ"ל לגבי: $f(x)=x,\ f(x)=|x|,\ f(x)=c$.

רציפות מימין/משמאל: נאמר ש f רציפה מימן בנקודה a אם $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

נאמר ש f רציפה בקטע אם היא רציפה בכל נקודה פנימית בו, ורציפה מימין או משמאל בנקודות הקצה שלו (אם הן שייכות לקטע).

דוגמאות: $f(x)=[x]$ רציפה בכל נקודה a שאיננה מספר שלם.

משפט:

1. אם f ו- g רציפות בנקודה a אז גם: $\frac{f}{g},\ fg,\ f+g,\ \alpha f$ $(g(a)\neq 0)$ רציפות ב a.
2. אם g רציפה ב a ו f רציפה ב $g(a)$ אז $f\circ g$ רציפה ב a.
3. אם f מונוטונית ממש בקטע, אז קיימת לה שם פונקציה הפוכה f^{-1}, ואם f רציפה בקטע אז גם f^{-1} רציפה ומונוטונית ממש.

מהמשפט נובע:

- כל פונקציה טריגונומטרית רציפה בכל נקודה בתחום ההגדרה.
- כל פונקציה אלמנטארית היא רציפה בכל נקודה בתחום ההגדרה.

למה: אם f רציפה ב a ו $0<f(a)$ אז:

קיימת סביבה של a שבה $0<f(x)$ לכל x. (ולהפך עבור $f(a)<0$).

(רק אם פונקציה אינה רציפה, אז ערך הפונקציה ב a יכול להיות שונה מסביבתו. אם היא רציפה ערכי הפונקציה בסביבת a מאוד קרובים ל- $f(a)$.

מיון סוגי אי-רציפות

אי רציפות סליקה: ל f יש נקודת אי-רציפות סליקה ב-a אם קיים $\lim_{x\to a} f(x)$ אך או שהוא אינו שווה ל $f(a)$ או ש-f אינה מוגדרת כלל בנקודה a.

אי רציפות מסוג קפיצה: אם שני הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ו-$\lim_{x\to a^-} f(x)$ קיימים אך שונים זה מזה. נקודות קפיצה נקראות לעיתים נקודות אי-רציפות מסוג ראשון.

אי רציפות עיקרית: ל f יש אי-רציפות עיקרית אם לפחות אחד משני הגבולות החד-צדדיים בנקודה a אינו קיים. נקודות אי רציפות עיקריות נקראות לעיתים נקודות אי-רציפות מהסוג השני.

משפט: תהי f פונקציה מונוטונית ומוגדרת בקטע. אז נקודות אי-הרציפות שיכולות להיות לה הן רק מסוג קפיצה.

(הסיבה היא שהוכחנו שלמונוטונית יש בכל נקודה בקטע גבולות חד-צדדיים- הגדרת אי רציפות-קפיצה).

פונקציות רציפות בקטע סגור

משפט ערך הביניים: תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, ויהי γ מספר כלשהו בין $f(a)$ ל- $f(b)$. אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f(c)=\gamma$.

דוגמאות:

- לכל פולינום ממעלה אי-זוגית קיים לפחות שורש אחד.
- התמונה של קטע ע"י פונקציה היא קטע.

שיטת חישוב לפתרון מקורב: הוכחת המשפט נותנת למעשה "שיטת חישוב" למציאת פתרון מקורב למשוואה $f(x)=\gamma$ ע"י אלגוריתם של חציית הקטע.

דוגמא לשימוש בשיטה: $f(x)=x^5+x^3+1$.

f רציפה ב $[-1,0]$ (היא פולינום- פונקציה אלמנטארית). $f(-1)<0<f(0)$ ולכם ע"פ עה"ב קיים $-1<c<0 \longleftarrow f(c)=0$. אז השגיאה קטנה מ-1 כי היא קטנה מהמרחק בין קצוות הקטע. אם ניקח את אמצע הקטע אז ע"פ עה"ב קיים $-1<c<-\frac{1}{2} \longleftarrow f(c)=0$ וכאן השגיאה היא קטנה מ $\frac{1}{2}$ וכן הלאה, אם נמשיך לחלק n פעמים לחצי אז השגיאה תהיה קטנה מ: $\frac{1}{2^n}$. או בצורה כללית יותר: $|c-f(a)|<\frac{|b-a|}{2^n}$.

טענה: אם f רציפה וחח"ע בקטע $[a,b]$ אז היא מונוטונית בו ממש.

משפט ויירשטראס:

תהי f פונקציה רציפה בקטע <u>סגור</u> $[a,b]$ אז:

1. הפונקציה חסומה בקטע $[a,b]$.
2. קיימים ל f מקסימום ומינימום בקטע.

הערה: הרציפות בקטע סגור <u>חיונית</u> כדי שנוכל לומר שה sup הוא max, כלומר- בנקודה של ה sup הפונקציה צריכה להיות מוגדרת.

גזירות

נגזרות

הגדרות ותכונות בסיסיות

הגדרה: תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה a. היא גזירה בנקודה a אם הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ קיים וסופי. נסמן את הגבול ב $f'(a)$ ונקרא לו: הנגזרת של f בנקודה a.

סימונים נוספים: לפעמים נרשום את הנגזרת כגבול: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

מנת ההפרשים בהגדרה הראשונה מסומנת לעיתים ע"י $\frac{\Delta f}{\Delta x}/\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (והנגזרת בהתאמה: $\frac{df}{dx}/\frac{dy}{dx}$).

באופן אינטואיטיבי: אם פונקציה גזירה בנקודה מסוימת אז הגרף שלה "חלק" שם ואין לו "חוד" בנקודה.

ההגדרה תקפה גם לגבי נגזרות חד-צדדיות כאשר קיימים הגבולות החד-צדדיים בנקודה.

דוגמאות:

$$f(x)=c \longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=0,\quad f(x)=x \longrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x-a}{x-a}=1,$$

$f(x)=|x|$ - לא קיים גבול ב $x=0$ כי הגבולות החד צדדיים של הנגזרת הם שונים ("חוד" בגרף)

נגזרות חשובות:

$$\cot'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}\qquad \tan'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\qquad \cos'(x)=-\sin x\qquad \sin'(x)=\cos x$$

$$\arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad \arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\qquad \ln'(x)=\frac{1}{x}=\ln^{(n)}(x)$$

$$arc\cot'(x)=\frac{-1}{1+x^2}\qquad \arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

טענה: אם f גזירה ב- a אז היא רציפה בנקודה (אך ההפך לא נכון, רציפות לא גורר גזירות).

אריתמטיקה של נגזרות:

תהיינה f ו- g פונקציות גזירות בנקודה a, אז גם הפונקציות הבאות גזירות ב a:

1. $(\alpha f)'=\alpha f'$
2. $(f+g)'=f'+g'$
3. $(fg)'=f'g+fg'$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$, $(g(a)\neq 0)$

גזירה של פונקציה מורכבת

כלל השרשרת:

אם g גזירה ב- a ו- f גזירה ב- $g(a)$ אז: $f\circ g(x)=f(g(x))$ גזירה ב- a ונגזרתה נתונה ע"י הנוסחה: $(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot f'(a)$ ($f'(a)$ - נקראת הנגזרת הפנימית).

שימושים לכלל השרשרת:

1. גזירה לוגריתמית- $\ln$ על שני אגפים המשוואה כאשר רוצים לגזור פונקציות מעריכיות.
2. קצבים קשורים: לעיתים הקשר בין x ל- y אינו נתון בצורה ישירה, אלא באמצעות קשר למשתנה שלישי t. כלל השרשרת מהווה כלי לחישוב הנגזרת $\frac{dy}{dt}$ מבלי שנצטרך למצוא תחילה נוסחה מפורשת של y במונחים של t.

הנגזרת של הפונקציה ההפוכה

משפט: תהי f הפיכה בקטע I (חח"ע) נסמן: $f^{-1}(a)=x$.

אם: $f'(x)\neq 0$ וגזירה ב- x אז f^{-1} גזירה ב a ומתקיים: $f^{-1}(a)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$

הערה: אם $f'(x)=f'(f^{-1}(a))=0$ אז $f^{-1}{}'(a)$ לא קיים (לא ניתן לחלק ב-0 בנוסחה).

המשיק והקירוב הליניארי

הגדרה: אם f גזירה ב- a, אז המשיק לגרף של f בנקודה a הוא הישר שעובר דרך $(a,f(a))$ ושיפועו $f'(a)$. **משוואת המשיק:** $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.

הסבר: אם f רציפה ב- a אז ערכי f מאוד "קרובים" ל $f(a)$ כאשר x "קרוב" ל- a. נקרב: $f(x)\approx f(a)$ ולכן: $f(x)=f(a)+e(x)$ כאשר $e(x)$ הוא השגיאה בהערכת $f(x)$ ע"י הקבוע $f(a)$. כאשר x קרוב ל- a השגיאה קטנה: $\lim_{x\to a}e(x)=0$.

אם f גזירה ב- a אז ניתן לחשב גם קירוב כזה ל f: $f(x)=\left(f(a)+f'(a)(x-a)\right)+\alpha(x)$ כאשר $\alpha(x)$ הינו השגיאה בקירוב f ע"י הישר המשיק.

במקרה זה, לא רק שאכן מתקיים: $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$ אלא שהשאיפה לאפס היא מאוד מהירה: $\alpha(x)$ מתקרב ל-0 יותר מהר ממה ש x מתקרב ל a ולכן השגיאה היא מסדר גודל קטן יותר מאשר הקרבה של x ל- a.

<u>הערה:</u> המשיך לפונקציה הוא הישר <u>היחיד</u> שנותן קירוב ל- f עם שגיאה $\alpha(x)$ המקיימת:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\left(f(a)+f'(a)(x-a)\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{x-a}=0.$$

<u>נגזרות מסדר גבוה</u>

חוקי גזירה של נגזרות מסדר גבוה נובעים באופן ישיר מהנוסחאות עבור נגזרת מסדר ראשון,

1. $(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$.
2. למכפלה מקבלי נוסחה קצת יותר מסובכת: $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$
3. מוגדר: $f^{(0)}(x)=f(x)$
4. אין נוסחה פשוטה לנגזרות מסדר גבוה של מנה.

תכונות של פונקציות גזירות

נקודות קיצון מקומי

הגדרה: נאמר כי לפונקציה f המוגדרת בקטע I יש מקסימום מקומי ב- x_0 אם קיימת סביבה של x_0 המוכלת ב I כך שלכל x בסביבה יתקיים: $f(x) \le f(x_0)$.
(בניגוד לנקודת קיצון גלובלי שבה זה מתקיים לכל x בקטע שבו מוגדרת הפונקציה ולא רק בסביבה הקרובה).

משפט פרמה: תהי f מוגדרת בקטע I וגזירה בנקודה פנימית בקטע- x_0, ואם x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f אז $f'(x_0)=0$ (המשפט אינו פועל לכיוון השני, אם הנגזרת מתאפסת, זוהי אינה בהכרח נקודת קיצון מקומי).

הערות:

- נקודות קיצון מקומי יכולות להיות רק נקודות שבהן $f'=0$ ונקודות שבהן f' לא קיימת.
- המשפט יעיל במציאת נקודות ה"חשודות" להיות נקודות קיצון גלובליות: נקודות הקצה של הקטע (אם f מוגדרת בקטע סגור), נקודות בהן f איננה גזירה ונקודות פנימיות שבהן הנגזרת מתאפסת. בד"כ נוכל למצוא את נקודות הקיצון ע"י השוואה פשוטה בין ערכי הפונקציה המתקבלים בנקודות אלה.
- לפני שמפעילים את ה"חיפוש" הנ"ל יש לבדוק שקיימות נקודות קיצון. הקיום נובע בד"כ ממשפט ויירשטראס, באופן ישיר או בעזרת נימוקים נוספים.

רול ולגרנג'

משפט רול: תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, גזירה בקטע הפתוח (a,b) ומקיימת: $f(a)=f(b)$. אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=0$.

הסבר להוכחה: מאחר ו f רציפה בקטע סגור אז יש לה בקטע גם מקסימום וגם מינימום גלובליים ע"פ ויירשטראס. ולפחות אחד מהם מתקבל בנקודה פנימית בקטע ובנקודה זו הנגזרת מתאפסת.

משפט לגרנג': תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ שקול ל: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

הערה: באופן גיאומטרי הכוונה היא שיש נקודה שבה המשיק לגרף מקביל למיתר המחבר את הנקודות $(a,f(a))$ ו- $(b,f(b))$ (ומשפט רול היה המקרה הפרטי שהמיתר הזה הוא אופקי).

משפט: תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור וגזירה בנקודות פנימיות שלו, אזי:

1. אם $f'\equiv 0$ אז f פונקציה קבועה.
2. אם $f'\geq 0$ אז f מונוטונית עולה (ואם $f'\leq 0$ היא יורדת).
3. אם $f'>0$ אז f מונוטונית עולה ממש (ואם $f'<0$ היא יורדת ממש).

הערות:

- עבור (1) ו(3) נכונים גם המשפטים ההפוכים.
- בחלקים (2) ו(3) ניתן להחליש את התנאי ולדרוש את קיומו לכל הפונקציה פרט אולי למספר סופי של נקודות (שבהן f' אולי אפילו לא קיימת).
- המשפט מאוד שימושי בהוכחת אי-שוויונים.

תנאי מספיק לנקודת קיצון

התאפסות הנגזרת זה אינו תנאי מספיק לנקודות קיצון, להלן תנאים מספיקים אך לא הכרחיים:

משפט: תהי f מוגדרת ורציפה בסביבת x_0 כך ש- f עולה משמאל ל x_0 ויורדת מימין לה. אז יש ל f מקסימום מקומי ב- x_0. בפרט הדבר נכון אם f גזריה בסביבה כך ש $f'\geq 0$ בסביבה שמאלית של x_0 ו- $f'\leq 0$ בסביבה ימנית שלה.

משפט: אם f גזירה פעמיים ב x_0 ומקיימת: $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ אז x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f. מקסימום מקומי אם $f''(x_0)<0$ ומינימום מקומי אם $0<f''(x_0)$.

הערה: יכולה להיות נקודת קיצון מקומי גם אם $f''(x_0)=0$.

בעיות מינימום-מקסימום ואי-שוויונים

טענה: תהי f רציפה בקרן $[0,\infty)$ כך ש- $f(0)=\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. אז f מקבלת מקסימום גלובלי בקרן.

הסבר להוכחה: מראים ש f רציפה בקטע סגור $[0,k]$ ולכן ע"פ ווירשטראס היא מקבלת שם מקסימום ואז מראים שזהו גם המקסימום בכל הקרן.

כלל לופיטל

משפט: תהיינה f ו- g פונקציות מוגדרות וגזירות בסביבה מנוקבת של a המקיימות:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.
2. $g'(x)\neq 0$ בסביבה המנוקבת של a.
3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים ושווה לL.

אז: גם הגבול $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה ל-L.

הערות:

- מתקיים גם כאשר: $f\to\pm\infty$, וגם: $g\to\pm\infty$ במקום $x\to a$ אפשר: $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to a^+$, $x\to a^-$.
- לפעמים הכלל אינו עוזר, כי גבול מנת הנגזרות אינו קיים. אך גם במקרה זה, ייתכן שגבול מנת הפונקציות כן קיים וניתן לחישוב בדרך אחרת.
- כלל לופיטל נכון רק כאשר הוא נחוץ באמת: כלומר כאשר הגבול $\frac{f}{g}$ הוא מהצורה: $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$. בכל השאר המקרים נחשב את הגבול באופן ישיר בלי להשתמש בכלל לופיטל. שימוש במשפט במקרים כאלה יכול אפילו לתת לתוצאות לא נכונות.
- ניתן להפעיל את לופיטל גם כדי לחשב את מנת הנגזרות אם גם ערכיהן שווים ל0.
- כאשר מנסים לחשב גבול באמצעות לופיטל, יש למצוא מהי הדרך ה"טובה ביותר" להציג את הביטוי הנתון כשבר מהצורה $\frac{f}{g}$.

סדרי גודל וקצב התכנסות של פונקציות

אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, אז f שואף לאינסוף מהר יותר מ g.

אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ אז g שואף לאינסוף מהר יותר מ f.

אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ (קבוע) אז הן שואפות לאינסוף באותו קצב: אותו סדר-גודל.

באופן כללי: $\ln x<x^\alpha<e^x$ (מעריכית > פולינום > לוגריתמית).

קמירות

פונקציות קמורות

הגדרה גיאומטרית: f קמורה בקטע I אם כל מיתר המחבר איזשהן שתי נקודות על הגרף שלה נמצא כולו מעל הגרף. f תיקרא קעורה אם המיתרים נמצאים מתחת לגרף הפונקציה.

הגדרה אנליטית: f קמורה בI אם לכל $x_1,x_2\in I$ מתקיים:

$f(tx_1+(1-t)x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ כאשר $tx_1+(1-t)x_2$ היא נקודה על גרף הפונקציה שנמצאת בין שתי הנקודות, וערכה קטן מהמיתר המחבר בין שתי הנקודות.

(אי שוויון הפוך מתקיים לקעורה)ץ

הערה: אם יש אי-שוויון חריף אז הפונקציה היא קעורה/קמורה ממש.

ניסוח שונה להגדרה: f קמורה בI אם לכל $x_1,x_2\in I$ ולכל $0\le\lambda_1,\lambda_2$ המקיימים: $\lambda_1+\lambda_2=1$

מתקיים: $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$

ובהכללה: f קמורה בI אם לכל n מתקיים: $x_1,\dots,x_n\in I$ ו-1 $0\le\lambda_1+\dots+\lambda_n=1$ המקיימים:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)$$

משפט:

1. תהי f קמורה בקטע I אז היא רציפה בכל נקודה פנימית של הקטע.
2. תהי f גזירה בקטע I אז f קמורה בI אם ורק אם לכל $a\in I$ המשיק לפונקציה בנקודה a נמצא כולו מתחת לגרף שלה, כלומר: $f(x)\ge f(a)+f'(a)(x-a)$ לכל $x\in I$.
3. תהי f גזירה בקטע I אז f קמורה בI אם ורק אם f' עולה בI (וקמורה ממש אם הנגזרת עולה ממש).
4. תהי f גזירה פעמיים בקטע I אז: f קמורה בI אם ורק אם $f''(x)\ge0$ לכל $x\in I$ (וקמורה ממש אם זה אי-שיוורין חריף).

הערה: פונקציה קמורה איננה חייבת להיות גזירה וכאשר אינה גזירה, לא נוכל להשתמש בקריטריונים הנעזרים בגזירות.

שרטוט גרפים:

נקודת פיתול: תהי f מוגדרת בסביבה נקודה של a. נאמר שa היא נקודת פיתול של f אם יש בנקודה מעבר בין תחום קמירות של הפונקציה לתחום קעירות שלה.

הערה: אם f גזירה פעמיים ו- f'' משנה סימן בa אז a נקודת פיתול, ובהכרח $f''(a)=0$. זו הגדרה גיאומטרית, ואין צורך כלל שf תהיה מוגדרת, רציפה או גזירה בנקודה.

נוסחת טיילור

פולינום טיילור (בהמשך נראה טור טיילור= פולינום עם אינסוף איברים) מגיע כדי לעזור לנו לחשב ערכים של פונקציה. הפולינום נותן לנו דרך מעשית לחשב ערך של כל פונקציה, בכל נקודה, בשגיאה שמתאימה לנו (כלומר- אנו יכולים לקבוע את מידת הדיוק שנקבל). הרעיון הוא שכל פונקציה (שהיא מספיק חלקה, כלומר גזירה) ניתנת לכתיבה ע"י סכום של חזקות.

הגדרה: תהי f גזירה n פעמים בa. פולינום טיילור ממעלה n של f המתאים לנקודה a הוא הפולינום:

$$T_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

הערה: בפולינום טיילור של פונקציות זוגיות יופיעו חזקות זוגיות בלבד (וכנ"ל לגבי אי-זוגיות). כמו-כן- אם f זוגית אז f' אי-זוגית ולהפך.

טענה: תהי f גזירה n פעמים בa ויהי T_n פולינום טיילור שלה. אז ערכי T_n ו-f וכן ערכי נגזרותיהם עד סדר n מתלכדים בנקודה a, כלומר, $T_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$ לכל: $k\le n$.

הסבר: כאשר $x=a$ כל הביטוי מצטמצם מלבד $f^{(k)}(a)$.

שארית מסדר n: ההפרש בין ערך הפונקציה לפולינום המקרב אותה: $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$

משפט השארית של לגרנז': תהי f פונקציה גזירה $n+1$ בסביבת הנקודה a, אז לכל נקודה x בסביבת a קיימת נקודה c בין x ל-a כך ש: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

הערה: עבור $n=0$ זהו משפט לגרנז' הרגיל- $f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$ ו $f(a)\equiv T_0(x)$ ולכן: $R_0(x)=f'(x)(x-a)$.

הצגת השארית בצורת פיאנו: תהא $f(x)$ גזירה n פעמים בנקודה x_0, אז פונקצית השארית מקיימת: $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$ (השארית מסדר n שואפת ל0 יותר מהר מאשר הפולינום בסביבת x_0 מאותו הסדר). דרך נוספת להצגת השארית: $R_n(x)=\varepsilon(x)(x-x_0)^n$ כאשר $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

דוגמא:

נחשב את e עם שגיאה הקטנה מ 10^{-3}. $f(x)=e^x$ ונחפש קירוב ל: $f(1)=e$ בעזרת פולינומי טיילור של f שמתאימים ל $a=0$.

כלומר, צריך למצוא n כזה שיתקיים: $|R_n(1)|<10^{-3}$ ->$|R_n(1)|=\left|\frac{e^c}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}\right|<10^{-3}$

הנקודה c אינה ידועה, רק ידוע שהיא נמצאת בין x ל-a כלומר" $0<c<1$. ולכן אפשר להשתמש בהערכה: $e^c\le e<3$ כלומר: $|R_n(1)|=\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-3}$. עתה נמצא n המקיים את האי-שוויון. $n=6$ מקיים זאת: $\frac{3}{7!}=\frac{1}{1680}<\frac{1}{1000}$, כלומר, קירוב של e עד כדי שגיאה הקטנה מאלפית ניתן ע"י: $T_6(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$.

הסבר נוסף:

נוסחת טיילור נותנת "שיטה נומרית" לחישוב מקורב. יש לה שני רכיבים:

1. פולינום טיילור שנותן נוסחה לחישוב הקירוב הנומרי
2. הנוסחה לשארית המאפשרת לקבוע את n (מעלפת פולינום טיילור שיבצע את הקירוב) שיבטיח שהשגיאה (בערכה המוחלט) תהיה קטנה מכל רמת דיוק נדרשת.

הערה: כשרוצים לקרב את $f(x)$ לפונקציה נתונה f בנקודה מסיימת x מוטל עלינו לבחור את הנקודה a שסביבה נבצע את פיתוח טיילור. השיקול הראשון בבחירת a הוא שניתן לחשב בקלות את ערכי הפונקציה ונגזרותיה בנקודה a. (בדוגמא היינו חייבים לבחור $a=0$ כי אנו מכירים את $e^0=1$ אך איננו מכירים את e^a עבור $a\neq 0$). מבין הנקודות האפשריות נשתדל לבחור נקודה קרובה ככל האפשר לx כי אז הגורם $(x-a)^{(n+1)}$ יתרום גם הוא להקטנת השגיאה.

מקלורן: פולינום טיילור בסביבת $a=0$.

הערה: הקירובים לערך הפונקציה לא תמיד משתפרים כאשר $n\to\infty$ ולכן לא תמיד מתקיים: $R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$. זה מתקיים רק לפי המשפט הבא:

משפט: תהי f פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבה של הנקודה a. נניח שיש קבוע k כך ש- $|f^{(n)}(x)|\le k$ לכל x בסביבה זו ולכל n, אז $R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ לכל x בסביבה.

הוכחה: $|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|\le\frac{k|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$

(כל סדרה כזו שואפת לאפס ע"פ כלל המנה $\frac{kA^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$).

פולינומי טיילור ידועים:

מספר	פונקציה	פולינום טיילור המתאים לפונקציה
1	$f(x)=(1+x)^{\alpha}$ $\alpha\in\mathbb{R}$	$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{\alpha}{n}x^{k}\right)$
2	$f(x)=e^{x}$	$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+....+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^k}{k!}\right)$
3	$f(x)=\sin x$	$P_{2n+1}(x)=P_{2n+2}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+....+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)$
4	$f(x)=\cos x$	$P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+....+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)$
5	$f(x)=\ln(1+x)$	$P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$

<u>הערה:</u> כאשר נתון פולינום מקלורן מסדר n וברצוננו לחשב את פולינום מקלורן עבור $g(x)=f(x^3)$, די להציב x^3 בפולינום של $f(x)$.

שיטת ניוטון-רפסון

הגדרה: שיטה רקורסיבית לקירוב פיתרון למשוואה, כלומר נקודת חיתוך הפונקציה עם ציר x, כלומר x המקיים: $f(x)=0$.

נוסחה רקורסיבית: $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ משמעות הנוסחה היא שאם $f(x_n)\neq 0$ אז נעביר משיק לפונקציה ב x_n וחיתוך המשיק עם ציר x יהיה הנקודה x_{n+1}.

הערות:

- כדי שהסדרה x_n תהיה מוגדרת היטב, צריך שאיברי הסדרה יהיו בתוך הקטע, מה שלא קורה עבור כל פונקציה.
- אפילו אם $x_n\in I$ לכל n אין זה מבטיח התכנסות, כמו במקרה שבו איברי הסדרה חוזרים על עצמם לסירוגין ($x_{n+2}=x_n$).

משפט: תהי f גזירה פעמיים בקטע I, ותהיינה $a,b\in I$ כך ש- $f(a)<0<f(b)$. נניח גם כי $f''(x)>0$, $f'(x)$ בקטע ונסמן את הפיתרון (היחיד) של המשוואה $f(x)=0$ ע"י γ.

נבחר $x_0=b$ ונגדיר את הסדרה x_n לפי הנוסחה הרקורסיבית, אז:

1. $\lim_{n\to\infty}x_n=\gamma$ (סדרת הקירובים שואפת ל γ - הפיתרון).
2. שיטה זו מהירה יותר למציאת פיתרון מאשר שיטת חציית הקטעים.

חשבון אינטגרלי

האינטגרל הלא מסוים

פונקציה קדומה: נסמן ב $F(x)=\int f(x)dx$ פונקציה קדומה לפונקציה f, כלומר פונקציה שנגזרתה היא הפונקציה הנתונה f ונקרא לה גם האינטגרל הלא מסוים של f. באופן פורמאלי זהו סימון למשפחה של פונקציות הנבדלות זו מזו בקבועים בלבד.

כללי אינטגרציה:

1. $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

2. $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$

3. **אינטגרציה בחלקים:** $\int f(x)g'(x)=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)$

דוגמאות: $\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

$$\int\ln xdx=\int 1\ln xdx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$$

4. **נוסחאות נסיגה:** $\int\cos^n xdx=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx$ שימוש בנוסה זו פעם אחר פעם נותן לבסוף, ע"פ הזוגיות של n תוצאה שבה יש לחשב את האינטגרל $\int 1dx=x$ או את $\int\cos xdx=\sin x$.

$$\int\sin^n xdx=\frac{(n-1)}{n}\int\sin^{n-2}xdx-\frac{\cos\sin^{n-1}x}{n}$$

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^k}\qquad I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\qquad I_{k+1}=\frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^k}+\frac{2k-1}{2ka^2}I_k$$

5. **אינטגרציה ע"י הצבה (הפיכת כלל השרשרת):** $\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C$

דוגמא: $\int 2xe^{x^2}dx$. נשתמש כאן ב $f(t)=e^t$ וב- $g(x)=x^2$ (ואז $g'(x)=2x$). ונקבל שהאינטגרל הוא: $F(g(x))+C=e^{x^2}+C$.

בעצם הרעיון הוא להציב $t=x^2$ ואז כותבים את הנגזרת של t בצורה $\frac{dt}{dx}=2x$ ←

$dt=2xdx$ ואז כותבים את האינטגרל באמצעות ההצבה: $\int e^t dt=e^t+C=e^{x^2}+C$

6. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|f(x)|+C$ הצבה: $t=f(x) \leftarrow dt = f'(x)dx$

7. **<u>אינטגרציה של פונקציות רציונאליות:</u>** $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$, אם $\deg P > \deg Q$ אז מחלקים P ב-Q.

מפרקים לסכום של שברים חלקיים:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2(x^2+cx+d)} = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}+\frac{Dx+E}{(x^2+cx+d)}$$

חישוב הצורות השונות של השברים החלקיים:

$\int \frac{A}{(x-a)^j}dx = \frac{(x-a)^{-j+1}A}{-j+1}+C$ (או $A\ln|x-a|+C$ כאשר $j=1$).

$$\int \frac{2x}{(x^2+a^2)^j}dx = \frac{(x^2+a^2)^{-j+1}}{-j+1}+C$$

$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^j}dx = a^{-2j+1}\int \cos^{2j-2} t dt$ (בעזרת ההצבה $x=a\tan t$).

8. **<u>השלמה לריבוע:</u>** כאשר יש במכנה פולינום: $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$ ואז

מקבלים במכנה: $\int \frac{dx}{\underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}_{A^2="x^2"}+\underbrace{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}_{c="1"}} = c^{-1}\cdot A'\arctan\left(\frac{A}{\sqrt{c}}\right)+C$

9. **<u>ביטויים עם שורשים:</u>** הצבות של זהויות טריגונומטריות:

$\sqrt{a^2-x^2}$ - $x=a\sin t$ או $x=a\cos t$

$\sqrt{a^2+x^2}$ - $x=a\tan t$ ולהשתמש בזהות: $1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$

$\sqrt{x^2-a^2}$ - $x=\frac{a}{\sin t}$ או $x=\frac{a}{\cos t}$

10. **<u>הצבת אוילר:</u>** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}dx$ - $t=\sqrt{x^2+b}+x$ $dx=\frac{\sqrt{x^2+b}}{t}dt$

11. **<u>הצבות טריגונומטריות:</u>**

$\sin x$ בחזקה אי זוגית- $t=\cos x$ $\cos x$ בחזקה אי-זוגית- $t=\sin x$

סכום החזקות של $\sin x$ ו $\cos x$ ביחד הוא זוגי- $t=\tan x$ או $t=\cos x$

הצבה כללית שתמיד תעבוד: $t=\tan\frac{x}{2} \leftarrow$ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

אינטגרלים מיידים

אינטגרל לא מסוים	פונקציה קדומה מתאימה	מספר
$\int \frac{dx}{(x \pm d)^2 + a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x \pm d}{a}\right) + c$	1
$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$	2
$\int \frac{dx}{x^2 + 1}$	$\arctan(x) + c$	3
$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\arcsin(x) + c$	4
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	5
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + c$	6
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$	7
$\int \cos x dx$	$\sin x + c$	8
$\int \sin x dx$	$-\cos x + c$	9
$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	10
$\int x^n dx, \qquad n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	11
$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$	12
$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	13
$\int \frac{dx}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + c$	14
$\int \frac{dx}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + c$	15
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\frac{\sin x}{\cos x} + c = \tan x + c$	16
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\frac{\cos x}{\sin x} + c = -\cot x + c$	17

האינטגרל המסוים

הגדרות

אינטגרל מסוים: השטח המוגבל בין הגרף של f לקטע $[a,b]$ נקרא האינטגרל של f בקטע,

סימון: $\int_a^b f$. האינטגרל הוא מספר ואינו תלוי בx. השטח יהיה שטח עם סימן- שטח מעל ציר הx יהיה חיובי ושטח מתחת לציר יהיה שלילי.

סכום רימן: P היא חלוקה של הקטע $[a,b]$: $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$

בהינתן פונקציה f שמוגדרת ב$[a,b]$, כך שf מקבלת ערך קבוע c_i ב $[a_{i-1},a_i]$. כדי לקרב את השטח המבוקש החלוקה תהיה מאוד עדינה כאשר ערכה בקטע הi הוא, למשל: $c_i=f(t_i)$ (כלומר גבהים בחישובי שטחי המלבנים המתקבלים ע"י נקודה שרירותית בקטע-t_i).

הגדרה פורמאלית: תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$ ותהי $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ חלוקה של הקטע. לכל i נבחר נקודה $t_i\in[a_{i-1},a_i]$. הסכום $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i-a_{i-1})$ נקרא סכום רימן של הקטע ביחס לחלוקה הנתונה וביחס לבחירת הנקודות t_i.

אינטגרביליות רימן: פונקציה חסומה f המוגדרת בקטע $[a,b]$ היא פונקציה אינטגרבילית רימן בקטע, שהאינטגרל שלה הוא המספר I, אם לכל $0<\varepsilon$ יש $0<\delta$ עם התכונה הבאה: לכל חלוקה $\{a_i\}$ של הקטע כך ש- $\max_{1\le i\le n}(a_i-a_{i-1})<\delta$ (כלומר, אין קטע שאורכו גדול מ δ) ולכל בחירה של נקודות $t_i\in[a_{i-1},a_i]$ סכום רימן המתאים יקיים: $|\sum f(t_i)(a_i-a_{i-1})-I|<\varepsilon$

(כלומר, ערך השטח המבוקש שואף לערך סכום הרימן שמקרב אותו- $\lim_{\lambda(p)\to 0}\sum(p)=I$).

את האינטגרל נסמן: $I=\int_a^b f$.

הערה: פונקציה קבועה היא אינטגרבילית ו- $\int_a^b cdx=c(b-a)$

משפט: משפחות הפונקציות הבאות הן אינטגרביליות רימן בכל קטע סופי (בתנאי שהן חסומות בו):

- פונקציות מונוטוניות
- פונקציות רציפות
- פונקציות רציפות או מונוטוניות למקוטעין (כלומר, הקטע מתחלק למספר סופי של קטעים שבכל אחד מהם שבכל אחד מהם הפונקציה רציפה או מונוטונית).

תכונות האינטגרל המסוים

תהיינה f ו-g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אז:

1. לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ גם הפונקציה $\alpha f+\beta f$ אינטגרבילית בקטע ומתקיים:
$$\int_a^b(\alpha f+\beta f)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$$
2. אם $f\le g$ לכל x בקטע אז: $\int_a^b f\le\int_a^b g$ (בפרט: אם $f\ge 0$ אז: $\int_a^b f\ge 0$).
3. אם $m\le f(x)\le M$ לכל x בקטע אז: $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$.
4. ערך הביניים: אם f רציפה ב$[a,b]$ אז קיימת $c\in[a,b]$ כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$
5. גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו- $|\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b|f(x)|dx$ (אך לא בכיוון השני).
6. אם $a<c<b$ אז f אינטגרבילית בכל אחד מהקטעים החלקיים $[c,b]$ $[a,c]$ ומתקיים:
$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$ (תקף לכל 3 נקודות גם אם c אינה הנקודה האמצעית).
7. אם $h=f$ פרט למספר סופי של נקודות, אז גם h אינטגרבילית בקטע ומתקיים:
$\int_a^b h=\int_a^b f$.
8. אם $f(x)$ אי-זוגית אז $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

<u>הערה:</u> אם $f(x)\ge 0$ לכל x בקטע וקיימת $x_0\in[a,b]$ שבה $f(x)>0$ עדיין ייתכן ש $\int_a^b f=0$.
לקבלת אי-שיוויון חריף נדרש גם שf תהיה רציפה.

הקשר בין האינטגרל המסוים לפונקציה הקדומה

<u>משפט:</u> תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז הפונקציה $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ רציפה בו.

<u>המשפט היסודי של החדו"א:</u> תהי f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ורציפה בנקודה $x_0\in[a,b]$, אז $F(x)=\int_a^x f$ גזירה ב x_0 ומתקיים: $F'(x_0)=f(x_0)$.

(אם x_0 נקודת קצה של הקטע אז הנגזרת היא חד-צדדית).

<u>מסקנה:</u> אם f רציפה ב$[a,b]$ אז יש לה פונקציה קדומה בקטע. פונקציה קדומה כזו ניתנת ע"י הנוסחה: $F(x)=\int_a^x f$.

<u>ניסוח נוסף:</u> תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b). אזי לכל c קבוע בקטע הפונקציה: $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ גזירה בקטע (a,b) ומתקיים: $F'(x)=f(x)$.

הערות:

- אין חשיבות לקביעת הגבול התחתון בהגדרת F דווקא כקצה הקטע a, אם נבחר נקודה c בקטע ונגדיר $F_1(x)=\int_c^x f$ אז F_1 ו-F נבדלות אחת מהשנייה בקבוע: $\int_a^c f$ ולכן האינטגרלים שווים.
- אפשק להסתכל על האינטגרל גם כפונקציה של הגבול התחתון. אם $G(x)=\int_x^b f$ אז נוכל גם להציג: $G(x)=-\int_b^x f$ ולכן $G'(x)=-f(x)$.

נוסחת ניוטון-לייבניץ: תהי f רציפה ב $[a,b]$ ותהי G פונקציה קדומה שלה, אז:

$$\int_a^b f = G(b)-G(a)=G(x)\,|_a^b$$

דוגמא: $\int_0^\pi \sin x dx=-\cos x\,|_0^\pi=-\cos\pi-(-\cos 0)=2$

גזירת אינטגרל (כלל השרשרת):

אם $\varphi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ ($a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות). אז $\varphi(x)=F\left(b(x)\right)-F\left(a(x)\right)$ ולכן ע"פ כלל השרשרת לגזירה: $\varphi'(x)=f\left(b(x)\right)b'(x)-f\left(a(x)\right)a'(x)$.

דוגמא: $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{7x^2}\sin t dt=14x\sin\left(7x^2\right)-(-\sin x)\sin(\cos x)$ (גזירה של אינטגרל).

החלפת משתנים: אם f רציפה ב $[a,b]$ ו-g הפונקציה ההפוכה שלה, נסמן: $f(a)=\alpha$ ו- $f(b)=\beta$. אז אפשר להחליף את משתנה האינטגרציה בפונקציה ההפוכה ואת התחומים בהתאם: $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(g(t)\right)g'(t)dt$

אינטגרציה בחלקים: כאשר יש מכפלת שתי פונקציות, אז לאחר שמשהו מסיים להיות אינטגרל, ישר מציבים בו ערכים לפי התחומים של הקטע.

דוגמא: $\int_0^\pi x\sin x dx=x(-\cos x)\,|_0^\pi-\int_0^\pi -\cos x dx=0-(\pi\cdot -1)+\sin x\,|_0^\pi=\pi$ ($\sin x\,|_0^\pi=0$).

שימושים של האינטגרל המסוים

חישוב שטח בין שני גרפים: הפרש השטחים שהם מגבילים.

דוגמא: $\int_0^2 |x^2-x^3|\,dx=\int_0^1 (x^2-x^3)dx+\int_1^2 (x^3-x^2)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{17}{12}$

אורך גרף הפונקציה: תהי f פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[a,b]$, אז האורך של הגרף שלה ניתן ע"י הנוסחה: $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$

חישוב בעזרת טיילור: קירוב האינטגרנד בעזרת משפט טיילור.

דוגמא: לחישוב $\int_0^1 \sin x^2 dx$ נשתמש בנוסחת טיילור עבור $\sin t$:

$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}\cdots\pm\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_n(t)$ עם שארית המקיימת $|R_n(t)|\le\frac{|t|^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

נציב $t=x^2$ נבצע אינטגרציה ונקבל:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx=\int\left\{x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}\cdots\pm\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}+R_n(x^2)\right\}dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 120!}\cdots\pm\frac{1}{(4n+3)(2n+1)!}+E_n$$

כאשר $\frac{1}{(4n+7)(2n+3)!}=\int_0^1\frac{x^{4n+6}dt}{(2n+3)!}\ge|E_n|$.

אינטגרלים מוכללים

הגדרה-1: תהי f פונקציה המוגדרת בקרן $[a,\infty)$ אינטגרבילית בכל קטע חלקי $[a,c]$. אם הגבול $\lim_{c\to\infty}\int_a^c f$ קיים נאמר שהאינטגרל המוכלל של f בקרן קיים (כלומר- f אינטגרבילית בקרן).

סימון: $\int_a^\infty f=\lim_{c\to\infty}\int_a^c f$.

הגדרה-2: תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b)$ אינטגרבילית בכל קטע חלקי $[a,c]$. אם קיים הגבול משמאל $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f$ נאמר שהאינטגרל המוכלל של f בקטע $[a,b]$ קיים (כלומר- f אינטגרבילית בקטע). סימון: $\int_a^b f=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f$.

*באופן דומה מגדירים אינטגרל מוכלל בקרן שמאלית או בקטע סופי כשהסינגולאריות היא בקצה השמאלי.

דוגמאות:

- $\int_0^\infty \sin x$ לא קיים כי ל $\int_0^c \sin x=\cos c-1$ אין גבול כאשר $c\to\infty$
- $\int_0^\infty e^{-x}$ מתכנס כי $\int_0^c e^{-x}=1-e^{-c}\to 1$ כאשר $c\to\infty$.
- $\int_1^\infty x^{-p}$: $p\le 1$ האינטגרל מתבדר

  $1<p$ האינטגרל מתכנס ל $\dfrac{1}{p-1}$
- $\int_0^1 x^{-p}$: $1\le p$ האינטגרל מתבדר

  $p<1$ האינטגרל מתכנס ל $\dfrac{1}{1-p}$

הערה: אם ל-f מספר סינגולאריות יש לבדוק כל אחת מהן בנפרד, והאינטגרל המוכלל קיים רק כאשר הוא קיים בכל אחת מהן.

דוגמא:

- האינטגרל $\int_0^\infty x^{-p}dx$ לא קיים לאף p כי אם $1\le p$ אז $\int_0^1 x^{-p}$ לא מתכנס, ואם $p\le 1$ אז $\int_1^\infty x^{-p}$ לא מתכנס.

אינטגרלים מוכללים של פונקציות אי-שליליות

משפט: תהי f אי-שלילית בקרן $[a,\infty)$ ונסמן: $F(x)=\int_a^x f$, אז $\int_a^\infty f$ קיים אם ורק אם F חסומה.

משפט מבחן ההשוואה: תהיינה f ו-g אי-שליליות בקרן $[a,\infty)$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$ לכל $a<b<\infty$. אם $0\le f(x)\le g(x)$ לכל x בקרן, אז:

- אם האינטגרל $\int_a^\infty g$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f$ מתכנס ו $\int_a^\infty f\le\int_a^\infty g$ (אם מה שחוסם מלמעלה מתכנס אז גם כל שטח שמוכל בו- מתכנס).
- אם האינטגרל $\int_a^\infty f$ מתבדר אז גם $\int_a^\infty g$ (אם מה שמוכל בפנים לא מתכנס אז גם מה שיותר גדול מכך לא יתכנס).

הערה: כדי שהאינטגרל $\int_a^\infty f$ יתכנס אין צורך שזה יתקיים לכל $a\le x$ ומספיק שזה יתקיים על איזשהי קרן חלקית $[c,\infty)$ כלומר, עבור ערכי x שהם גדולים מספיק.

מבחן ההשוואה הגבולי: תהיינה F ו-g אי-שלילות בקרן $[a,\infty)$ אינטגרביליות בכל קטע חלקי. אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ כאשר $0<L<\infty$ אז האינטגרלים "מתכנסים ומתבדרים ביחד".

דוגמא: לאילו ערכי q $\int_0^1\frac{\sin x}{x^q}$ מתכנס?

זה מתנהג כמו: $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{x^q}}{\frac{1}{x^{q-1}}}\longrightarrow\frac{1}{x^{q-1}}=\frac{x}{x^q}$.

1 הוא סופי וחיובי ולכן ע"פ מבחן ההשוואה הגבולי, האינטגרל הזה מתנהג כמו: $\int_0^1\frac{dx}{x^{q-1}}$, כלומר מתכנס אם ורק אם: $q<2\longrightarrow q-1<1$.

פונקצית גאמה: $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ מוגדרת עבור $x>0$. זהו אינטגרל של פונקציה חיובית על תחום אינסופי. עבור $0\le t\le1$ לאחר בדיקת התכנסות בכל אחד מהתחומים: $\int_1^\infty\ \int_0^1$, מקבלים שהאינטגרל מתכנס בשניהם.

תכונה חשובה של הפונקציה: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$,

ומכך נובע כי לכל k טבעי מתקיים: $\Gamma(k)=(k-1)\Gamma(k-1)=\cdots=(k-1)!$

אינטגרלים מתכנסים בהחלט ובתנאי

ההתכנסות של אינטגרל מוכלל של פונקציות אי-שליליות תלויה ב"קצב הדעיכה" של f באינסוף, או ב"קצב הגידול" שלה בקטע סופי. כאשר f מקבלת גם ערכים חיוביים וגם שליליים האינטגרל יכול להתכנס מסיבה נוספת: התרומות החיוביות והשליליות של f יכולות לבטל חלקית אלה את אלה.

הגדרה: נאמר שהאינטגרל המוכלל $\int f$ (על קרן אינסופית או על קטע סופי) **מתכנס בהחלט** אם $\int |f|$ מתכנס. אך אם $\int |f|$ לא מתכנס נאמר ש**ההתכנסות היא בתנאי**.

משפט: אם אינטגרל מוכלל מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס. כלומר, אם $\int_a^\infty |f| < \infty$ אז גם $\int_a^\infty f$ מתכנס (ובאופן דומה לאינטגרל המוכלל על קטע סופי).

דוגמאות:

- $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ ו- $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$ מתכנסים בהחלט כי $\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ וגם $\frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ ו $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty$

- $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס אך לא בהחלט (בתנאי). לבדיקת התכנסות נבצע אינטגרציה בחלקים: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \left. \frac{-\cos x}{x} \right|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ והאינטגרל האחרון מתכנס ע"פ הדוגמא הראשונה. האינטגרל אינו מתכנס בהחלט כי $|\sin x| \ge \sin^2 x$ ואילו $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ מתבדר: $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x} = \int_1^\infty \frac{1}{2x} dx - \int_1^\infty \frac{\cos x}{2x} dx$ ו: $\int_1^\infty \frac{1}{2x} = \infty$ ולכן ע"פ מבחן ההשוואה, גם $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ מתבדר.

משפט דיריכלה: תהי f רציפה בקרן $[a,\infty)$ כך שהפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ חסומה בקרן. תהי g גזירה ומונוטונית-יורדת בקרן כך ש- $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. אז האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

טורי מספרים

מושגים כלליים

סכום חלקי: עבור N מסוים, סכום סופי של N האיברים הראשונים של הסדרה נקרא הסכום החלקי ה-N-י: $S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1+a_2+\dots+a_n$. ניתן להביט כעת על סדרת הסכומים החלקיים, S_N. איבר N בסדרה זו יהיה סכימה של N האיברים הראשונים בסדרה a_n. $S_N=S_{N-1}+a_N$.

הגדרה- התכנסות של טור: נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס כאשר סדרת הסכומים החלקיים שלו $\{S_N\}$ מתכנסת. אם גבולה הוא $\lim_{N\to\infty} S_N = S$ נאמר שסכום הטור הוא S ונסמן: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. אם $\lim_{N\to\infty} S_N$ לא קיים, נאמר שהטור מתבדר.

דוגמאות:

- טור גיאומטרי: $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1+q+q^2+q^3+\cdots$ $\qquad S_N=\dfrac{1-q^N}{1-q}$

  $1<|q|$ הטור מתכנס וסכומו: $\dfrac{1}{1-q}$ $\qquad$ $1\le|q|$ הטור מתבדר

- טור טלסקופי: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)$

  כל האיברים מצטמצמים מלבד הראשון והאחרון ולכן $S_N=\frac{N}{N+1}=1-\frac{1}{N+1}\xrightarrow{N\to\infty}1$

  הטור מתכנס וסכומו: 1.

- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ מתבדר וגם הטור ההרמוני: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ מתבדר (סכום של מספרים חיוביים שהולך וגדל).

משפט: אם הטור $\sum a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

משפט: אם הטורים $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתכנסים ו c קבוע אז:

1. הטור $\sum c a_n$ מתכנס, וסכומו הוא $c\sum a_n$
2. $\sum (a_n+b_n)$ מתכנס וסכומו: $\sum a_n + \sum b_n$

הערה: שינו של מספר סופי מאברי הטור אינו משפיע על התכנסותו את התבדרותו (אך יכול להשפיע על ערך הסכום).

טורים עם איברים חיוביים

משפט: אם $a_n \geq 0$ לכל n, אז $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה (סדרת הסכומים החלקיים היא עולה וקיים לה גבול רק אם היא חסומה מלעיל).

משפט (מבחן ההשוואה): יהיו $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ טורים עם איברים אי-שליליים. אם $0 \leq a_n \leq b_n$ לכל n ואם הטור $\sum b_n$ מתכנס אז גם $\sum a_n$ מתכנס ו $\sum a_n \leq \sum b_n$ (ואם $\sum a_n$ מתבדר אז גם $\sum b_n$ מתבדר).

הערה: להתכנסות $\sum a_n$ אין צורך לדרוש כי $0 \leq a_n \leq b_n$ לכל n ומספיק שיש N כך שזה יתקיים לכל $n > N$ אך אז אי-השוויון בין הסכומים אינו חייב להתקיים.

משפט (מבחן ההשוואה הגבולי): אם a_n ו b_n חיוביים לכל n וקיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$ כאשר $0<L<\infty$ אז הטורים $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ "מתכנסים ומתבדרים ביחד".

הערה: אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ אז מהתכנסות $\sum b_n$ נובעת התכנסות $\sum a_n$ (וההפך לא).

דוגמא: $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ו- $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ מתנהגים כמו: $\sum \frac{1}{n^2}$ - מתכנס ו $\sum \frac{1}{n}$ -מתבדר.

מבחן השורש (קושי): אם קיימים $0<q<1$ ו-N כך ש $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ לכל $n \geq N$, אז הטור $\sum a_n$ מתכנס. **הערה:** תנאי המשפט שקולים ל $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$.

מבחן המנה (ד'אלמבר): אם קיימים $0<q<1$ ו-N כך ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ לכל $n \geq N$ אז הטור $\sum a_n$ מתכנס. **הערה:** מגבלה של מבחן המנה: אסור שאף-איבר בטור יהיה אפס ולכן לפעמים רק מבחן השורש יעבוד.

דוגמא: $\sum \frac{q^n}{n!}$ מתכנס לכל $q \geq 0$ כי $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{q}{n+1} \to 0 < 1$

הערה: אי-השוויון החריף $q<1$ חשוב והתנאי החלש יותר: $\sqrt[n]{a_n} \leq 1$ או $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ אינו מספיק ואינו נותן שום אינפורמציה.

משפט (מבחן האינטגרל): תהי f פונקציה חיובית לא עולה בקרן $x \ge 0$, אינטגרבילית בכל קטע חלקי $[0,b]$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם ורק אם האינטגרל המוכלל $\int_0^{\infty} f(x)dx$ מתכנס, ומתקיים: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \int_0^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$

דוגמא: ראינו שהאינטגרל $\int^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ מתכנס עבור $p>1$ ומתבדר עבור $p \le 1$, לכן גם הטור $\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p>1$ ומתבדר עבור $p \le 1$.

טורים בעלי סימנים מתחלפים לסירוגין

משפט (לייבניץ): אם $a_n > 0$ סדרה מונוטונית יורדת לאפס אז הטור $\sum (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס וסכומו S מקיים: $0 < S < a_1$.

זנב הטור $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מקיים: $|r_N| < a_{N+1}$ וסימנו: $(-1)^{N+1}$.

דוגמא: הטור $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ מתכנס לכל $p > 0$ (שלא כמו הטור בלי השמת הסימנים, שהוא רק ל-$p > 1$). כלומר, השמת סימנים יכולה להביא לצמצומי שיגרמו להתכנסות הטור.

הערות:

- בחישובים מעשיים מחליפים טורים אינסופיים בסכומים חלקיים מספיק רחוקים. כדי לדעת את שגיאת החישוב יש להעריך את $|r_N|$ ומשפט לייבניץ אכן נותן הערכה כזאת.
- אם a_n לא סדרה יורדת אז מסקנת המשפט אינה נכונה.

טורים כלליים

התכנסות בהחלט ובתנאי: נאמר שהטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס. אם הטור $\sum a_n$ אך לא בהחלט, נאמר שהוא מתכנס בתנאי.

משפט: טור מתכנס בהחלט הוא טור מתכנס (ולא להפך).

דוגמא: עבור אילו ערכי x הטור $\sum \frac{x^n}{n}$ מתכנס ומתי הוא מתכנס בהחלט.:

עבור $|x| > 1$ האיבר הכללי לא שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר.

עבור $|x| < 1$ הטור מתכנס בהחלט.

עבור $x = 1$ זה הטור ההרמוני המתבדר.

עבור $x = -1$ הטור מתכנס (טור לייבניץ) אך לא בהחלט.

כלומר $x \in [-1,1)$, הטור מתכנס בהחלט.

הערות:

- מבחני ההתכנסות לטורים חיוביים נותנים, ע"י מעבר מ- a_n ל- $|a_n|$ מבחנים דומים להתכנסות בהחלט.
- כזכור, $\sum a_n$ רק אם $a_n \to 0$. ולכן, לפי מבחן השורש והמנה: אם $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ או $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ אז: a_n מתבדר.

סדרות וטורים של פונקציות

התכנסות של סדרות וטורים של פונקציות

נתונה סדרת פונקציות $\{f_n\}$. בכל נקודה x שבה כולן מוגדרות נוכל לבדוק אם סדרת המספרים $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ או הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנסים או מתבדרים. בתחום שבו הסדרה (או הטור) מתכנסים, הגבול (או הסכום) מגדירים פונקציה חדשה של המשתנה x.

דוגמאות:

- הפונקציות $f_n(x)=\dfrac{x}{x^2+n^2}$ מוגדרות בכל הישר $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ לכל x, כלומר, סדרת הפונקציות f_n מתכנסת לכל x וגבולה הוא $f(x)\equiv 0$.
- הפונקציות $f_n(x)=x^n$ מוגדרות בכל הישר ומקיימות $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ עבור $x\in(-1,1)$ וכן $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)=1$. עבור כל הx-ים האחרים הסדרה המספרית $\{f_n(x)\}$ אינה מתכנסת. לכן פונקצית הגבול מוגדרת בקטע $(-1,1]$ וניתנת ע"י: $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$

  (פונקצית הגבול f איננה רציפה למרות שכל הפונקציות f_n רציפות).

טורי פונקציות

משפט (ויירשטראס): נניח שהפונקציות f_n מוגדרות בקטע I (שיכול להיות סופי או אינסופי) ושיש קבועים M_n כך שטור המספרים $\sum M_n$ מתכנס וכך ש- $|f_n(x)|\le M_n$ לכל $x\in I$, אז:

1. טור הפונקציות $\sum f_n$ מתכנס בהחלט בקטע.
2. אם כל הפונקציות f_n רציפות ב I אז גם פונקצית הסכום $f=\sum f_n$ היא רציפה.
3. אם $I=[a,b]$ קטע סגור וכל הפונקציות f_n אינטגרביליות ב- I אז גם פונקצית הסכום $f=\sum f_n$ היא אינטגרבילית ב-I ומתקיים כי $\int_a^b \sum f_n=\int_a^b f=\sum \int_a^b f_n$

דוגמא: הטור $\sum 2^{-n}\sin 3^n x$ מתכנס (ניקח $M_n=2^{-n}$) למרות שאין נוסחה מפורשת לפונקצית הסכום. זוהי דוגמא ידועה מאוד ופונקציה זו אף אינה גזירה באף נקודה.

טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. טורי חזקות הם הכללה של פולינומים לסכומים אינסופיים, ויש להם תכונות מאוד מיוחדות. לשם פשטות הסימונים נרשום בד"כ את הטענות למקרה המיוחד שבו $x_0 = 0$.

משפט: לכל טור חזקות $\sum a_n x^n$ יש מספר $0 \le R \le \infty$ הנקרא רדיוס ההתכנסות של הטור, כך שהטור מתכנס בקטע $(-R, R)$ ומתבדר עבור $|x| > R$ (כאשר $R=\infty$ הטור מתכנס לכל x וכאשר $R=0$ הטור איננו מתכנס לאף $x \neq 0$ טור חזקות תמיד מתכנס ב $x=0$ וסכומו שם: a_0).

בנקודות $x = \pm R$ עצמן הטור יכול להתכנס או להתבדר.

יתר על כן:

1. נסמן $\lambda = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ אז: $R = \frac{1}{\lambda}$
2. לכל $0 \le r \le R$ הטור מקיים את תנאי משפט ויירשטראס בקטע $[-r, r]$

הערה: אם קיים $\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ אז: $R = \frac{1}{\mu}$

דוגמאות:

- $\sum \frac{x^n}{n!}$ $R=\infty$ כי $\mu = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$
- $\sum x^n$ ו- $\sum \frac{x^n}{n}$ $R=1$
- $\sum n^n x^n$ $R=0$ ע"פ נוסחת השורש.
- חישוב רדיוס ההתכנסות של: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$, נעביר את הטור לאינדקס שמתקדם בחזקות של x בן כל פעם (ולא ב-2): $\xleftarrow{k=2n}$ $a_k = \begin{cases} 0 & k\ odd \\ \frac{1}{3^{\frac{k}{2}}} & k\ even \end{cases} \leftarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

ועל"פ מבחן השורש: $\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & k\ odd \\ \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} & k\ even \end{cases}$ (חישוב: $\sqrt[k]{\frac{1}{3^{\frac{k}{2}}}} = \frac{1}{(3^{\frac{k}{2}})^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$).

הגבוה מביניהם: $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ולכן: $R = \sqrt{3}$.

משפט: נתון טור $\sum a_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות R ונסמן את סכומו ב- $f(x)$, אז:

1. סכום הטור הוא פונקציה רציפה בכל תחום ההתכנסות
2. רדיוס ההתכנסות של טור האינטגרלים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ גם הוא R ולכל $0<r<R$ הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[-r,r]$ ומתקיים:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=}^{\infty} a_n t^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \int_0^x t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)$$

(בתוך קטע ההתכנסות הפתוח מותר לעשות אינטגרציה איבר-איבר).

3. רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ גם הוא R ולכל $0<r<R$ הפונקציה f גזירה בקטע $(-R,R)$ ומתקיים: $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$
4. הפונקציה f גזירה אינסוף פעמים ב $(-R,R)$ ובפרט: $f^{(n)}(0) = n! a_n$. כלומר: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

ולכן: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

טור טיילור

הגדרה: אם $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים ב x_0, ניתן להגדיר טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_o)^n$ הנקרא טור טיילור.

הערות:

- תחום ההתכנסות של טור טיילור אינו בהכרח תחום ההגדרה של הפונקציה
- בתחום שבו טור טיילור של הפונקציה מתכנס, סכומו לא בהכרח שווה לפונקציה
- אם ל $f(x)$ יש פיתוח לטור חזקות אז הוא יחיד והוא בהכרח טור טיילור שלה. והמקדמים מקיימים: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

משפט: תהי f גזירה מכל סדר ב- $(-r,r)$ ונניח שיש קבוע M כך שלכל n ולכל $|x|<r$ מתקיים: $|f^{(n)}(x)| \le M$. אז:

1. רדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ מקיים: $R \ge r$
2. בקטע $(-r,r)$, טור מקלורן של $f(x)$ מתכנס לפונקציה.

דוגמאות:

- $f(x)=\sin x$. כאן $f^{(n)}(x)$ הוא $\pm\sin x$ או $\pm\cos x$ ובפרט $|f^{(n)}(x)|\le 1$ לכל x ולכל n ולכן $R=\infty$ (מתכנס לכל x). טורי טיילור שלהם:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

- הטור $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$

אם $1<\alpha$ הטור מתכנס לכל β

אם $\alpha<1$ הטור מתבדר לכל β

אם $\alpha=1$ הטור מתכנס אם ורק אם $1<\beta$