תוכן עניינים

סיכום קורס חדו"א 2 מ'

וקטורים

מבוא

יהיו $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ וקטורים בעלי 3 רכיבים כ"א למשל $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, אזי:

$\vec{u}=\vec{v}$ אם"ם כל אחד מרכיביהם שווים בהתאמה.

$\vec{u}\parallel\vec{v}$ אם"ם $\vec{u}=c\vec{v}$ כאשר c סקלר. אלו וקטורים קולינאריים.

$\vec{u}\perp\vec{v}$ אם"ם $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

אורך, או נורמה, של וקטור: $u=|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$.

וקטור יחידה הוא וקטור שאורכו 1 ומסומן $\hat{u}$. וקטורי היחידה הבאים מסמלים את כיווני הצירים: $\hat{i}=(1,0,0)$, $\hat{j}=(0,1,0)$, $\hat{k}=(0,0,1)$.

כאשר נתונות שתי נקודות A,B אז הווקטור המחבר ביניהם נתון ע"י $\overrightarrow{AB}=(B_1-A_1,B_2-A_2,B_3-A_3)$, והוא מצביע מ- A ל- B.

מרחק בין שתי נקודות הוא אורך הוקטור המחבר אותן.

פעולות בין וקטורים

כפל בסקלר: $c\vec{u}=(cu_1,cu_2,cu_3)$

מכפלה סקלרית: $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$. הזווית ϕ שבין הווקטורים נתונה ע"י $\cos\phi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

מכפלה ווקטורית: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$. וגם $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\phi$

חיסור וקטורים הוא חיסור הרכיבים, כמו בין שתי נקודות. חיבור ווקטורים הוא חיבור הרכיבים.

מכפלה מעורבת: $\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=\begin{vmatrix}w_1&w_2&w_3\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$.

דברים שכדאי לזכור:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$
$$\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$
$$(c\vec{u})\cdot\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}$$
$$(c\vec{u})\times\vec{v}=c(\vec{u}\times\vec{v})$$
$$\vec{u}\times\vec{u}=0$$
$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

שלושה וקטורים הם קופלנרים (=הם על אותו מישור) אם המכפלה המעורבת שלהם היא 0.

לחישוב שטח מקבילית שבנויה על שני וקטורים, יש לבצע מכפלה וקטורית, ולקחת נורמה.

לחישוב שטח משולש שבנוי על שני וקטורים, כנ"ל אך לחלק בשניים.

לחישוב שטח מקבילון שבנוי על שלושה וקטורים יש לבצע מכפלה מעורבת, ולקחת ערך מוחלט.

מכפלה וקטורית בין שני וקטורים מניבה וקטור הניצב לשניהם.

ישרים ומישורים במרחב

ישרים

ישר נתון או בצורה פרמטרית: $L:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ או בצורה קנונית: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

בשני המקרים וקטור הכיוון הוא $\vec{l} = (a,b,c)$ והישר עובר בנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$

מישורים

משוואת מישור באופן כללי: $Ax + By + Cz + D = 0$.

משוואת המישור העובר ב-$M_0(x_0,y_0,z_0)$: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

אם $D = 0$ המישור עובר בראשית הצירים.

הוקטור הנורמל (=ניצב) למישור הוא $\vec{N} = (A,B,C)$. גם $c\vec{N}$ הוא ניצב למישור לכל סקלר c.

שני מישורים הם מקבילים אם"ם $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$, ומתלכדים אם בנוסף $\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1}{D_2} (= \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2})$.

שני מישורים הם ניצבים אם"ם $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$.

הזווית ϕ שביניהם נתונה ע"י: $\cos(180-\phi) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}$.

מרחק נקודה ממישור: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{N}|}$.

למציאת מישור המכיל שני ישרים נחתכים: מוצאים את נקודת החיתוך שלהם M_0, מחשבים את נורמל למישור: $\vec{N} = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2$ ואז $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

למציאת מישור העובר דרך שלוש נקודות מוצאים שני ישרים $\begin{matrix} l_1 = B - A \\ l_2 = C - A \end{matrix}$ ואז כמו מקודם.

מציאת נקודת חיתוך בין שני ישרים: לבטא אותם בצורה פרמטרית... אחד באמצעות משתנה t ושני באמצעות משתנה s. לדרוש $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \\ z(t) = z(s) \end{cases}$ ולפתור את המערכת. אם המערכת אינה פתירה אז הם או מקבילים או מצטלבים.

טופולוגיה

משטחים במרחב

משטח באופן כללי: $F(x,y,z) = 0$.

ספירה: קבוצת הנק' במרחק קבוע R מהנק' (a,b,c). $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$.

פרבלואיד: $z = x^2 + y^2$. קונוס (=חרוט): $z^2 = x^2 + y^2$.

גליל בעל רדיוס R: $R^2 = x^2 + y^2$. גליל זה סימטרי סביב ציר z.

אליפסואיד: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

היפרבלואיד חד יריעתי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. ודו יריעתי: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

פרבלואיד היפרבולי: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$. כדאי לראות את ההדגמות בקישור הבא:

http://www2.norwich.edu/frey/LiveGraphics3D/QuadricSurfaces.htm

קבוצות פתוחות סגורות קשירות וחסומות

סביבה כדורית של (a,b,c) ברדיוס ε: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<\varepsilon^2$.

קבוצה תסומן באות $\mathfrak{D}$.

נקודת שפה היא נקודה שכל סביבה כדורית שלה מכילה גם נקודות ששייכות ל-$\mathfrak{D}$ וגם נקודות שלא שייכות ל-$\mathfrak{D}$. אוסף כל נקודות השפה של $\mathfrak{D}$ היא השפה של $\mathfrak{D}$ ונסמן $\partial\mathfrak{D}$.

$\mathfrak{D}$ פתוחה אם"ם היא אינה מכילה את נקודות השפה שלה (=היא מוגדרת באמצעות אי-שיוויונים חזקים)

$\mathfrak{D}$ סגורה אם"ם היא מכילה את כל נק' השפה שלה (= היא מוגדרת באמצעות אי-שיוויונים חלשים)

$\mathfrak{D}$ קשירה אם"ם אפשר לחבר כל שתי נקודות מתוכה באמצעות עקום המוכל כולו ב-$\mathfrak{D}$.

$\mathfrak{D}$ חסומה אם קיים כדור המכיל את $\mathfrak{D}$.

פונקציות

פונקציה וקטורית של משתנה אחד

באופן כללי: $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$.

תאור גיאומטרי: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

רציפות: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$ אם"ם $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0}x(t)=x(t_0) \\ \lim\limits_{t\to t_0}y(t)=y(t_0) \\ \lim\limits_{t\to t_0}z(t)=z(t_0) \end{cases}$.

נגזרת: $\vec{r}\,'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ ו- $\vec{r}\,'(t)=x'(t)\hat{i}+y'(t)\hat{j}+z'(t)\hat{k}$.

$\vec{r}\,'(t)$ הוא וקטור הכיוון של הישר המשיק ל- $\vec{r}(t)$ בנקודה t.

פונקציות של משתנים אחדים

$f(x,y,z)$ או $f(x,y)$ פונקציה של שני משתנים ניתן לצייר במערכת צירים תלת-מימדית כאשר $z=f(x,y)$.

קווי גובה: $C=f(x,y)$, הקווים נמצאים על מישור xy.

משטחי רמה: $C=f(x,y,z)$.

גבולות ורציפות

משפט אריתמטיקה של גבולות

א) אם $f(x)$ רציפה ב- $x=a$ אז $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x)=f(a)$.

ב) אם $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=L$ ו- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}g(x,y)=M$ ובתנאי שלא נגיע למצב של אי ודעות אז:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)\pm g(x,y)=L\pm M$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\alpha f(x,y)=\alpha L$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)\cdot g(x,y)=L\cdot M$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{L}{M}$.

משפט

אם $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L$ ו- $\varphi(t)$ רציפה ב- L אז $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\varphi(f(x,y))=\varphi(L)$.

משפט

אם $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L$ אז לכל עקום $C:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ שמקיים $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=a$, $\lim\limits_{t\to t_0}y(t)=b$ יתקיים גם: $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t),y(t))=L$.

מסקנה חשובה: אם נמצא שני עקומים כנ"ל ולאחר שנציב את הפרמטריזציה שלהם בפונקציה נקבל שני גבולות שונים, אזי הגבול אינו קיים.

דוגמה: הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ אינו קיים, וניתן להראות זאת באמצעות המסקנה מהמשפט הקודם.

משפט הסנדוויץ'

אם $g(x,y)\le f(x,y)\le h(x,y)$ בסביבת (a,b) פרט אולי לנקודה (a,b) עצמה, ואם $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} h(x,y)=L$ אז גם $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L$.

וריאציה: אם $|f(x,y)|\le g(x,y)$ בסביבה הנ"ל ו- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)=0$ אז $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=0$.

משפט

אם $f(x,y)$ חסומה בסביבת (a,b) ואם $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)=0$ אז $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)\cdot g(x,y)=0$.

מעבר לקואורדינטות פולריות

המשפט הנ"ל שימושי כאשר הגבול הוא מהצורה $\begin{matrix}x\to 0\\ y\to 0\end{matrix}$ ואם מציבים $\begin{cases}x=r\cos(t)\\ y=r\sin(t)\end{cases}$ נקבל $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{r\to 0+}F(r)G(t)$. לרוב $G(t)$ חסומה כי היא צירוף של סינוסים וקוסינוסים, ו- $F(r)$ שואפת לאפס, ואז נוכל להשתמש במשפט הנ"ל.

הגדרת הרציפות

$f(x,y)$ אשר מוגדרת בסביבת (a,b) תהיה רציפה ב- (a,b) אם $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=f(a,b)$.

משפט

כאשר $f(x,y)$, ו- $g(x,y)$ רציפות ב- (a,b) גם הפונקציות הבאות רציפות ב- (a,b):

1. $f(x,y)\pm g(x,y)$.
2. $f(x,y)\cdot g(x,y)$.
3. $\alpha f(x,y)$.
4. אם $g(a,b)\ne 0$ אז גם $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$.
5. אם $\varphi(t)$ רציפה ב- $f(a,b)$ ואם $\varphi(f(x,y))$ מוגדרת בסביבת (a,b) אז גם $\varphi(f(x,y))$ רציפה ב- (a,b).

משפט

אם $f(x,y)$ רציפה ב- (a,b) ואם $f(a,b)>0$ אז קיימת סביבה של (a,b) כך ש- $f(x,y)>0$ בכל הסביבה.

הגדרה

$f(x,y)$ רציפה ב- $\mathfrak{D}$ קבוצה פתוחה אם $f(x,y)$ רציפה בכל נקודה $(a,b)\in\mathfrak{D}$.

משפט ויירשטראס

אם $f(x,y)$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה אז f מקבלת את ערכי המינ' והמקס' שלה בקבוצה הנ"ל.

משפט ערך הביניים

אם $f(x,y)$ רציפה ב- $\mathfrak{D}$ קבוצה פתוחה וקשירה ואם $(a_1,b_1)\in\mathfrak{D}$ וגם $(a_2,b_2)\in\mathfrak{D}$ ואם $f(a_1,b_1)<c<f(a_2,b_2)$ (או ההפך) אז קיימת נק' $(a,b)\in\mathfrak{D}$ כך ש- $f(a,b)=c$.

נגזרות חלקיות ודיפרנציאביליות

נגזרות חלקיות – הגדרה

תהי $f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0). אם הגבולות הבאים קיימים וסופיים אז:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

בגזירה חלקית מתייחסים לשאר המשתנים כאל קבועים למשל

$$\frac{\partial(x^2\sin(y))}{\partial x}=2x\sin(y),\frac{\partial(x^2\sin(y))}{\partial y}=x^2\cos(y).$$

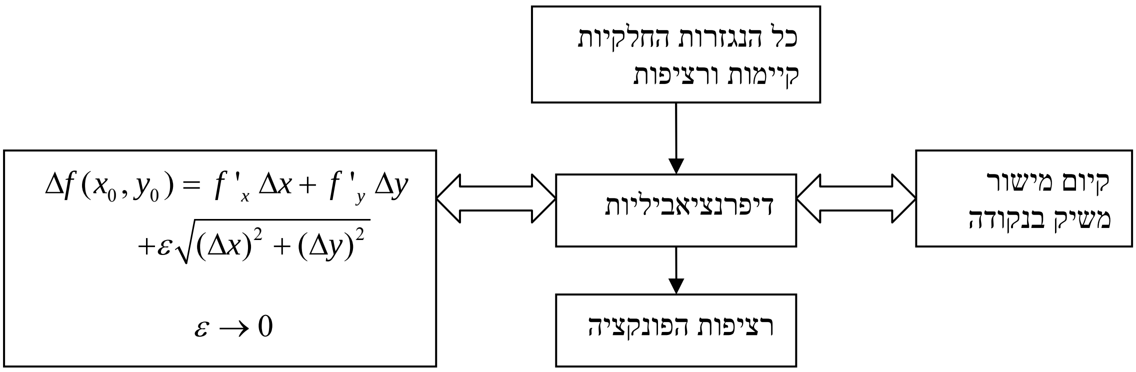
דיפרנציאביליות – הגדרה

$f(x,y)$ המוגדרת בסביבת (x_0,y_0) תהא דיפ' שם אם קיימים מספרים A,B ופונקציה $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ כך ש- $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

וגם $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=0$. כאשר $\Delta x,\Delta y$ מספיק קטנים.

אם הנ"ל מתקיים אז $A=f'_x(x_0,y_0)$ ו- $B=f'_y(x_0,y_0)$.

משפטים בנושא דיפרנציאביליות



ובכיוון ההפוך:

מישור משיק

כאשר הפונקציה היא דיפרנציאבילית המישור המשיק יהיה נתון ע"י:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

ו- $\vec{N} = \pm(f'_x, f'_y, -1)$.

נגזרת מכוונת – הגדרה

תהא $f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0, y_0) ויהי $\vec{l} = (a,b) \neq \vec{0}$. הנגזרת המכוונת היא:

$$D_{\vec{l}}\, f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t\sqrt{a^2 + b^2}}$$

חישוב לפי גרדיאנט: אם f דיפרנציאבילית אז הנגזרת המכוונת נתונה ע"י המכפלה הסקלרית:

$$D_{\vec{l}}\, f(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \hat{l} = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}\,|}$$

כלל השרשרת

קיימות הרבה אפשרויות להרכבה של שתי פונקציות (או יותר). הנה כמה מהן, כאשר בכולן אנו דורשים דיפרנציאביליות בנקודה הרלוונטית (ראה הערה). להלן כמה מהאפשרויות:

1. $f(u,v)$, $u = u(x), v = v(y)$, $\Leftarrow$ $f(x,y) = f(u(x), v(y))$ ואז הנגזרות הן:
$$\begin{cases} f'_x = f'_u \cdot u'_x \\ f'_y = f'_v \cdot v'_y \end{cases}.$$
2. $f(u,v)$, $u = u(x,y), v = v(x,y)$, $\Leftarrow$ $f(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ ואז:
$$\begin{cases} f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \\ f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y \end{cases}.$$
3. $f(t)$, $t = t(x,y)$, $\Leftarrow$ $f(x,y) = f(t(x,y))$ ואז:
$$\begin{cases} f'_x = f'_t \cdot t'_x \\ f'_y = f'_t \cdot t'_y \end{cases}.$$
4. $f(u,v)$, $u = u(t), v = v(t)$, $\Leftarrow$ $f(t) = f(u(t), v(t))$ ואז:
$$f' = f'_t = f'_u \cdot u'_t + f'_v \cdot v'_t.$$

הערה בנוגע ל"נקודה הרלוונטית": כאשר מכניסים פונקציה אחת, שדיפרנציאבילית בנקודה מסוימת לתוך פונקציה אחרת, הפונקציה האחרת צריכה להיות דיפ' בנקודה <u>שונה</u>.

למשל במקרה השני u וגם v צריכות להיות דיפ' ב- (x_0, y_0) אך f צריכה להיות דיפ' ב- (u_0, v_0) כאשר $u_0 = u(x_0, y_0)$ ו- $v_0 = v(x_0, y_0)$.

נגזרות מסדר גבוה

סימון

מסמנים, לדוגמא: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$ ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}$.

במקרה השני קודם גוזרים לפי x, מקבלים פונקציה חדשה ואז גוזרים לפי y.

משפט

אם f''_{yx}, f''_{xy} רציפות ב- (x_0, y_0) אז $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

הגדרה

אם כל הנגזרות מסדר n של פונקציה f רציפות בתחום $\mathfrak{D}$ אז נכתוב $f \in C^n(\mathfrak{D})$.

וברור כי $f \in C^k(\mathfrak{D})$ לכל $k < n$.

אינטגרל עם פרמטר

הגדרה

$R=\{(x,y):a\le x\le b, c\le y\le d\}$. $f(x,y)$ מוגדרת ב- R. אם לכל y הפונ' $g(x)=f(x,y)$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$: $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$. בביצוע האינטגרל y משמש כפרמטר.

משפט

$F(y)$ הנ"ל רציפה ב- $[c,d]$.

משפט לייבניץ

אם $f(x,y)$ ו- $f'_y(x,y)$ רציפות ב- R אז $F'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx$.

משפט

אם $f(x,y)$ ו- $f'_y(x,y)$ רציפות ב- R, $\beta(y)$ מוגדרת וגזירה ב- $y\in[c,d]$ ו- $a\le\beta(y)\le b$ ו- $\varphi(y)=\int_a^{\beta(y)} f(x,y)dx$ אז: $\varphi'(y)=\int_a^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx+f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)$.

באופן דומה אם: $\varphi(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ אז:

$$\varphi'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx+f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y).$$

פונקציות סתומות

משפט הפונקציות הסתומות

תהי $F(x,y)$ המקיימת:

א) $F(x_0,y_0)=0$.

ב) $F(x,y)\in C^1$ בסביבת (x_0,y_0).

ג) $F'_y(x_0,y_0)\ne 0$.

אזי קיימת בסביבת x_0 פונקציה $y(x)$ המקיימת:

1. $y(x_0)=y_0$.
2. $F(x,y(x))=0$ לכל x בסביבת x_0.
3. $y'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ בסביבת x_0.
4. $y(x)$ הנ"ל היה יחידה.

עבור פונקציה $F(x,y,z)$ נדרוש בערך את אותם תנאים. תנאי ג) יהיה $F'_z(x,y,z)\ne 0$. נקבל את אותן המסקנות, מתוקנות להכיל את הפונקציה $z(x,y)$, כאשר $z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$ ו- $z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

גרדיאנט

עבור פונ' $f(x,y,z)\in C^1$ נגדיר $gradf=\vec\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\hat i+\dfrac{\partial f}{\partial y}\hat j+\dfrac{\partial f}{\partial z}\hat k=(f'_x,f'_y,f'_z)$.

הוקטור שמצביע בכוון הגדילה המקסימלית של $z=f(x,y)$ הוא $(f'_x,f'_y,\sqrt{f'^2_x+f'^2_y})$. כלומר כיוון ההתקדמות המקס' במישור הוא $\vec\nabla f$ והנגזרת המכוונת בכוון זה היא $|\vec\nabla f|$. עבור הקטינה המקסימלית פשוט יש להוסיף מינוס להכל. הגרדיאנט הוא תכונה נקודתית.

מישור משיק לפונקציה סתומה

$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$.

משפט

יהי העקום $F(x,y)=0$ ותהי $M_0(x_0,y_0)$ נקודה על העקום. נניח $F\in C^1$ בסביבת M_0 וגם $\vec{\nabla}F(M_0)\neq 0$. הישר המשיק לעקום נתון ע"י: $F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)=0$.

הוקטור $\vec{\nabla}F(M_0)$ הוא ניצב (נורמל) לישר המשיק.

משפט עבור שתי משוואות בשלוש נעלמים

תהיינה $F(x,y,z),\ G(x,y,z)$ שתי פונק' המוגדרות ב- (x_0,y_0,z_0) וסביבתה. נניח שמתקיים:

א) $F(x_0,y_0,z_0)=0,\ G(x_0,y_0,z_0)=0$.

ב) F,G בעלות נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0,y_0,z_0) וסביבתה.

ג) היעקוביאן $\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}\neq 0$ לא מתאפס בנקודה (x_0,y_0,z_0).

אזי קיימת סביבה של (x_0,y_0,z_0) שבה מוגדרות 2 פונקציות יחידות $x(z),\ y(z)$ שמקיימות:

1. $\begin{cases} F(x(z),y(z),z)=0 \\ G(x(z),y(z),z)=0 \end{cases}$ לכל z בסביבה של (x_0,y_0,z_0).
2. $x_0=x(z_0),\ y_0=y(z_0)$.
3. $x(z),\ y(z)$ גזירות ברציפות (ולכן גם רציפות בעצמן) ב- z_0 וסביבתה.

ניתן לחשב את הנגזרות באמצעות חיתוך של שני משטחים במרחב.

חיתוך שני משטחים במרחב

כאשר נתונים שני משטחים $F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0$ החיתוך ביניהם הוא עקום, ואת וקטור הכיוון של המשיק לעקום בנקודה (x_0,y_0,z_0) ניתן לחשב ע"י המכפלה הוקטורית $\vec{\nabla}F\times\vec{\nabla}G$. כזכור עקום ניתן לבטא באמצעות פרמטריזציה $\begin{cases} x=x(z) \\ y=y(z) \end{cases}$ כאשר וקטור הכיוון של המשיק הוא $(x'(z_0),y'(z_0),1)$. חישוב הנגזרות במקרה של שתי פונקציות סתומות ב-3 נעלמים יעשה כך:

$\alpha(x'(z_0),y'(z_0),1)=\vec{\nabla}F(x_0,y_0,z_0)\times\vec{\nabla}G(x_0y_0,z_0)$.

משפט עבור שתי משוואות בארבע נעלמים

תהיינה $F(x,y,u,v),\ G(x,y,u,v)$ מוגדרות בנקודה $M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ וסביבתה. אם מתקיים:

א) $F(M_0)=0,\ G(M_0)=0$.

ב) $F,G\in C^1$ בסביבת M_0.

ג) היעקוביאן $\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}\neq 0$ לא מתאפס ב- M_0.

אזי קיימת סביבה של $M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ שבה מוגדרות שתי פונקציות יחידות $u(x,y),\ v(x,y)$ שמקיימות:

1. $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases}$ לכל (x,y) בסביבת (x_0,y_0).
2. $u_0=u(x_0,y_0),\ v_0=v(x_0,y_0)$.
3. $u(x,y),\ v(x,y)$ גזירות ברציפות (ולכן רציפות בעצמן) ב- (x_0,y_0) וסביבתה.

נוסחה מטריצית לחישוב הנגזרות: $\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{pmatrix}$.

משפט טיילור

משפט

תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר 4 בנקודה (x_0,y_0). אזי:

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h,y_0+k)= \\
&=f(x_0,y_0)+ \\
&+\frac{1}{1!}\left[f'_x(x_0,y_0)h+f'_y(x_0,y_0)k\right]+ \\
&+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0,y_0)h^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)hk+f''_{yy}(x_0,y_0)k^2\right]+ \\
&+\frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(x_0,y_0)h^3+3f'''_{xxy}(x_0,y_0)h^2k+3f'''_{xyy}(x_0,y_0)hk^2+f'''_{yyy}(x_0,y_0)k^3\right]+ \\
&+R_3
\end{aligned}$$

כאשר R_3 היא השארית ו- $h=\Delta x=x-x_0,\ k=\Delta y=y-y_0$. רואים כי כל חישובי הנגזרות נעשים בנקודה (x_0,y_0), ולכן עבור 3 משתנים נרשום בקיצור:

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h,y_0+k,z_0+l)= \\
&=f(x_0,y_0,z_0)+ \\
&+\frac{1}{1!}\left[f'_x h+f'_y k+f'_z l\right]+ \\
&+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}h^2+f''_{yy}k^2+f''_{zz}l^2+2f''_{xy}hk+2f''_{xz}hl+2f''_{yz}kl\right]+ \\
&+R_2
\end{aligned}$$

הערה: ניתן לפתח טורי טיילור של פונציות כגון $\sin(x^2y)$ ע"י פיתוח (מוכר) של $\sin(t)$ ואז החלפת t ב- x^2y.

אקסטרמום מקומי

הגדרה

א) (x_0,y_0) היא נקודת מינימום של $f(x,y)$ אם $f(x_0,y_0)\le f(x,y)$ בסביבת (x_0,y_0).

ב) (x_0,y_0) היא נקודת מקסימום של $f(x,y)$ אם $f(x_0,y_0)\ge f(x,y)$ בסביבת (x_0,y_0).

תנאי הכרחי

אם הפונקציה בעלת נגזרות חלקיות בנקודה (x_0,y_0) אז $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)=\vec{0}$

נק' קריטית – הגדרה

נק' (x_0,y_0) תקרא קריטית אם $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)=\vec{0}$ או לפחות אחת הנגזרות החלקיות אינה קיימת בנק'.

מיון נק' קריטיות

כאשר $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2 בנקודה הקריטית (x_0,y_0), מחשבים את:

$\Delta(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy}\end{vmatrix}$. ואז:

$\Delta>0$ וגם $f''_{xx}>0$ $\Leftarrow$ זוהי נק' מינימום.

$\Delta>0$ וגם $f''_{xx}<0$ $\Leftarrow$ זוהי נק' מקסימום.

$\Delta<0$ $\Leftarrow$ זוהי נק' אוכף (כמו נק' פיתול, אבל בשני משתנים).

אם לא זוכרים אפשר להיזכר ע"י חישוב Δ ב- $(0,0)$ עבור $f=x^2+y^2$, $g=xy$.

ב- f זו נק' מינימום (הרי זהו פרבלואיד) וב- g זוהי נק' אוכף.

במקרה של שלושה משתנים

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix}.$$

מינימום ומקסימום מוחלטים בתחום סגור וחסום

עבור $\mathfrak{D}$ חסום וסגור, ששפתו מורכבת ממספר סופי של עקומים חלקים (גזירים ברציפות) מחלקים את העבודה לארבעה חלקים:

1. בודקים כמו מקודם בתחום הפתוח $\mathfrak{D}-\partial\mathfrak{D}$.
2. מוצאים את כל הנקודות הקריטיות (חשודות) על שפת התחום (למשל ע"י הצבת הפרמטריזציה וגזירה לפי המשתנה היחיד).
3. מוצאים את ה"פינות" כלומר את הנקודות שנמצאות בחיבור שני עקומים על השפה. לא תמיד יש פינות.
4. מחשבים את ערכי הפונקציה בכל הנק' הנ"ל. הגדולה ביותר היא המקס' והקטנה היא המינ'.

נק' קריטית עם אילוץ - שיטת כופלי לגרנז'

נתונה פונקציה $f(x,y,z)$ וצריך לבדוק נק' קיצון על פני המשטח $g(x,y,z)=0$. g הוא אילוץ.
רושמים $\varphi(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$. בונים את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \varphi'_x=0 \\ \varphi'_y=0 \\ \varphi'_z=0 \\ \varphi'_\lambda=0 \end{cases}.$$

פותרים את המערכת למציאת כל הנקודות הקריטיות. במקרה של שני משתנים יש משוואה אחת פחות.

אינטגרלים

משפט

יהי תחום $\mathfrak{D}$ סגור וחסום ובעל שפה שמורכבת ממספר סופי של פונקציות.

1. אם $f(x,y)$ רציפה ב-$\mathfrak{D}$ אזי היא אינטגרבילית שם.

ניקח $g(x,y)$, $f(x,y)$ אינטגרביליות:

2. $\iint\limits_{\mathfrak{D}}[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dxdy=\alpha\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)dxdy+\beta\iint\limits_{\mathfrak{D}} g(x,y)dxdy$.
3. $\iint\limits_{\mathfrak{D}} dxdy$ הוא השטח של $\mathfrak{D}$ ונסמן אותו $S(\mathfrak{D})$.
4. אם $f(x,y)\ge 0$ ב- $\mathfrak{D}$ אז $\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)dxdy$ הוא הנפח הכלוא בין המישור xy לגרף $f(x,y)$.
5. אם $f(x,y)\ge 0$ ב- $\mathfrak{D}$ אז $0\le\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)dxdy$.
6. אם $g(x,y)\le f(x,y)$ ב- $\mathfrak{D}$ אז $\iint\limits_{\mathfrak{D}} g(x,y)dxdy\le\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)dxdy$.
7. אם $m\le f(x,y)\le M$ ב-$\mathfrak{D}$ אז $m\cdot S(\mathfrak{D})\le\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)dxdy\le M\cdot S(\mathfrak{D})$.
8. אם $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\cup\mathfrak{D}_2$ ואין להן נק' פנימיות משותפות אז $\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\mathfrak{D}_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{\mathfrak{D}_2} f(x,y)dxdy$.

חישוב האינטגרל הכפול

משפט

$\mathfrak{D}$ סגורה וחסומה ו- $f(x,y)$ רציפה שם. נסמן $I=\iint_{\mathfrak{D}} f(x,y)dxdy$.

1. אם $\mathfrak{D}=\{(x,y): a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$ אז $I=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$.
2. אם $\mathfrak{D}=\{(x,y): x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\}$ אז $I=\int_c^d\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$.

כלומר מחשבים את האינטגרל הפנימי כאשר המשתנה האחר הוא פרמטר ואז מחשבים את האינטגרל החיצוני.

החלפת סדר אינטגרציה

יש לצייר את התחום $\mathfrak{D}$.

1. אם $\mathfrak{D}=\{(x,y): a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$ נרצה למצוא את הגבולות הקבועים של y ואת הגבולות הלא קבועים של x $x_1(y)\le x\le x_2(y)$. פה יש להיעזר בציור. ייתכן כי נצטרך יותר מזוג פונקציות וגבולות קבועים- במקרה זה יש להשתמש בתכונה 8 מתחתית העמוד הקודם.
2. אם $\mathfrak{D}=\{(x,y): x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\}$ נרצה למצוא את הגבולות הקבועים של x ואת הגבולות הלא קבועים של y $y_1(x)\le y\le y_2(x)$. פה יש להיעזר בציור. ייתכן כי נצטרך יותר מזוג פונקציות וגבולות קבועים- במקרה זה יש להשתמש בתכונה 8 מתחתית העמוד הקודם.

החלפת משתנים

ניקח $(x,y)\in\mathfrak{D},(u,v)\in\Delta$ ונבנה העתקה חד-חד ערכית $\mathfrak{D}\to\Delta$ $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$.

ואז $\left|\begin{matrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{matrix}\right|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|= J^*$. קיימת העתקה הפוכה $\Delta\to\mathfrak{D}$ $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ שבה

$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\begin{matrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{matrix}\right|$ ולזה קוראים היעקוביאן. אנו נתעניין בערכו המוחלט. לרוב קל יותר לחשב את J^*, ואז נעזר ב- $J\cdot J^*=1$.

משפט

ניקח $f(x,y)$ רציפה ב- $\mathfrak{D}$ (סגורה וחסומה) נניח שקיימת העתקה $\Delta\rightleftarrows\mathfrak{D}$ כמו מקודם. אזי:

$$\iint_{\mathfrak{D}} f(x,y)dxdy=\iint_{\Delta} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,dudv.$$

הערה: לפעמים קשה לבודד את $x(u,v),y(u,v)$, ואז נציב לתוך אגף ימין את הכול לפי x,y, בתקווה שלאחר שחלק מהפונקציה יצטמצם עם חלק מהיעקוביאן, נישאר עם ביטוי שקל לבטאו ע"י u,v.

הערה נוספת: לרוב עדיף לבנות את ההעתקה כך שתפשט את תחום האינטגרציה ולא את האינטגרנד.

קואורדינטות פולריות – רגילות ומוזזות

זוהי העתקה מאד נפוצה: $\begin{cases}x(r,\phi)=r\cos(\phi)\\ y(r,\phi)=r\sin(\phi)\end{cases}$, או בהזזה $\begin{cases}x(r,\phi)=a+r\cos(\phi)\\ y(r,\phi)=b+r\sin(\phi)\end{cases}$. היעקוביאן יהיה $|J|=r$ ותחום האינטגרציה המקסימלי יהיה $\Delta=\begin{cases}0\le\phi\le 2\pi\\ 0\le r\end{cases}$. אם למשל נרצה לאנטגרל כאשר $b\le y$ אז ניקח רק $0\le\phi\le\pi$. באופן כללי הזווית ϕ הולכת מהכוון החיובי של ציר x נגד כיוון השעון.

אינטגרל משולש

נבחר $\mathfrak{V}\in\mathbb{R}^3$ (זוהי האות V, מעוגלת) קבוצה סגורה, חסומה וקשירה ושפתה מורכבת ממספר סופי של משטחים מהסוג: $y=y(x,z), z=z(x,y)$ או $x=x(y,z)$. תחום כזה יקרא לשם קיצור תחום כנ"ל.

משפט

תכונות האינטגרל הכפול נכונות בהתאמה עבור האינטגרל המשולש.

משפט

$f(x,y,z)$ רציפה ב- $\mathfrak{V}$ כנ"ל ונסמן $I=\iiint\limits_{\mathfrak{V}} f(x,y,z)dxdydz$.

1. אם $\mathfrak{V}=\{(x,y,z):(x,y)\in\mathfrak{D}, z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$ אז

$$I=\iint\limits_{\mathfrak{D}} dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

2. אם $\mathfrak{V}=\{(x,y,z):a\le z\le b,(x,y)\in S_z\}$ אז $I=\int\limits_a^b dz\iint\limits_{S_z} f(x,y,z)dxdy$.

החלפת משתנים

$f(x,y,z)$ רציפה ב- $\mathfrak{V}$ כנ"ל. נבנה העתקה $\Delta\rightleftarrows\mathfrak{V}$ חד-חד ערכית ע"י:

$$\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases},\begin{cases}u=u(x,y,z)\\ v=v(x,y,z)\\ w=w(x,y,z)\end{cases}.$$

$$J^*=\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|=\begin{vmatrix}u'_x & u'_y & u'_z\\ v'_x & v'_y & v'_z\\ w'_x & w'_y & w'_z\end{vmatrix}\qquad ,J=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix}$$

אזי:

1. $J\cdot J^*=1$.
2. $\iiint\limits_{\mathfrak{V}} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Delta} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw$.

קואורדינטות גליליות

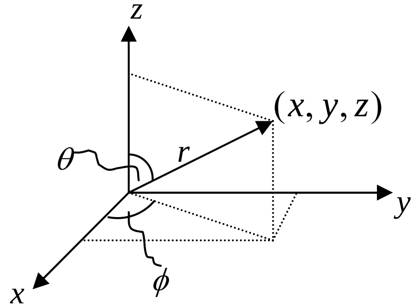
$\begin{cases}x=r\cos(\phi)\\ y=r\sin(\phi)\\ z=z\end{cases}$ ו- $|J|=r$. תחום מקסימלי $\begin{cases}0\le\phi\le 2\pi\\ 0\le r\end{cases}$.

קואורדינטות כדוריות

$\begin{cases}x=r\cos(\phi)\sin(\theta)\\ y=r\sin(\phi)\sin(\theta)\\ z=r\cos(\theta)\end{cases}$ (אפשר גם בהזזה כמו במקרה הדו-מימדי) ו- $|J|=r^2\sin(\theta)$. ϕ נמדדת במישור xy כמו מקודם ו- θ יחסית לציר z.

התחום המקסימלי הוא

$$\begin{cases}0\le\phi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\pi\\ 0\le r\end{cases}.$$



אינטגרל קווי

הגדרה

$L:\vec r(t)$, $a\le t\le b$.

1. L הוא עקום חלק אם קיים $\vec r\,'(t)$ בקטע $[a,b]$.
2. L הוא עקום חלק למקוטעין אם $\vec r(t)$ רציפה ב- $[a,b]$, ו- $\vec r\,'(t)$ קיימת פרט אולי למספר סופי של נקודות.

אינטגרל קווי מסוג ראשון

אינטגרל קווי מסוג ראשון הוא מהצורה $\int_L f(x,y,z)d\ell$.

משפט

אם L עקום חלק אז $\int_L f(x,y,z)d\ell=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$.

שדה וקטורי – הגדרה

1. תלת מימדי: $\vec F(x,y,z)=P(x,y,z)\hat i+Q(x,y,z)\hat j+R(x,y,z)\hat k$ או בקיצור: $\vec F=P\hat i+Q\hat j+R\hat k$.
2. דו מימדי: $\vec F(x,y)=P(x,y)\hat i+Q(x,y)\hat j$ או בקיצור: $\vec F=P\hat i+Q\hat j$.

הגרדיאנט, אם הוא מחושב באופן כללי ולא בנקודה ספציפית, הוא שדה וקטורי.

אינטגרל קווי מסוג שני

אינטגרל קווי מסוג שני הוא מהצורה $\int_L \vec F\cdot d\vec r=\int_L Pdx+Qdy$ במקרה הדו-מימדי או $\int_L \vec F\cdot d\vec r=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ במקרה התלת-מימדי.

באינטגרל הקווי מסוג שני יש חשיבות לכיוון ההליכה. אם $t:a\mapsto b$ ו- $A(x(a),y(a),z(a))$ ו- $B(x(b),y(b),z(b))$ אז $\int_{AB}=-\int_{BA}$.

משפט

אם $\vec F$ רציף ו- L חלק אז: $\int_L \vec F\cdot d\vec r=\int_L\left[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt$.

ובאופן דומה גם עבור תלת-מימד.

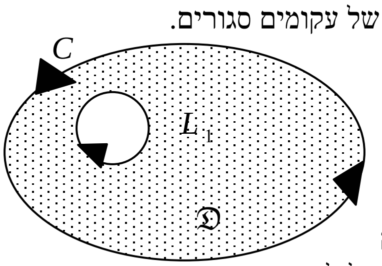
הגדרה

1. L, עם קצוות A,B יקרא סגור אם $A=B$.
2. אם L סגור במישור אז הכיוון החיובי של ההתקדמות עליו הוא נגד כיוון השעון. ונסמן $\oint$.

משפט גרין

הגדרה

$\mathfrak{D}$ סגור, חסום, קשיר ושפתו $\partial\mathfrak{D}$ מורכבת ממספר סופי של עקומים סגורים.



אם נסמן את העקום החיצוני ב- C, ואת הפנימי ב- L_1

אז $\int_{\partial\mathfrak{D}}\vec F\cdot d\vec r=\oint_C \vec F\cdot d\vec r+\oint_L \vec F\cdot d\vec r$.

שימו לב לכיוון האינטגרציה: על כל מסלול חיצוני נאנטגרל נגד כיוון השעון ועל כל מסלול פנימי נאנטגרל עם כיוון השעון. לחלופין אפשר לבצע את כל האינטגרלים נגד כיוון השעון אך לשים מינוסים על האינטגרלים של המסלולים הפנימיים.

כל הנ"ל תקף במישור.

משפט

$\mathfrak{D}$ כמו בהגדרה ו- $\vec F=P\hat i+Q\hat j\in C^1$. אז: $\int_{\partial\mathfrak{D}}\vec F\cdot d\vec r=\iint_{\mathfrak{D}}(Q'_x-P'_y)dxdy$.

ושוב, מדובר במישור.

שדה משמר

הגדרה

הפונקציה U היא פונקצית פוטנציאל של $\vec{F}$ ב- $\mathfrak{D}$ אם מתקיים שם $\vec{F}=\vec{\nabla}U$.

משפט

אם U היא פונקצית פוטנציאל של $\vec{F}$ ב- $\mathfrak{D}$ ואם העקום L נמצא ב- $\mathfrak{D}$ ו- $L:A\mapsto B$ אז:
$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=U(B)-U(A)$.

הגדרה

$\vec{F}$ שדה משמר ב- $\mathfrak{D}$ אם קיימת לו פונקצית פוטנציאל שם.

הערה: $\vec{F}$ משמר גם בכל תת-קבוצה של $\mathfrak{D}$.

משפט

$\mathfrak{D}$ קשירה ו- $\vec{F}$ רציף בה. הטענות הבאות שקולות:

1. $\vec{F}$ משמר ב- $\mathfrak{D}$.
2. לכל $C\subset\mathfrak{D}$ עקום סגור אז $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.
3. לכל עקום L המחבר שתי נק' קבועות A,B כך ש- $L:A\mapsto B$ שנמצא כולו ב- $\mathfrak{D}$: האינטגרל $\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$ אינו תלוי במסלול.

הגדרה

תחום $\mathfrak{D}$ במישור נקרא פשוט קשר אם שפתו מורכבת מעקום סגור אחד בלבד.
(אפילו אם יש נקודה בודדת בתוך $\mathfrak{D}$ שבה התחום אינו מוגדר- התחום אינו פשוט קשר).

משפט

אם $\mathfrak{D}$ במישור הוא פשוט קשר אז $\vec{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}$ יהיה משמר אם"ם $P'_y=Q'_x$.

פונקציה וקטורית של שני משתנים

בכל פרק זה S משטח המקיים:

1. דו-צדדי.
2. חלק למקוטעין.
3. $r'_u\times r'_v\neq 0$.

הגדרה

$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$ היא פונקציה וקטורית של שני משתנים, $u,v\in\Delta$.

צורה פרמטרית: $\begin{cases} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}$. צורה קרטזית: $F(x,y,z)=0$.

הגדרה

אם $\vec{r}'_u,\vec{r}'_v$ רציפות ב- Δ אז אומרים ש- S משטח חלק.

אם $\vec{r}$ רציפה ב- Δ ומורכבת ממספר סופי של משטחים חלקים אומרים ש- S חלק למקוטעין.

הערה: כאשר מחפשים מישור משיק ל- S אז $\vec{N}=\vec{r}'_u(u_0,v_0)\times\vec{r}'_v(u_0,v_0)$.

אינטגרל משטחי מסוג ראשון

משפט

אם S חלק ואם $f(x,y,z)$ רציפה אז:

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|\,dudv.$$

אם $S:z=z(x,y)$ אז $dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$.

אינטגרל משחי מסוג שני

$S:\vec{r}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$ הנורמל הוא $\vec{N}=\pm\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v$, $\hat{n}=\dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$. הסימן של $\vec{N}$ נקבע ע"י תנאי השאלה.

הגדרה

$\vec{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$. האינטגרל המשטחי מסוג שני הוא $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS$ או $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

הערה: אם S משטח סגור ולא מצוין אחרת בשאלה, הנורמל מכוון החוצה ממנו.

$$F\cdot\hat{n}dS=F\cdot(\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v)dudv=\pm\begin{vmatrix}P & Q & R\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}dudv .$$

משפט גאוס

הגדרה

$\vec{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}\in C^1$, נגדיר את הדיברגנץ (divergence) כך:

$$div\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=P'_x+Q'_y+R'_z .$$

משפט גאוס

יהי $\mathfrak{V}$ גוף החסום ע"י המשטח הסגור $\partial\mathfrak{V}$. אם $\vec{F}\in C^1(\mathfrak{V})$ ו- $\hat{n}$ פונה החוצה אז:

$$\iint_{\partial\mathfrak{V}}\vec{F}\cdot\hat{n}dS=\iiint_{\mathfrak{V}}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dxdydz .$$

לאינטגרל (משטחי מסוג שני) מצד שמאל קוראים שטף. משפט זה מועיל במיוחד כאשר הדיברגנץ הוא קבוע כלומר לא תלוי במשתנים x,y,z ואז פשוט נחשב את הנפח של הגוף. במידה וניתקל באינטגרל מסוג שני שמאוד לא נוח לחישוב כי המשטח מסובך, אך נשים לב כי הדיברגנץ של הפונקציה מאד פשוט, נשלים את המשטח למשטח סגור, באמצעות תוספת שקל לחשב את השטף דרכה, ונשתמש במשפט גאוס.

אלמנטים של אנליזה וקטורית

רוטור

$\vec{\nabla}=\hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ הוא אופרטור בצורת וקטור. הוא אינו וקטור אמיתי אך נח לרשום אותו כך.

בהכפלה בו אנו מפעילים אותו על פונקציה כלומר גוזרים אותה. למשולש ההפוך קוראים נבלה (nabla) או del operator. הכרנו את הגרדיאנט ואת הדיברגנץ. עכשיו נכיר את הרוטור. באנגלית: rotor/curl

$$rot\vec{F}=curl\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(R'_y-Q'_z,P'_z-R'_x,Q'_x-P'_y) .$$

לפלסיאן

הלפלסיאן הוא $\vec{\nabla}^2 f=\Delta f=div(gradf)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

פונקציה המקיימת $\vec{\nabla}^2 f=0$ נקראת פונקציה הרמונית.

בונוס

כאשר $\vec{F}\in C^2$ אז $div(rot\vec{F})=0$.

זהו אמצעי לסינון שגיאות.

אם אתם לא בטוחים בחישוב הרוטור, הפעילו דיברגנץ ותבדקו שקיבלתם 0.

משפט גרין עבור לפלסיאן

אם $f \in C^2$ אז $\iiint\limits_{\mathfrak{V}} \vec{\nabla}^2 f dxdydz = \oiint\limits_{\partial\mathfrak{V}} \frac{\partial f}{\partial \hat{n}} dS$.

משפט סטוקס

יהי S משטח ששפתו היא עקום סגור $L = \partial S$.

משפט סטוקס

אם $\vec{F} \in C^2$ ו- $\hat{n}$ ו- L מכוונים לפי כלל היד הימנית אז $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$.

ניתן להשתמש במשפט סטוקס פעמיים, כלומר במקום לחשב אינטגרל על משטח מסובך, לעבור דרך משפט סטוקס למשטח יותר קל. העיקר שלשני המשטחים יהיה את אותה השפה.

כלל היד הימנית

אם למשטח יש שפה אחת: 4 האצבעות המעוגלות של יד ימין מצביעות בכוון האינטגרציה, והאגודל מצביע בכוון הנורמל. אם למשטח יש שני שפות: אדם ש"מטייל" על המשטח ומחזיק בשפה עם יד ימינו כאילו שהשפה היא מעקה (הוא מטייל בכוון האינטגרציה) – הראש שלו מצביע בכוון הנורמל.

שדה משמר במרחב, ומשפט גאוס במישור

הגדרה

$\mathfrak{V}$ במרחב נקרא פשוט קשר אם לכל עקום סגור $C \subset \mathfrak{V}$, קיים משטח $S \subset \mathfrak{V}$ כך ש- $\partial S = C$.

משפט

$\vec{F} \in C^1$. אם $\vec{F}$ משמר אזי $rot\vec{F} = 0$. בנוסף, אם $\mathfrak{V}$ הוא פשוט קשר ו- $\vec{F} \in C^1$ שם אז $\vec{F}$ משמר אם"ם $rot\vec{F} = 0$.

משפט גאוס במישור

יהי $\mathfrak{D}$ תחום במישור כך ששפתו מורכבת ממספר סופי של עקומים סגורים. אם $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} \in C^1$ אזי: $\iint\limits_{\mathfrak{D}} (P'_x + Q'_y) dxdy = \int_{\partial\mathfrak{D}} \vec{F} \cdot \hat{n} d\ell$. כאשר $\hat{n}$ מכוון כלפי חוץ.

נספחים

אי שיוויון מפורסם: $\frac{ab}{a^2+b^2} \le \frac{1}{2}$.

הפונקציה $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ היא פונקציה שמתנהגת מוזר בראשית. אם מבקשים דוגמא לפונקציה שמקיימת משהו חריג- ישר לבדוק על הפונקציה הזו.

עבור הפונקציה $\vec{F}=(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$: $I=\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

1. אם C מסלול סגור המכוון נגד כוון השעון ומקיף את הראשית אז $I=2\pi$.
2. אם C סגור אך לא מקיף את הראשית אז $I=0$. (לפי גרין)
3. אם C סגור ומקיף את הראשית n פעמים נגד כוון השעון ו- m פעמים עם כוון השעון אז $I=2\pi(n-m)$.

נוסחת הטרינום: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

היפוך מטריצה 2x2: $\det=ad-bc$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{\det}$.

קואורדינטות אליפטיות דו-מימדיות: עבור התחום $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$:

$\begin{cases} x(r,\phi)=ar\cos(\phi) \\ y(r,\phi)=br\sin(\phi) \end{cases}$, $|J|=abr$ ו- $0\le r\le 1$.

תלת-מימדיות: עבור $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$:

$\begin{cases} x=ar\cos(\phi)\sin(\theta) \\ y=br\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z=cr\cos(\theta) \end{cases}$, $|J|=abcr^2\sin(\theta)$ ו- $0\le r\le 1$.

בשני המקרים θ ו- ϕ כרגיל. r מאבד את המשמעות הקודמת שלו - הוא כבר אינו הרדיוס.

זהויות טריגונומטריות שמועילות באינטגרלים:

$$\cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2},\ \sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2},\ \sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1.$$

$$\int_a^b \sin(\theta)\cos(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\Big|_a^b.$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}(2\pi)=\pi.$$

ברוב המוחלט של המשפטים שמדברים על נגזרות (למשל גאוס וסטוקס) התנאי של המשפט הוא שהנגזרות החלקיות יהיו רציפות עד לסדר שמופיע במשפט. בסטוקס וגאוס זה סדר 1, כלומר הנגזרות החלקיות צריכות להיות רציפות, ובמשפט גרין עבור לפלסיאן זהו סדר 2 כי הלפלסיאן גוזר פעמיים.

להערות ותיקונים נא לשלוח לי אימייל.

בהצלחה!