חדוו"א 2מ' – 104011 – סיכום הקורס

וקטורים וגאומטריה אנליטית

משפט: יהיו u ו- v שני וקטורים לא קולינארים. כל וקטור a במישור שבו נמצאים u ו- v ניתן להציג באופן יחיד ע"י: $\vec{a}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ (את המשפט ניתן לנסח באופן דומה עבור 3 ויותר מימדים).
מסקנה: 3 וקטורים נמצאים במישור אחד אם ורק אם הם תלויים לינארית.

מכפלה וקטורית: $\vec{a}\times\vec{b}$ - וקטור שגודלו שווה לשטח המקבילית הנפרשת על ידי הוקטורים a ו- b.

מכפלה מעורבת: $\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c})$ סקלר שבערכו המוחלט מתאר את נפח המקבילון שנוצר ע"י a b ו- c.
אם תוצאת המכפלה המוערבת היא 0, אזי ששלושת הוקטורים תלויים לינארית, כלומר באותו מישור.
כמו כן מתקיים: $\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\circ(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\circ(\vec{a}\times\vec{b})$ וכן: $\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{a}\circ(\vec{c}\times\vec{b})$.

משוואת המישור במרחב: $Ax+By+Cz+D=0$ כאשר N(A,B,C) הינו וקטור הנורמל למישור.

משוואת הישר הקנונית: $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ כאשר V(k,m,n) הוא וקטור בכיוון הישר.
אם אחד מרכיבי V הוא 0, למשל m אזי נכתוב: $y=y_0,\ \frac{x-x_0}{k}=\frac{z-z_0}{n}$.

המשוואה הפרמטרית של הישר:
$$x=x_0+kt$$
$$y=y_0+mt$$
$$z=z_0+nt$$
כאשר $\infty>t>-\infty$.

מציאת נק' חיתוך של ישר עם מישור: מציבים את הישר לתוך משוואת המישור, מקבלים t ואותו מציבים חזרה למשוואות הישר.

מרחק נק' (x0,y0,z0) ממישור: $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

מצבים הדדים בין ישרים:
1. מקבילים – וקטורי כיוון פרופורציומאלים.
2. נחתכים - משווים בין משוואות שני הישרים ורואים אם שלושתן מתקיימות, או בדיקה אם 2 הישרים באותו המישור (ע"י מכפלה מעורבת)
3. מצטלבים – לא נחתכים ולא מקבילים. 2 הישרים אינם נמצאים במישור אחד.

סדרות של נקודות

$\{M_k\}_{k=1}^{\infty}\in R^n$ $\qquad$ $M_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})$

הגדרה: $L=(L_1,L_1,...,L_n)$ הוא גבול של הסדרה $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$ טבעי כך שאם $k>N(\varepsilon)$ אזי $d(M_k,L)<\varepsilon$.

כמה מושגים:
תחום חסום: תחום שניתן לחסום את כולו ע"י כדור בעל רדיוס סופי.
תחום קשיר: תחום שעבור כל 2 נקודות המוכלות בו קיים מסלול המחבר בין 2 הנקודות, כך שכל נקודה של המסלול נמצאת בתוך התחום.
תחום פתוח: תחום שאינו מכיל אף לא אחת מנקודות השפה שלו.
תחום סגור: תחום שמכיל את כל נקודות השפה שלו.

פונקציות במספר משתנים

הגדרה: תהי Ω קבוצה ב- R^n.
f היא פונק' המוגזרת על Ω אם היא מתאימה לכל נק' $m \in \Omega$ ערך ממשי יחיד לפי חוק נתון מראש.

קוי גובה: עקום במישור XY נקרא קו גובה של f(x,y) המתאים לקבוע C, אם לכל (x,y) ב- L מתקיים f(x,y)=C.

משטח רמה של פונק': משטח רמה של f(x,y,z) המתאים לקבוע C הוא משטח S שכל נק' (x,y,z) עליו מקיימת f(x,y,z)=C.

גבול של פונק', הגדרה: תהי M_0 נק' ב- R^n, L ערך ממשי, $f: R^n \to R$ פונק' שתחום הגדרתה Ω.
נאמר ש-L הוא גבול של f ב- M_0 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta(\varepsilon) > 0$, כך שאם $\delta(\varepsilon) > d(M, M_0)$ אזי $|f(M) - L| < \varepsilon$.

משפט יחידות הגבול: אם $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ קיים, אז לכל מסלול x(t),y(t) העובר בנק' (x_0, y_0) $\begin{pmatrix} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{pmatrix}$ מתקיים: $L = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t))$.

מסקנה: להפרכת קיום של גבול, מספיק למצוא שני מסלולים העוברים ב- M_0 עם תוצאות שונות.

חישוב גבולות

אריתמתיקה של גבולות: כמו בחדוו"א 1.

קואורדינטות פולריות: $\begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{matrix}$ **לכן** $f(x,y) \leftarrow f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
ואז: $\lim_{(x,y)\to(0,0} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$
אם נקבל שהגבול תלוי בטטא, אזי לא ניתן לקבוע בשיטה זו אם קיים גבול.

כלל הסנדביץ': אם לכל M בסביבה נקובה של M_0 מתקיים $a(M) \le f(M) \le b(m)$ ומתקיים $\lim_{m\to m_0} b(m) = \lim_{m\to m_0} a(m) = L$ אזי מתקיים: $\lim_{m\to m_0} f(m) = L$.

רעיון ההוכחה: בהינתן $\varepsilon > 0$ נתונים $\delta_a(\varepsilon), \delta_b(\varepsilon)$. בוחרים $\delta = \min(\delta_a(\varepsilon), \delta_b(\varepsilon))$ וברגע ש- $\delta > d(M, M_0)$ מקבלים: $\begin{matrix} -b \le -f \le -a \\ a \le f \le b \end{matrix}$ וכן: $\begin{matrix} L-b \le L-f \le L-a \\ a-L \le f-L \le b-L \end{matrix}$ ולכן:
$|f - L| \le \max(|L-a|, |L-b|) < \varepsilon$ מש"ל.

המשפט על גבול חוזר / נשנה: אם $\lim f_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(x,y)=L$ (קיים וסופי) וקיים $\lim f_{x\to x_0}(x,y)=\Phi(y)$ לכל x בסביבת (x_0,y_0) וקיים:
$\lim_{y\to y_0}\lim f_{x\to x_0}(x,y)=\lim_{y\to y_0}\Phi(y)=L_1$ אזי: $L=L_1$.
מסקנה: גבולות נשנים קיימים ו<u>שונים</u> ==> גבול רגיל לא קיים!
משפט היינה: תהה $f:\Omega\to R$ ותהי $M_0(x_0,y_0)$ נקודה שסביבתה המנוקבת מוכלת ב- Ω.
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ אם ורק אם לכל סדרה $M_k(x_k,y_k)$ המקיימת:
א. $\lim_{k\to\infty} M_k(x_k,y_k)=(x_0,y_0)$
ב. $M_0\neq M_k\in\Omega$ לכל k.
מתקיים: $\lim_{k\to\infty} f(M_k)=L$.

רציפות של פונקציות

הגדרה: תהי Ω תת קבוצה של R^n, M_0 נק' ב- Ω. $f:\Omega\to R$ רציפה ב- M_0 אם קיים הגבול:
$\lim_{M\to M_0} f(M)=M_0$.

הגדרה שקולה: $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall M:d(M,M_0)<\delta(\varepsilon)\to\left|f(M)-f(M_0)\right|<\varepsilon$.

תכונות של פונק' רציפות: בדומה לחדוו"א 1.

משפט ערך הביניים: יהי Ω תחום קשיר של R^2 (או ממימד גדול יותר). תהי f רציפה ב- Ω ותהיינה A, B 2 נק' ב- Ω.
מתקיים: לכל מספר ממשי $f(A)<m<f(B)$ קיימת נק' C כך ש- f(C)=m.

משפט ויירשטרס: אם f רציפה בתחום חסום וסגור אזי:
1. היא חסומה בו.
2. היא מקבלת בו ערך מקסימאלי וערך מינימאלי.

נגזרות חלקיות:

הגדרה: תהי $\Omega\in R^2$, $f:\Omega\to R$, (x_0,y_0) נק' ב- Ω. אם קיים הגבול:
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ נסמנו: $f`_x(x_0,y_0)$ או $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ והוא נקרא הנגזרת החלקית של f בנק' (x_0,y_0) לפי המשתנה הראשון.

דיפרנציאביליות

משוואת מישור משיר לגרף של פונקציה בשני משתנים:

$$-f`_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f`_y(x_0,y_0)(y-y_0)+(z-z_0)=0$$

הגדרת דיפרנציאבליות: $f(x,y)$ נקראת דיפרנציאבילית בנק' (x_0,y_0) אם קיימים קבועים A, B ופונק' $\varepsilon(x,y)$ כך שמתקיים לכל (x,y) בסביבת (x_0,y_0):

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\varepsilon(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

כך שמתקיים: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\varepsilon(x,y)=0$.

משפט: אם f דיפ' אזי: $A=f`_x(x_0,y_0)$ ו- $B=f`_y(x_0,y_0)$.

קריטריון לדיפרנציאבליות:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f`_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f`_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

משפט: $f(x,y)$ דיפ' בנק' (x_0,y_0) אם ורק אם קיים לגרף שלה מישור משיק בנק' $(x_0,y_0,f((x_0,y_0))$.

משפט: אם $f(x,y)$ דיפ' בנק' (x_0,y_0) אזי היא רציפה בנק' (x_0,y_0).

הוכחה: צ"ל $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\varepsilon(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=$$

$$=f(x_0,y_0)+A*0+b*0+\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\varepsilon(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})=f(x_0,y_0)$$

משפט: אם $f(x,y)$ דיפ' ב- (x_0,y_0) אזי קיימות $f`_x(x_0,y_0)$ ו- $f`_y(x_0,y_0)$.

הוכחה:

$$f`_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{A(x_0+h-x_0)+B(y_0-y_0)+\varepsilon(x_0+h,y_0)\sqrt{(x_0+h-x_0)^2+(y_0-y_0)^2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{A*h+\varepsilon(x_0+h,y_0)\sqrt{h^2}}{h}=A+\lim_{h\to0}\varepsilon(x_0+h,y_0)\frac{|h|}{h}=A$$

$$f`_x(x_0,y_0)=A$$

באופן דומה עושים עבור הנגזרת לפי y כאשר מתקבל: $f`_y(x_0,y_0)=B$.

<u>שלבים בבדיקת דיפרנציאבליות בנקודה:</u>

1. האם f רציפה ב- (x_0,y_0)? (אם כן ממשיכים).
2. מוצאים את $f`_x, f`_y$ בנקודה (x_0,y_0)
3. משתמשים בקריטריון:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f`_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f`_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

<u>משפט:</u> אם $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנק' (x_0,y_0) אזי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה.

הערה: עבור דיפ' ב- n משתנים נדרוש קיומם של קבועים $A_1...A_n$ ופונק' $\varepsilon(x_1,...,x_n)$ שבגבול שואפת ל-0.

<u>כלל השרשרת:</u> אם $f(x,y)$ דיפ' ב- (x_0,y_0) ו- x(t), y(t) פונק' גזירות ב- t_0 המקיימות: $x(t_0)=x_0$ ו- $y(t_0)=y_0$ אזי: $F(t)=f(x(t),y(t))$ גזירה ב- t_0 ומתקיים:

$$\frac{dF}{dt}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)*\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)*\frac{dy}{dt}(t_0)$$

הוכחה:

$$\frac{dF}{dt}(t_0)=\mathrm{im}_{t\to t_0}\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{f(x(t),y(t))-f(x(t_0),y(t_0))}{t-t_0}=$$

$$=\lim_{t\to t_0}\frac{A(x(t)-x(t_0))+B(y(t)-y(t_0))+\varepsilon\sqrt{...}}{t-t_0}=$$

$$=A*\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}+B*\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}+\lim_{t\to t_0}\frac{\varepsilon(x(t),y(t))\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2+(y(t)-y(t_0))^2}}{t-t_0}=$$

$$=A*\frac{dx}{dt}(t_0)+B*\frac{dy}{dt}(t_0)+\lim_{t\to t_0}\varepsilon(x(t),y(t))\sqrt{(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0})^2+(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0})^2}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)*\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)*\frac{dy}{dt}(t_0)+0\sqrt{x`(t_0)^2+y`(t_0)^2}$$

<u>משפט:</u> אם $x(u,v)$ ו- $y(u,v)$ דיפ' ב- (u_0,v_0) ומקיימות: $x_0=x(u_0,v_0)$ ו- $y_0=y(u_0,v_0)$ ו- $f(x,y)$ דיפ' ב- (x_0,y_0) אזי: $g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$ בעלת הנגזרת החלקית בנקודה:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)*\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)*\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0).$$

אינטגרל תלוי בפרמטר: $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ ונסמן: $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, c\le y\le d\}$

אזי:

1. אם $f(x,y)$ רציפה ב- D אזי F(y) רציפה ב- [c,d].
2. **כלל לייבניץ:** תהי $f:D\to R$ כך ש- $f(x,y)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפות ב-D, אזי הפונק' $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ גזירה ב-(c,d) ומתקיים: $F`(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

הכללה של תכונה 2: נתונה $F(y)=\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$

תהי $f:D\to R$ כך ש- $f(x,y)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפות ב-D ומתקיים:

$u,v:[c,d]\to R$, $a\le u(y)\le b$, $a\le v(y)\le b$ ו- $u(y),v(y)$ גזירות, אזי:

$F(y)$ גזירה בקטע (c,d)

ומתקיים: $\frac{dF}{dy}(y)=\int_{u(y)}^{v(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx+f(v(y),y)*v`(y)-f(u(y),y)*u`(y)$.

הוכחה:

נגדיר: $G(u,v,y)=\int_u^v f(x,y)dx$. G רציפה לפי כל אחד מהמשתנים שלה.

נראה של-G יש נגזרות חלקיות רציפות:

ע"פ המשפט היסודי של החדוו"א: $\frac{\partial G}{\partial v}=f(v,y)$ וכן $\frac{\partial G}{\partial u}=-f(u,y)$

$\frac{\partial G}{\partial y}=\int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}dx$ ע"פ לייבניץ וכן רציפה.

נשים לב כי: $F(y)=G(u(y),v(y),y)$. G בעלת נגזרות חלקיות רציפות ==> דיפ'

ע"פ כלל השרשרת:

$$\frac{dF}{dy}(y)=\frac{\partial G}{\partial u}*\frac{du}{dy}+\frac{\partial G}{\partial v}*\frac{dv}{dy}+\frac{\partial G}{\partial y}=$$

$$=-f(u(y),y)*u`(y)+f(v(y),y)*v`(y)+\int_{u(y)}^{v(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

נגזרת מכוונת:

$\hat{n}=(a,b)$ וקטור יחידה, $f(x,y)$. הנגזרת המכוונת של f בנק' (x_0,y_0) בכיוון $\hat{n}$ היא:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah,y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h}$$

זהו שיפוע משיק למשטח הגרף $z=f(x,y)$ בנקודה ובכיוון המדוברים.

גרדיינט: עבור $f:R^n \to R$ בנק' M_0 זהו הוקטור: $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0))$.

משפט: אם $f(x,y)$ דיפ' בנק' (x_0,y_0) אזי: $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \circ \hat{n}$.

הערה: אם f אינה דיפ', הנוסחה אינה תקפה!

הוכחה:

נתון: $f(x,y)$ דיפ' ב- (x_0,y_0), $\hat{n}=(a,b)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f`_x * ha + f`_y * hb + \varepsilon(x,y)\sqrt{(ha)^2+(hb)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} [f`_x(x_0,y_0) * a + f`_y(x_0,y_0) * b + \varepsilon(x,y)\frac{|h|}{h}] =$$

$$= f`_x(x_0,y_0) * a + f`_y(x_0,y_0) * b = (f`_x, f`_y) \circ (a,b)$$

תכונות הגרדיינט: 1. אם f דיפ' ב- (x_0,y_0) אזי $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0,y_0)$ מקבלת את ערכה המקסימאלי בכיוון הגרדיינט.

הוכחה: f דיפ' ב- (x_0,y_0) ולכן:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \circ \hat{n} = \left|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\right| \left|\hat{n}\right| \cos\theta = |const||1|\cos\theta$$

$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0,y_0)$ מקסימאלי אם ורק אם $\cos\theta$ מקסימאלי וזה אם ורק אם $\cos\theta = 0$ כלומר $\vec{\nabla} f(x_0,y_0) \parallel \hat{n}$.

מסקנות: הירידה החזקה ביותר היא בכיוון $-\vec{\nabla} f$, השיפוע בכיוון $\vec{\nabla} f$ שווה ל- $\left|\vec{\nabla} f\right|$.

2. הגרדיינט ניצב לקוי הגובה של f.

טענה:

יהי $x(t), y(t)$ עקום חלק (ז"א $x`(t), y`(t)$ קיימות) המקיים: $x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0$. תהי $f(x,y)$ פונק' דיפרנציאבילית כזאת ש- $(x(t),y(t))$ זה קו הגובה שלה בנק' (x_0,y_0).

אז $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)$ ניצב למשיק ל- $(x(t),y(t))$.

הוכחה: נתון: $f(x(t),y(t)) = f(x_0,y_0) = const$

צ"ל: $(x`(t_0), y`(t_0)) \perp \vec{\nabla} f(x_0,y_0)$, ז"א צ"ל: $(x`(t_0), y`(t_0)) \circ \vec{\nabla} f(x_0,y_0) = 0$

נגדיר: $g(t) = f(x(t),y(t))$. f דיפ' ולכן $x(t), y(t)$ גזירות ולכן ע"פ כלל השרשרת:

$g`(t) = f`_x(x(t),y(t)) * x`(t) + f`_y(x(t),y(t)) * y`(t)$. אך נתון כי $f(x(t),y(t))$ קבועה ולכן $g`(t_0)=0$ ז"א:

$f`_x(x(t),y(t)) * x`(t) + f`_y(x(t),y(t)) * y`(t) = (x`(t_0), y`(t_0)) \circ \vec{\nabla} f(x_0,y_0) = 0$.

משפט: אם S משטח חלק מהצורה $f(x,y,z)=0$ כך ש-f דיפרנציאבילית, M_0 נק' על S,
אזי: $\vec{\nabla}f(M_0)$ ניצב ל-S.
הוכחה: בדומה למשפט הקודם.

מסקנה: מישור משיק (אם קיים) למשטח $f(x,y,z)=0$ עבור f דיפ' בנק' (x_0,y_0,z_0)
המקיימת $f(x_0,y_0,z_0)=0$ הוא מהצורה:
$f`_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f`_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f`_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$.

משפט: אם $f(x,y)$, $f`_x(x,y)$, $f`_y(x,y)$, $f``_{xy}(x,y)$, $f``_{yx}(x,y)$ רציפות ב-
(x_0,y_0) אזי: $f``_{yx}(x,y)=f``_{xy}(x,y)$.

ובאופן כללי: אם $f\in C^m(M_0)$ אז אין חשיבות לסדר הגזירה בנגזרות המעורבות בנק' M_0
עד סדר m כולל.

משפט הפונקציה הסתומה: תהי $F(x,y)$ מוגדרת במלבן $\begin{matrix} a\le x\le b \\ c\le y\le d\end{matrix}$ ותהי (x_0,y_0) נק'
פנימית של המלבן ונניח כי התנאים הבאים מתקיימים:
1. $F(x_0,y_0)=0$
2. F ונגזרותיה החלקיות מסדר ראשון רציפות ב- (x_0,y_0) (כלומר $F\in C^1$)
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

אזי קיימת סביבה U של (x_0,y_0) שבה מוגדרת פונק' <u>יחידה</u> $y=f(x)$ המקיימת:
1. $F(x,f(x))=0$ ב- x_0 וסביבתה.
2. $f(x_0)=y_0$
3. $f(x)$ רציפה ב- x_0 וסביבתה.
4. $f(x)$ גזירה ברציפות ב- x_0 וסביבתה ומתקיים: $f`(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$.

משפט הפונקציה הסתומה ב-3 משתנים: תהי $F:D\to R$ ו- (x_0,y_0,z_0) נק' פנימית של D כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $F(x,y,z)\in C^1$ ב- (x_0,y_0,z_0) וסביבתה.
3. $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

אזי קיימת סביבה U של (x_0,y_0,z_0) ופונק' <u>יחידה</u> המוגדרת ב-U $z=f(x,y)$ המקיימת:

1. $F(x,y,f(x,y))=0$.
2. $f(x_0,y_0)=z_0$.
3. $f(x_0,y_0)$ רציפה ב- (x_0,y_0).
4. $f(x_0,y_0)$ בעלת נגזרות רציפות ב- (x_0,y_0) וסביבתה ומתקיים:

$f`_x(x,y)=-\frac{F`_x(x,y,z)}{F`_z(x,y,z)}$ (באופן דומה מקבלים את הנ"ח לפי y).

מערכת פונקציות סתומות:

$$F(x,y,z,u,v)=0$$
$$G(x,y,z,u,v)=0$$

רוצים לחלץ את u, v בצורה הבאה:

$$u=\varphi(x,y,z)$$
$$v=\Psi(x,y,z)$$

נסמן $M_0=(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)$.

<u>משפט</u>: תהיינה F, G מוגדרות בסביבה מלבנית של M_0 ונניח כי מתקיים:

1. $F(M_0)=G(M_0)=0$.
2. $F,G\in C^1$ בסביבת M_0 ובנק' עצמה.
3. $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(M_0)\neq 0$ כלומר: $\begin{vmatrix} F`_u & F`_v \\ G`_u & G`_v \end{vmatrix}\neq 0$.

אזי: קיימת סביבה מלבנית V של M_0 ופונק' <u>יחידות</u> $u=\varphi(x,y,z)$, $v=\Psi(x,y,z)$ המוגדרות בה כך שמתקיים:

1. $\begin{matrix} F(x,y,z,\varphi(x,y,z),\Psi(x,y,z))=0 \\ G(x,y,z,\varphi(x,y,z),\Psi(x,y,z))=0 \end{matrix}$ ב- M_0 וסביבתה.
2. $\varphi(x_0,y_0,z_0)=u_0$, $\Psi(x_0,y_0,z_0)=v_0$.
3. φ,Ψ רציפות בסביבת (x_0,y_0,z_0).
4. φ,Ψ הן בעלות נגזרות חלקיות רציפות בסביבת (x_0,y_0,z_0) ואילו נתונות ע"י:

$$u`_x=-\frac{\begin{vmatrix} F`_x & F`_v \\ G`_x & G`_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F`_u & F`_v \\ G`_u & G`_v \end{vmatrix}}.$$

משפט הפונקציה ההפוכה (בשני משתנים):

תהיינה $F,G:\Omega\to R$ 2 פונק' המוגדרות בתחום משותף. תהי (x_0,y_0) נק' פנימית של Ω.

נסמן: $u=F(x,y)$, $v=G(x,y)$.

אם מתקיים: 1. $F,G\in C^1$ בסביבת (x_0,y_0).

2. היעקוביאן $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F`_x F`_v \\ G`_x G`_v \end{vmatrix}\neq 0$ בנק' (x_0,y_0).

אזי קיימת סביבה U של (x_0,y_0) שבה מוגדרות $f(u,v)$, $g(u,v)$ המקיימות:

1. $$\begin{aligned} u&=F(f(u,v),g(u,v)) \\ v&=G(f(u,v),g(u,v)) \end{aligned}$$

2. $f,g\in C^1$ בסביבת (u_0,v_0) כאשר $u_0=F(x_0,y_0)$, $v_0=G(x_0,y_0)$

ומתקיים: $\begin{pmatrix} f`_u & f`_v \\ g`_u & g`_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F`_x & F`_y \\ G`_x & G`_y \end{pmatrix}^{-1}$.

נוסחת טיילור

תהי $f(x,y)\in C^4$ בסביבת (x_0,y_0) . פיתוח טיילור שלה עד סדר 3 הוא:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}[f`_x h+f`_y k]+\frac{1}{2!}[f``_{xx}h^2+2f``_{xy}hk+f``_{yy}k^2]+$$
$$+\frac{1}{3!}[f```_{xxx}h^3+3f```_{xyy}h^2k+3f```_{xyy}hk^2+f```_{yyy}k^3]+R_3$$

כתיב מקוצר לפיתוח טיילור:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^j f(x_0,y_0)+R_n$$

כאשר $(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)$ למשל, פירושו: $f``_{xx}h^2+2f``_{xy}hk+f``_{yy}k^2$

(פותחים סוגריים ומפעילים את אופרטור הנגזרת על הפונקציה).

פיתוח טיילור עובר שלושה משתנים:

$$f(x_0+h,y_0+k,z_0+l)=f(x_0,y_0,z_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z})^j f(x_0,y_0,z_0)+R_n$$

משפט: תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר n+1 בנק' (x_0,y_0). יהי $p(x,y)$ פולינום ב-(x,y) מסדר n. אזי $p(x,y)$ הינו פיתוח טיילור של f עד לסדר n בסביבת (x_0,y_0) אם ורק אם $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-p(x,y)}{(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})^n}=0$.

טענה: נניח ש- $F(x,y)$ הוא פיתוח טיילור של $f(x,y)$ ו- $G(x,y)$ הוא פיתוח טיילור של $g(x,y)$, כך ששני הפיתוחים הם מסדר n לפחות וסביב אותה הנק' (x_0,y_0).
אזי החלק מתוך המכפלה $F(x,y)*G(x,y)$ שהוא פולינום מסדר n, הוא פיתוח טיילור (מסדר n) של הפונק' $f(x,y)*g(x,y)$ סביב הנק' (x_0,y_0).

נקודות אקסטרמום

שלבים במציאת קיצון: 1. מצא נק' בהן $\vec{\nabla} f=0$ או לא קיים.
2. בדוק נגזרות חלקיות מסדר 2.

הגדרה: M_0 היא נק' מקסימום (או מינימום) מקומי של $f(m)$, אם קיימת סביבה של M_0 כך שלכל הנקודות m בסביבה זו מתקיים: $f(m)\le f(M_0)$ ($f(m)\ge f(M_0)$).

משפט (תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום):
אם $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות בנק' (x_0,y_0) והנק' (x_0,y_0) היא נק' אקסטרמום מקומי של $f(x,y)$ אזי $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)=0$. (הדרישה היא רק קיום נ"ח ולא רציפות שלהן).
הערה: תתכן נק' אקסטרמום שבה $\vec{\nabla} f$ אינו קיים.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח ש- (x_0,y_0) היא נק' מקסימום של $f(x,y)$. ז"א $f(x_0,y_0)\ge f(x,y)$. נגדיר: $g(x)=f(x,y_0)$. g מקבלת מקס' ב- x_0.
$g`(x_0)=f`_x(x_0,y_0)$ ולכן ע"פ משפט פרמה מחדו"א 1 נקבל: $g`(x_0)=f`_x(x_0,y_0)=0$.
באופן זהה נראה כי $f`_y(x_0,y_0)=0$.

הגדרה: נקודה בה $\vec{\nabla} f=0$ אך שאינה נק' אקסטרמום נקראת נקודת אוכף.

הגדרה: אומרים שהנק' M_0 היא נק' חשודה לאקסטרמום אם כל הנגזרות החלקיות מתאפסות ב- M_0 או לפחות אחת מהנגזרות החלקיות אינה קיימת ב- M_0.

משפט: מיון נק' קריטיות: תהי $f(x,y)\in C^2$ בסביבת (x_0,y_0) ונניח כי $f`_x(x_0,y_0)=f`_y(x_0,y_0)=0$.

נסמן: $\Delta_1=f``_{xx}(x_0,y_0)$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} f``_{xx} & f``_{xy} \\ f``_{xy} & f``_{yy}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}$ (ז"א: $\Delta_2=f``_{xx}f``_{yy}-(f``_{xy})^2 |_{(x_0,y_0)}$).

אזי: 1. אם $\Delta_1,\Delta_2>0$ <== (x_0,y_0) נק' מינימום.
2. אם $\Delta_1<0,\Delta_2>0$ <== (x_0,y_0) נק' מקסימום.
3. אם $\Delta_2<0$ <== (x_0,y_0) נק' אוכף.
4. אם $\Delta_2=0$ <== לא ידוע.

משפט סילבסטר: תהי A מט' סימטרית ותהי $\Phi(x)$ תבנית ריבועית המוגדרת ע"י A (ז"א $\Phi(x) = \vec{x}^t A\vec{x}$) אז $\Phi(x)$ <u>מוגדרת חיובית</u> (כלומר <u>לכל</u> $\vec{x} \neq 0$ מתקיים $\Phi(x) > 0$) אם ורק אם:
$\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n > 0$ (כאשר Δ_i הוא המינור הראשי בגודל i במטריצה A).

באופן דומה $\Phi(x)$ <u>מוגדרת שלילית</u> (כלומר <u>לכל</u> $\vec{x} \neq 0$ מתקיים $\Phi(x) < 0$) אם ורק אם:
$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, ...$ (כלומר הסימנים מתחלפים כאשר מתחילים ב- $\Delta_1 < 0$).

<u>**הגדרה**</u>: מטריצת **ההסיאן** של f:

$$H(\vec{x}) == \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2}, \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_n x_2}, \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

<u>**משפט (מיון נק' קריטיות)**</u>:
תהי $f: R^n \to R$ פונק' ב- C^2 (נ"ח מסדר 2 רציפות) בסביבת M_0. נניח כי M_0 היא נק' קריטית של f. נסמן ב- Φ את התבנית הריבועית המוגדרת ע"י ההסיאן (H) של f.
(נ"ח רציפות עד סדר שני ולכן H מט' סימטרית). אזי:
אם Φ <u>מוגדרת חיובית</u> ב- M_0 אזי M_0 היא נק' מינימום של f.

אם Φ <u>מוגדרת שלילית</u> ב- M_0 אזי M_0 היא נק' מקסימום של f.
אם Φ <u>מוגדרת מעורבת</u> ב- M_0 אזי M_0 היא נק' אוכף של f.
אם $\det H(M_0) = 0$ אזי לא ידוע (בכל מקרה זה חייב להיות אחד משלושת הנ"ל).

הערה: אם לא ידוע מה קורה בנק', כדאי להסתכל על קווי הגובה של הפונ'.

<u>מציאת אקסטרמום תחת אילוץ</u>

נרצה למצוא $\max f(x,y)$ בתנאי של עקום $g(x,y)=0$ לפיו אנו הולכים.
למעשה אנו מחפשים נק' M_0 על העקום $g(x,y)$ כך שהנגזרת המכוונת של f בנק' M_0 בכיוון המסלול שלנו תהיה 0.
קצת מתמטיקה: כיוון המסלול הוא כיוון המשיק ל- $g(x,y)=0$ (קו גובה של g) ולכן ניצב ל- $\vec{\nabla}g(M_0)$ כלומר שווה למשל ל- $(-g`_y, g`_x)$ (מהדרישה כי המכפלה הסקלרית עם הגרדיאנט של g תיתן 0).
ונעשה את הפיתוח הבא:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M_0)=\vec{\nabla}f\circ\hat{v}=0\rightarrow\vec{\nabla}f\circ\vec{v}=0$$
$$\rightarrow(f`_x,f`_y)\circ(-g`_y,g`_x)=-f`_x g`_y+f`_y g`_x=0$$
$$\rightarrow f`_x g`_y=f`_y g`_x\rightarrow\frac{f`_x}{g`_x}=\frac{f`_y}{g`_y}=\lambda$$

λ נקרא קבוע הפרופורציה – **<u>כופל לגראנז'!</u>**. מתקיים: $\vec{\nabla}f=\lambda\vec{\nabla}g$.

<u>משפט כופלי לגרנז':</u> (עבור 2 משתנים, אילוץ אחד).
תהיינה $f(x,y),g(x,y)\in C^1$ בסביבת (x_0,y_0). נניח כי $g(x,y)$ מקיימת:
1. $g(x_0,y_0)=0$
2. $\vec{\nabla}g(x_0,y_0)\neq 0$

אם לפונק' $f(x,y)$ יש ערך אקסטרמלי תחת האילוץ $g(x,y)=0$ בנק' (x_0,y_0) אזי קיים קבוע λ כך שמתקיים: $\vec{\nabla}f(M_0)+\lambda\vec{\nabla}g(M_0)=\vec{0}$.

<u>שלבי עבודה עם כופלי לגרנז':</u>
1. מגדירים את הפונק' $\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ ואת מערכת המשוואת הבאות:

$$(1)\Phi`_x=f`_x+\lambda g`_x=0$$
$$(2)\Phi`_y=f`_y+\lambda g`_y=0$$
$$(3)\Phi`_\lambda=g(x,y)=0$$

משווא' 1,2 מבטיחות את $\vec{\nabla}f+\lambda\vec{\nabla}g=\vec{0}$ ומשו' 3 מבטיחה את האילוץ.

2. פותרים את מערכת המשוואות למציאת כל הנק' החשודות כאקסטרמום.
3. יוצרים רשימה של הנק' החשודות ומציבים אותן חזרה ל-f על מנת למצוא מקסימום ומינימום.

משפט כופלי לגרנז': (עבור 3 משתנים, שני אילוצים).

תהיינה $f(x,y,z), g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)$ פונק' ב- C^1 בסביבת (x_0,y_0,z_0).

נניח כי g_1, g_2 מקיימות:

1. $g_1(x_0,y_0,z_0)=0, g_2(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $\vec{\nabla}g_1, \vec{\nabla}g_2$ ב- M_0 הינם בלתי תלויים לינארית.

אם לפונק' f יש ערך אקסטרמלי תחת האילוץ $g_1=g_2=0$ בנק' (x_0,y_0,z_0) אזי קיימים קבועים λ_1, λ_2 כך שמתקיים: $\vec{\nabla}f+\lambda_1\vec{\nabla}g_1+\lambda_2\vec{\nabla}g_2=\vec{0}$ בנק' (x_0,y_0,z_0).

מבחינה טכנית: מגדירים: $\Phi(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y)+\lambda_1 g_1(x,y)+\lambda_2 g_2(x,y)$

ופותרים בדיוק כמו במקרה הקודם.

פתרון בעיה של מציאת נק' קיצון גלובאלי או קיצון בכלל בתחום מסויים:

1. נחפש נקודות קריטיות בצורה רגילה (בלי אילוץ) ונבדוק אם הנקודות שנמצאו אכן שייכות לתחום.
2. נחפש נקודות קריטיות עם אילוץ על השפה של התחום.
3. נחפש נקודות קריטיות בנקודות בעייתיות של השפה של התחום (כמו נק' שהן תפר בין שתי פונק' שונות המתארות את השפה).
4. נחשב ערכי פונק' בכל הנק' הקריטיות שנמצאו ונשווה.

אינטגרל כפול

משפט: אם $f(x,y)$ אינטגרבילית רימן ב- Ω אזי היא חסומה שם.

משפט: אם $f(x,y)$ רציפה ב- Ω אזי היא אינטגרבילית רימן שם.

הגדרה: אומרים שהפונק' $f(x,y)$ רציפה כמעט בכל מקום ב- Ω אם אוסף נק' האי-רציפות שלה הוא בעל שטח 0.

משפט: אם $f(x,y)$ רציפה כמעט בכל מקום ב- Ω וחסומה ב- Ω אזי היא אינטגרבילית ב- Ω.

תכונות של פונק' אינטגרביליות:

1. תהיינה $f(x,y)$, $g(x,y)$ פונק' אינטגרביליות ב- Ω אזי:

א. לכל a,b ממשיים, גם הפונק' $a*f(x,y)+b*g(x,y)$ אינטגרבילית ב- Ω ומתקיים:

$$\iint_\Omega (a*f(x,y)+b*g(x,y))dxdy = a*\iint_\Omega f(x,y)dxdy + b*\iint_\Omega g(x,y)dxdy$$

ב. $f(x,y)*g(x,y)$ אינטגרבילית ב- Ω.

ג. אם בנוסף $f(x,y)\le g(x,y)$ לכל (x,y) ב- Ω אזי מתקיים: $\iint_\Omega gdxdy \le \iint_\Omega fdxdy$.

2. תהי $f(x,y)$ אינטגרבילית רימן ב- Ω אזי גם $|f(x,y)|$ אינטגרבילית רימן ב- Ω
ומתקיים: $|\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy| \le \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|dxdy$.

3. אם $f(x,y)$ אינטגרבילית רימן ב- Ω (ולכן חסומה ב- Ω)
נסמן: $m = \inf f(x,y), M = \sup f(x,y)$
ומתקיים: $m * \iint\limits_{\Omega} dxdy \le \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy \le M * \iint\limits_{\Omega} dxdy$.

4. נניח כי $f(x,y)$ אינטגרבילית רימן ב- Ω ונניח כי חילקו את Ω לשני תתי-תחומים: Ω_1, Ω_2 כך ש-

א. Ω_1, Ω_2 תחומים קשירים.

ב. $\Omega_1 \cap \Omega_2$ - עקום בעל שטח 0.

ג. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

אזי $f(x,y)$ אינטגרבילית רימן ב- Ω_1, Ω_2
ומתקיים: $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$.

<u>משפט</u>: תהי $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $[a,b]\times[c,d]$ ונניח כי מתקיים:

1. f אינטגרבילית במלבן, ז"א קיים: $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy \le$.

2. $F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$, ז"א קיים: $\int\limits_a^b dx[\int\limits_c^d f(x,y)dy]$.

<u>משפט פוביני:</u> אם $f(x,y)$ רציפה ב- $\Omega = [a,b]\times[c,d]$
אזי: $\int\limits_c^d dy[\int\limits_a^b f(x,y)dx] = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx[\int\limits_c^d f(x,y)dy]$.

הוכחה: אם f רציפה, אזי היא אינטגרבילית. בנוסף מרציפות של f נובע שהיא רציפה לכל משתנה לחוד, כלומר קיימות $F(x), G(y)$ רציפות ולכן אינטגרביליות וניתן להשתמש במשפט הקודם כדי לקבל את התוצאה הרצויה.

<u>הגדרה:</u> התחום Ω נקרא פשוט ביחס לציר y, אם:

1. קו ישר המקביל לציר y חותך את השפה של Ω בשתי נקודות לכל היותר y_1, y_2 כך ש- $y_1 \le y_2$.

2. Ω חסום מצידיו על ידי קויים ישרים $x = a, x = b$.

אם Ω פשוט בכיוון ציר y, ניתן להגדיר 2 פונק' $u(x), v(x)$ כך ש- $u(x) \le v(x)$ לכל x, u,v מוגדרות ב- $[a,b]$.

הערה: באותו אופן ניתן לדבר על תחום פשוט ביחס לציר x.

משפט: תהי $f(x,y)$ מוגדרת בתחום Ω הפשוט ביחס לציר y ונניח כי מתקיים:

1. f אינטגרבילית ב- Ω. ז"א קיים $\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$.
2. לכל $x\in[a,b]$ קיים האינטגרל: $G(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy$ (u,v הן הפונק' התוחמות את השטח).

אזי: $G(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים: $\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_a^b dx[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy]$.

הערה: אם Ω פשוט ביחס לציר x, $\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$ אינטגרבילית לכל y ב- $[c,d]$.

ניתן לרשום: $\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_c^d dy[\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx]$.

כלל שרשרת ליעקוביאנים: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,y)}*\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}$.

משפט: נניח כי $\begin{matrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{matrix}$ מגדירה העתקה חח"ע מתחום D_1 במישור uv על תחום D במישור xy.

נניח $x,y\in C^1$ ב- D_1 וכן נניח כי $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$ ב- D_1.

תהי $f(x,y)$ רציפה ב-D אזי: $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$.

הערות: 1. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,u)}\rightarrow\begin{vmatrix} x`_u & x`_v \\ y`_u & y`_v \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x`_v & x`_u \\ y`_v & y`_u \end{vmatrix}$.

2. אם $J=0$ בנק' אחת בתחום, המשפט עדיין תקף.

שימושים של אינטגרל כפול:

1. שטח D: $\iint_D dxdy$.
2. נפח החסום בין מישור XY לגרף $z=f(x,y)$: $V=\iint_D f(x,y)dxdy$.
3. מסה של גוף מישורי: $M=\iint_D \rho(x,y)dxdy$.
4. מרכז מסה של גוף מישורי: $C.M_x=\frac{\iint_D x\rho(x,y)dxdy}{M}, C.M_y=\frac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{M}$.

הערה: שימושים אלה נכונים גם לאינטגרלים מסוגים שונים ולא אחזור עליהם בהמשך.

<u>אינטגרל משולש</u>

<u>שיטות חישוב:</u>

1. <u>**חישוב לפי "מקלות" – גוף גלילי:**</u>

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy, \quad u(x,y) \le z \le v(x,y).$$

2. <u>**חישוב "לפי פרוסות":**</u>

$v: a \le z \le b$. לכל קבוע h, המישור $z=h$ חותך את V בתחום מישורי $D(z)$ ואז:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left[\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)dxdy \right] dz.$$

3. <u>**שיטה שלישית:**</u>

אם V נתון ע"י: $\begin{array}{l} u(x,y) \le z \le v(x,y) \\ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \\ a \le x \le b \end{array}$ אזי מתקיים:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int\limits_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right] dx.$$

<u>שינוי משתנים באינטגרל משולש:</u>

נניח: $T: \begin{Bmatrix} x = x(y,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{Bmatrix}$, x,y,z פונק' בעלות נגזרות חלקיות רציפות ב- $\tilde{V}$, T העתקה

חח"ע מ- $\tilde{V}$ <u>על</u> V.

נניח כי בתחום $\tilde{V}$ מתקיים: $J = \begin{vmatrix} x`_u & x`_v & x`_w \\ y`_u & y`_v & y`_w \\ z`_u & z`_v & z`_w \end{vmatrix} \neq 0$.

אם בנוסף $f(x,y,z)$ רציפה ב-V אזי מתקיים:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tilde{V}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \,|J|\, dudvdw.$$

<u>קוארדינטות כדוריות:</u>

מומלץ לשימוש אם התחום מוגבל ע"י ספירות וחרוטים או שיש סימטריה סביב ראשית הצירים.

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\varphi$$
$$J = \rho^2\sin\varphi$$

, עבור כדור מלא התחומים הם: $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho$.

<u>אינטגרל קוי מסוג ראשון</u>

<u>משפט</u>: יהי C עקום הנתון ע"י $x(t), y(t), z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ כך ש- x, y, z גזירות ברציפות בקטע (α, β). אזי העקום C הוא בעל אורך ואורכו נתון ע"י:

$$L = \int_C ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x`(t))^2 + (y`(t))^2 + (z`(t))^2}\, dt .$$

<u>משפט</u>: אם C נתון ע"י $x(t), y(t), z(t)$ גזירות ברציפות עבור $\alpha \le t \le \beta$, $f(x, y, z)$ רציפה ב-C אזי:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x`(t))^2 + (y`(t))^2 + (z`(t))^2}\, dt .$$

<u>הערה:</u> ערכו של האינטגרל $\int_C f$ תלוי בעקום C עצמו אך לא בפרמטריזציה של העקום.

<u>אינטגרל קוי מסוג שני (לפונק' וקטורית)</u>

$x(t), y(t), z(t)$ - פרמט' של עקום C. x, y, z גזירות ברציפות בקטע (α, β) ונניח כי נתונות 3 פונק': $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$. נסמן באופן וקטורי:

$$\vec{f}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$$

$$\int_C \vec{f} \circ \overrightarrow{dr} = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

עקום C – תאור פרמטרי: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

משיק לעקום בנק': $\vec{r}`(t) = (x`(t), y`(t), z`(t))$.

$$\overrightarrow{dr} = (x`(t)dt, y`(t)dt, z`(t)dt) = (dx, dy, dz)$$

מתקיים: $\vec{f} \circ \overrightarrow{dr} = (P, Q, R) \circ (dx, dy, dz) = P dx + Q dy + R dz$.

<u>משפט:</u> אם עקום C נתון ע"י $x(t), y(t), z(t)$ הגזירות ברציפות ב- (α, β) ו- $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ פונק' רציפות ב-C אזי:

$$\int_C \vec{f} \circ \overrightarrow{dr} = \int_C P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t), z(t)) x`(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y`(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z`(t)] dt =$$

$$= \int_C \vec{f}(x(t), y(t), z(t)) \circ \vec{r}`(t) dt$$

הערה: ערכו של האינטגרל הנ"ל תלוי במסלול C ובכיוונו בלבד ולא בפרמטריזציה שלו.

משפט גרין

מבוא:
יהי C מסלול סגור במישור XY הנתון ע"י $x(t), y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.
נגדיר את כיוון המסלול ככיוון עליית הפרמטר t.
אם C מסלול סגור, מקובל לבחור פרמטריזציה כזו כך שעליית הפרמטר t תגרום להליכה על המסלול כך שהתחום החסום ע"י C יהיה לאורך המסלול משמאלנו.

הגדרה: אם D תחום במישור XY ו-C עקום מוכל בשפתו, נאמר של-C כיוון חיובי לגבי D, אם בהליכה על C (עם עליית הפרמטר) התחום D נמצא משמאלנו.

משפט גרין:
יהי D תחום דו-מימדי שבוא איחוד של מספר סופי של תחומים פשוטים.
תהי C השפה של D, המכוונת חיובית לגבי D.
תהיינה $P(x,y), Q(x,y)$ פונק' בעלות נגזרות חלקיות רציפות בתחום פתוח המכיל את D ושפתו.
מתקיים: $\oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (Q`_x - P`_y)dxdy$.

חישוב שטחים בעזרת משפט גרין:
אם שדה $P\hat{i} + Q\hat{j}$ מקיים: $Q`_x - P`_y = 1$ אזי:
$$\oint_c Pdx + Qdy = \iint_D (Q`_x - P`_y)dxdy = \iint_D dxdy = |D|.$$

הגדרה: שדה $P\hat{i} + Q\hat{j}$ כאשר $P(x,y), Q(x,y)$ פונק' רציפות ב- $\Omega \in R^2$ נקרא שדה משמר בתחום Ω אם ערך האינטגרל $\int_{A \to B} Pdx + Qdy$ אינו תלוי במסלול המחבר את הנק' A ו-B (ב- Ω) כל עוד המסלול נמצא ב- Ω.

משפט: תהיינה $P(x,y), Q(x,y)$ פונק' רציפות המוגדרות בתחום פתוח וקשיר של R^2, אזי 3 הטעות הבאות שקולות:
1. לכל עקום סגור C בתחום Ω מתקיים: $\oint_c Pdx + Qdy = 0$.
2. השדה $P\hat{i} + Q\hat{j}$ משמר בתחום Ω.
3. קיימת פונק' פוטנציאל $U(x,y) \in C^1$ ב- Ω המקיימת: $U`_x = P(x,y), U`_y = Q(x,y)$
ומתקיים: $\int_{A \to B} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$.

הגדרה: תחום Ω נקרא פשוט קשר אם כל מסלול סגור בתוכו ניתן לכיווץ לנקודה בתוך Ω.
ב- R^2 זהו תחום בלי חורים.

משפט: תהיינה $P(x,y), Q(x,y)$ פונק' ב- C^1 ב- Ω שהוא תחום פשוט קשר.
אזי הטעות 1,2,3 של המשפט הוקדם שקולות לטענה: $Q`_x = P`_y$.

שמות: 1. $U(x,y)$ כזאת כך ש- $\vec{F}=\vec{\nabla}U$ נקראת פונק' פוטנציאל של $\vec{F}$.

2. $\vec{F}(x,y)=(P,Q)$ המקיים $P`_y=Q`_x$ נקרא חסר מערבולות.

משפטון: תהיינה $P,Q\in C^1$ בתחום $\{\Omega\setminus(0,0)\}$ (כלומר לא כולל הראשית) ונניח כי מתקיים:

1. $\vec{F}$ חסר מערבולות ב- $\{\Omega\setminus(0,0)\}$.
2. $\oint_C Pdx+Qdy=0$ כאשר C מעגל סביב הראשית ב- Ω.

אזי $\vec{F}(P,Q)$ משמר בתחום $\{\Omega\setminus(0,0)\}$.

הגדרה: הצגה פרמטרית של משטח אלו 3 פונקציות: $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$, $u,v\in D$.
u,v נקראים פרמטרים, D הוא תחום הפרמטרים.
$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$.

נורמל למשטח: $\vec{N}=\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v$, $\hat{n}=\frac{\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v}{|\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v|}$ (וקטור יחידה בכיוון הנורמל).

הגדרה: נק' על משטח היא <u>רגולרית</u> אם ורק אם ניתן להציג את המשטח ע"י
$x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ כך ש- $x,y,z\in C^1(D)$ ובנק' זו מתקיים: $\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v\neq 0$. אחרת נק' זו נקראת <u>סינגולרית.</u>

הגדרה: משטח הוא דו-צדדי, אם לאורך כל עקום סגור עליו, כיוון הנורמל נשמר. אחרת יקרא חד-צדדי.

הגדרה: נאמר שהשפה של משטח <u>מכוונת חיובית לגביו</u> אם המשטח נמצא משמאל בהליכה לאורך השפה מהצד של הנורמל.

שטח של משטח: יהי S משטח המוגדר ע"י: $\vec{r}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$,
$u,v\in D$, כך ש- $x,y,z\in C^1(D)$. אזי שטח הפנים של S נתון ע"י:
$|S|=\iint_D|\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v|\,dudv$.

אינטגרל משטחי מסוג ראשון

יהי S משטח דו-צדדי הנתון ע"י הפרמטריזציה: $\vec{r}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$.
$u,v\in D$, $x,y,z\in C^1(D)$. תהי $f(x,y,z)$ פונק' רציפה על פני S.
נסמן את האינטגרל המשטחי מסוג 1 (מפונק' סקלרית) על S ע"י:
$\iint_S f(x,y,z)ds=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,|\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v|\,dudv$.

הערה: שינוי כיוון הנורמל לא משנה את ערך האינטגרל.

אינטגרל משטחי מסוג שני

יהי S משטח דו-צדדי המוגדר ע"י פרמטריזציה: $\vec{r}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$.
$u,v\in D$, $x,y,z\in C^1(D)$.

$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$ שדה רציף על פני S.

$\hat{n}$ - וקטור יחידה בכיוון הנורמל למשטח S בנקודה כללית.

נגדיר את האינטגרל המשטחי מסוג שני (של שדה וקטורי) של $\vec{F}$ על פני S כך:

$$\iint_S \vec{F}\circ\overrightarrow{ds}=\iint_S \vec{F}\circ\hat{n}ds=\iint_D \vec{F}\circ\hat{n}\,|\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v|\,dudv\underset{(*)}{=}\iint_D \vec{F}\circ\frac{\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v}{|\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v|}|\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v|\,dudv$$

$$=\iint_D \vec{F}\circ(\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v)dudv=\iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x`_u & y`_u & z`_u \\ x`_v & y`_v & z`_v \end{vmatrix} dudv$$

$$(*)\hat{n}=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v}{|\vec{r}`_u\times\vec{r}`_v|}$$

הערה: החלפת כיוון הנורמל תגרום לשינוי סימן התוצאה. (יש לשים לב טוב טוב כי בחישוב האינטגרל, הנורמל פונה לכיוון הנכון).

שדות וקטורים

$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$, R,Q,P בעלות נ"ח רציפות.

הביטוי: $div\vec{F}=\vec{\nabla}\circ\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$ מכונה ה<u>דיברגנץ</u> של השדה $\vec{F}$.

שדה וקטורי שהדיברגנץ שלו הוא 0 נקרא "חסר מקורות".

הביטוי: $rot\vec{F}=curl\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ נקרא <u>רוטור</u> של השדה $\vec{F}$.

שדה וקטורי שהרוטור שלו הוא 0 נקרא "חסר מערבולות". בשדה כזה אין קוי שדה "סגורים".

טענה: $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$, שדה בעל נ"ח רציפות עד סדר 2 כולל. אזי: $\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$.

הוכחה:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=(R`_y-Q`_z)\hat{i}+(P`_z-R`_x)\hat{j}+(Q`_x-P`_y)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{F})=R``_{yx}-Q``_{zx}+P``_{zy}-R``_{xy}+Q``_{xz}-P``_{yz}$$

$$\underset{(*)}{=}\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{F})=R``_{yx}-R``_{yx}+Q``_{zx}-Q``_{zx}+P``_{zy}-P``_{zy}=0$$

(*)- בגלל רציפות נ"ח עד סדר שני כולל אין חשיבות לסדר הגזירה בנגזרות המעורבות.

טענה: תהי $f(x,y,z)$ פונק' ב- C^2, אזי: $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f=\vec{0}$.

הוכחה:

$$\vec{\nabla}f=f`_x\hat{i}+f`_y\hat{j}+f`_z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ f`_x&f`_y&f`_z\end{vmatrix}=(f``_{zy}-f``_{yz})\hat{i}+(f``_{xz}-f``_{zx})\hat{j}+(f``_{yx}-f``_{xy})\hat{k}\underset{(*)}{=}0$$

(*)-בגלל רציפות נ"ח עד סדר שני כולל אין חשיבות לסדר הגזירה בנגזרות המעורבות.

הגדרה: תהי $f(x,y,z)$ פונק' סקלרית ב- C^2 - ז"א בעלת נ"ח רציפות עד סדר 2 כולל.
אזי הלפלסיאן של f הוא: $\Delta f=\vec{\nabla}^2 f=\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}f)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

משפט גאוס (נסיך המתמטיקה):

יהי S משטח חלק (איחוד סופי של משטחים חלקים למקוטעין) וסגור התוחם תחום V ב- R^3.
נניח כי הנורמל ל-S בכל נקודה מכוון חיצונית ל-V.
יהי $\vec{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי בעל נ"ח רציפות בתחום המכיל את V עם S.
מתקיים: $\oiint_S \vec{F}\circ\hat{n}ds=\iiint_V(\vec{\nabla}\circ\vec{F})dxdydz$.

<u>תוצאות ממשפט גאוס:</u>

<u>טענה:</u> תהי f פונק' סקלרית בעלת נ"ח רציפות עד סדר 2 (כולל) בתחום פתוח המכיל תחום חסום V ב- R^3. נניח כי מתקיים $\Delta f = 0$ (לפלסיאן) לכל x, y, z ב-V.

אזי: $\oiint\limits_{\partial V = S} \frac{\partial f}{\partial \hat{n}} ds = 0$ כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה בכיוון הנורמל ל- S (השפה הכולאת את V).

הוכחה:

$f \in C^2 \leftarrow$ f דיפרנציאבילית ב-V $\leftarrow \frac{\partial f}{\partial \hat{n}} = \vec{\nabla} f \circ \hat{n}$.

$$\to \oiint\limits_{\partial V = S} \frac{\partial f}{\partial \hat{n}} ds = \oiint\limits_{\partial V = S} \vec{\nabla} f \circ \hat{n} ds = \xrightarrow[(*)]{GaussLaw} = \iiint\limits_{V} \underbrace{(\vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} f)}_{(\Delta f)} dxdydz = \xrightarrow{\Delta f = 0} = 0$$

(*)- $f \in C^2 \leftarrow$ נ"ח של f ב- $C^1 \leftarrow$ $\vec{\nabla} f \in C^1$.

<u>טענה</u>: אם g פונק' סקלרית, $\vec{G}$ שדה וקטורי, $g, \vec{G} \in C^1$ אז מתקיים:

1. $\vec{\nabla} \circ (g\vec{G}) = \vec{\nabla} g \circ \vec{G} + g \vec{\nabla} \circ \vec{G}$.
2. $\vec{\nabla} \times (g\vec{G}) = \vec{\nabla} g \times \vec{G} + g \vec{\nabla} \times \vec{G}$.

<u>טענה</u>: תהי f פונק' סקלרית בעלת נ"ח רציפות עד סדר 2 (כולל) בתחום פתוח המכיל תחום חסום V ב- R^3. נניח כי מתקיים $\Delta f = 0$ (לפלסיאן) לכל x, y, z ב-V, ובנוסף f אינה קבועה,

אזי מתקיים: $\oiint\limits_{\partial V = S} f \frac{\partial f}{\partial \hat{n}} ds > 0$ כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה בכיוון הנורמל ל- S (השפה הכולאת את V).

הוכחה:

$f \in C^2 \leftarrow$ f דיפרנציאבילית ב-V $\leftarrow \frac{\partial f}{\partial \hat{n}} = \vec{\nabla} f \circ \hat{n}$.

$$\to I = \oiint\limits_{\partial V = S} f \frac{\partial f}{\partial \hat{n}} ds = \oiint\limits_{\partial V = S} f \vec{\nabla} f \circ \hat{n} ds = \xrightarrow[(*)]{GaussLaw} = \iiint\limits_{V} \vec{\nabla} \circ (f \vec{\nabla} f) dxdydz$$

$$\to \vec{\nabla} \circ (f \vec{\nabla} f) = (\vec{\nabla} f \circ \vec{\nabla} f) + f(\vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} f) = |\vec{\nabla} f|^2 + f \Delta f = |\vec{\nabla} f|^2 + 0$$

$$\to I = \iiint\limits_{V} |\vec{\nabla} f|^2 \, dxdydz \underset{(**)}{>} 0$$

(*)- $f \in C^2 \leftarrow$ נ"ח של f ב- $C^1 \leftarrow$ $\vec{\nabla} f \in C^1$.

(**)- f אינה 0 בכל נקודה.

<u>משפט סטוקס:</u>

יהי S משטח דו-צדדי חלק למקוטעים ששפתו C חלקה למוקטעין.

נניח C מכוון חיובית לגבי S (כלומר המשטח משמאל לכיוון ההליכה על C).

יהי $\vec{F}$ שדה וקטורי בעל נ"ח רציפות בתחום פתוח המכיל את S, C.

מתקיים: $\oint\limits_{C} \vec{F} \circ \overrightarrow{dr} = \iint\limits_{S} \vec{\nabla} \times \vec{F} \circ \overrightarrow{ds}$.

שדה משמר ב- R^3

<u>הגדרה:</u> שדה $\vec{F}$ נקרא משמר בתחום V, אם $\int_C \vec{F}\overrightarrow{dr}$ אינו תלוי במסלול עצמו, אלא רק בקצותיו.

<u>תזכורת:</u> <u>תחום פשוט קשר ב- R^3</u>, הוא תחום כזה שכל מסלול סגור בתחום ניתן לכיווץ באופן "רציף" לנקודה בתחום, כך שבכל רגע המסלול נמצא כולו בתחום.

<u>משפט</u>: אם $\vec{F}$ ב- C^1 ב-V, התנאים הבאים שקולים:
1. $\oint_C \vec{F}\circ\overrightarrow{dr}=0$ לכל $C\in V$.
2. $\int_C \vec{F}\overrightarrow{dr}$ כאשר $C\in V$ (C לאו דווקא מסלול סגור) אינו תלוי במסלול אלא רק בקצותיו (ז"א $\vec{F}$ שדה משמר).
3. קיימת פונק' $U(x,y,z)$ ב- C^1 ב-V כך ש- $\vec{F}=\vec{\nabla}U$ ומתקיים:
$\int_{A\to B}\vec{F}\overrightarrow{dr}=U(B)-U(A)$.

<u>משפט</u>: אם V פשוט קשר, $\vec{F}$ ב- C^1 (בעל נ"ח רציפות) ב-V אזי:
התנאים 1,2,3 של המשפט הקודם שקולים (כלומר אם ורק אם) לתנאי: $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$.

חשוב לזכור: $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ אינו תנאי מספיק כדי שהשדה יהיה משמר!

<u>משפט</u>: אם $\vec{F}\in C^1$ ב-{ציר Z}\V (כלומר V ללא ציר Z) ומתקיים $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ ב- {ציר Z}\V ונניח C – מסלול סגור המקיף את ציר Z פעם אחת נגד כיוון השעון.
אזי אם $\alpha=\oint_C \vec{F}\circ\overrightarrow{dr}$, אז לכל מסלול סגור L המקיף את ציר Z פעם אחת נגד כיוון השעון מתקיים $\oint_L \vec{F}\circ\overrightarrow{dr}=\alpha$.
אם $\alpha=0$ אזי $\vec{F}$ שדה משמר ב- {ציר Z}\V.

כדאי לזכור: אם $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ אזי $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}_1+\vec{\nabla}\times\vec{F}_2$.

<u>משפט גאוס דו-מימדי</u> (לא בדיוק בחומר, אך מומלץ לדעת – שימושי):
יהי C – עקום סגור חלק עם פרמטריזציה $(x(t),y(t))$ כאשר x,y בעלי נגזרות רציפות.
יהי D התחום החסום ע"י C ו- $\hat{n}$ <u>נורמל ל-C</u> המכוון חיצונית ל-D וכן <u>C מכוון חיובית ל-D</u>.
נניח $\vec{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}$, $\vec{F}\in C^1$ בתחום פתוח המכיל את $C\cup D$.
אזי מתקיים: $\oint_C(\vec{F}\circ\hat{n})dr=\iint_D(P`_x+Q`_y)dxdy$.

שימו לב: המשפט קושר בין אינטגרל <u>קוי מסוג 1</u> לבין אינטגרל כפול.