פתרון בוחן אמצע חדו"א 2מ קיץ תשס"ה 28/8/2005

נוסח הבוחן :

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה

יש לשמור על מחברת הבחינה בשלמותה. אין להוסיף או לתלוש ממחברת הבחינה דפים.

נא להשתמש אך ורק בעט כחול או שחור. אין להשתמש בעפרון.

משך הבחינה 90 דקות

28.8.2005

חדו"א 2מ' - 104011 –
בוחן אמצע סמסטר – קיץ תשס"ה

הנחיות

1) כל ההנחיות בטופס זה שהן בלשון זכר מיועדות כמובן גם לסטודנטיות.
2) נא לכתוב בכתב יד ברור, כתיבה לא ברורה עלולה לגרור אי קבלת ניקוד על השאלה.
3) יש לרשום על כל אחד מעמודי המחברת את שם הנבחן/ת ומספר הסטודנט.
4) השימוש בכל חומר עזר **אסור**, כמו כן אסור השימוש במחשבונים ו/או טלפונים סלולריים.
5) יש לנמק כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב.

שאלה מס' 1: (25%)

נתונים שני הישרים הבאים:
$$l_1=\{x=2+t,\ y=1+2t,\ z=1+t,\ -\infty<t<\infty\}$$
$$l_2=\{x-y+2z=2\ ;\ x-z=1\}$$

א) (15%) מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $(1,0,-2)$ ומקביל לשני הישרים.

ב) (10%) מצא את משואת הישר l_2 בצורה פרמטרית. האם הישרים l_1 ו- l_2 נחתכים. אם כן מצא את נקודת החיתוך שלהם.

שאלה מס' 2 : (20%)

א) נסח את משפט הפונקציות הסתומות עבור המשואה $F(x,y)=0$.

ב) נתונה המשואה : $x^3+y^3-3xy=0$. מצא נקודה: $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ שבסביבתה המשואה מגדירה פונקציה סתומה $y=f(x)$ כך ש: $f'(x_0)=0$.

שאלה מס' 3 : (15%)

הראה כי המשטחים $u_1:\{(x,y,z);\ x^2+y^2=C\}$ ו- $u_2:\{(x,y,z);\ \frac{y}{x}+4z^2=D\ ,\ x>0\}$ ניצבים זה לזה (כאן $D,C>0$ קבועים).

שאלה מס' 4 : (15%)

נתונה הפונקציה: $u(x,t)=f(x-2\sqrt{2}\,t)+g(x+2\sqrt{2}\,t)$ כאשר הפונקציות f ו- g הן בעלות נגזרות רציפות עד סדר שניים (כולל). אם הפונקציה u מקיימת את המשואה הבאה: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ מה גודלה של α ? נמק!

שאלה מס'5: (25%)

נתונה הפונקציה: $f(x,y,z)=x-2y+3z$.

מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר שמקבלת f בתחום V, כאשר V מוגדר כדלקמן: $V=\{(x,y,z)\mid \frac{x^2+y^2}{4}+z^2\le 1\}$.

בהצלחה

1. א. $l1:(2,1,1)+(1,2,1)t, t\in R$

נמצא משוואת l2:

$l2:(1,-1,0)+(1,3,1)s, s\in R$.

נורמל של מישור שמקביל ל 2 הישרים ניצב לשניהם ולכן הוא יתקבל מהמכפלה הוקטורית ביניהם:

$$\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=(-1,0,1)$$

לכן המישור הוא מסוג:-x+z+D=0 . נציב בוא את הנקודה (1,0,-2)שהוא עובר בה ונקבל D=3.

<=משוואת המישור היא –x+z+3=0.

ב. תצוגה פרמטרית של l2:

$l2:(1,-1,0)+(1,3,1)s, s\in R$.

הישרים אכן נחתכים. הם לא מקבילים, לכן נשווה את הקואורדינטות שלהם:

$$\begin{cases} 2+t=1+s \\ 1+2t=-1+3s \\ 1+t=s \end{cases}$$

נקבל ש s=0, t=-1 מקיימים את מע' המשוואות, ולכן נק' החיתוך היא (1,-1,0).

2. א. ניסוח משפט הפונקציות הסתומות – <u>מתוך הסיכום שהכין הלפ:</u>

תהי $F(x,y)$ פונקציה שמוגדרת בנקודה (x_0,y_0) ובסביבתה. נניח שמתקיים:

א. $F(x_0,y_0)=0$,

ב. F בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0,y_0) ובסביבתה,

ג. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

אזי קיימת סביבה של (x_0,y_0) שבה המשוואה $F(x,y)=0$ מגדירה פונקציה יחידה $f(x)$ שמקיימת:

1. $F(x,f(x))\equiv 0$ לכל x בסביבת x_0,
2. $y_0=f(x_0)$,
3. f רציפה ב-x_0 ובסביבתה,
4. f גזירה ברציפות ב-x_0 ובסביבתה, ומתקיים:

$$f'(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

ב.נתונה המשוואה $x^3+y^3-3xy=0$. מצא נקודה שונה מהראשית שבסביבתה המשוואה מגדירה פונק' סתומה.

פתרון סופי באדיבות הלפ:

2 נקודות אפשריות:

$$\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right)\ ,\ \left(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2}\right)$$

3. נתון:

$$u1:\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=C\}$$
$$u2:\{(x,y,z)\mid y+4xz^2-Dx=0, x>0\}$$

צ.ל. ששני המשטחים ניצבים.

פתרון: המשטחים הם פולינומים ולכן לפי משפט דיפרנציאבילים. לכן הנורמל לשניהם הוא הגראדיאנט שלהם. אם הם ניצבים אז גם הגראדיאנטים שלהם ניצבים והמכפלה הוקטורית של הגראדיאנטים שווה ל0.

$$\vee u1=(2x,2y,0)$$
$$\vee u2=(4z^2-D,1,4x)$$
$$=>*\vee u1\circ\vee u2=8xz^2-2D+2y)$$

לפי u2, מתקיים $4xz^2=Dx-y$. נציב ב * ונקבל:

$$\vee u1\circ\vee u2=2(Dx-y)-2D+2y=0$$

הראנו שהמכפלה הסקלרית של בין הניצבים למשטחים שווה 0, ולכן הם ניצבים לכל נקודה במישור אותה הם מקיימים. מש"ל.

4. נסמן:

$$n(x,t)=x-2\sqrt{2}$$
$$m(x,t)=x+2\sqrt{2}$$
$$=>u(x,t)=f(n(x,t))+g(m(x,t))$$

צ.ל. מהי אלפא שמקיימת $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

נתחיל לגזור:

$$*\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial n}(2\sqrt{2})+\frac{\partial g}{\partial m}(-2\sqrt{2})$$
$$=>\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial^2 g}{\partial m^2}\frac{\partial m}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial n}8+\frac{\partial g}{\partial m}8$$
$$*\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial n}1+\frac{\partial g}{\partial m}(-1)$$
$$=>\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\frac{\partial n}{\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial m^2}\frac{\partial m}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial n}1+\frac{\partial g}{\partial m}1$$

<= $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ מתקיים עבור אלפא=8.

5. נתונה הפונק':

$$f(x,y,z)=x-2y+3z$$

$$f(\max)=?,\ f(\min)=?$$

בתחום:

$$V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+4z^2\le 4\}.$$

פתרון:

* למציאת נקודות קיצון מקומיות נגזור את הפונקציה ונדרוש נ"ח שוות ל0, אך זו פונקציה ליניארית ולכן אין אף נקודה כזו.

$$f(x,y,z)=x-2y+3z$$

$$\begin{cases} f_x=1\neq 0 \\ f_y=-2\neq 0 \\ f_z=3\neq 0 \end{cases}$$ <= אין נקודת קיצון מקומית.

* נמצא נק' חשודות על דפנות התחום. נבנה פונק חדשה:

$$\Phi(x,y,z,\lambda)=x-2y+3z+\lambda(x^2+y^2+4z^2-4)$$

נדרוש נ"ח שוות ל 0 ונקבל מע' משוואות:

$$\begin{cases} \Phi_x=1+2\lambda x=0 \\ \Phi_y=-2+2\lambda y=0 \\ \Phi_z=3+8\lambda z=0 \\ x^2+y^2+4z^2-4=0 \end{cases}$$ לכן: $$\begin{cases} x=\dfrac{-1}{2\lambda} \\ y=\dfrac{1}{\lambda} \\ z=\dfrac{-3}{8\lambda} \end{cases}$$ נציב באילוץ ונקבל:

$$\left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2+4\left(\frac{-3}{8\lambda}\right)^2=4$$ <= $$\lambda=\pm\sqrt{\frac{29}{64}}=\pm\frac{\sqrt{29}}{8}$$. נציב:

$$\begin{cases} x=\dfrac{-1}{2}*\dfrac{\pm 8}{\sqrt{29}}=\pm\dfrac{\pm 4}{\sqrt{29}} \\ y=1*\dfrac{\pm 8}{\sqrt{29}}=\dfrac{\pm 8}{\sqrt{29}} \\ z=\dfrac{-3}{8}*\dfrac{\pm 8}{\sqrt{29}}=\dfrac{\pm 3}{\sqrt{29}} \end{cases}$$

נבדוק כל נקודה שקיבלנו (זוכרים גם את (0,0,0), ונציב בפונק' כדי לדעת איזו מקס' ואיזו מינ'.

נציב ונקבל:

$$f(x,y,z)=x-2y+3z$$

$$f(\min)=f_{\left(\frac{-4}{\sqrt{29}},\frac{8}{\sqrt{29}},\frac{-3}{\sqrt{29}}\right)}=\frac{-4}{\sqrt{29}}-\frac{16}{\sqrt{29}}-\frac{9}{\sqrt{29}}=-\sqrt{29}$$

$$f(\max)=f_{\left(\frac{4}{\sqrt{29}},\frac{-8}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}}\right)}=\frac{4}{\sqrt{29}}+\frac{16}{\sqrt{29}}+\frac{9}{\sqrt{29}}=\sqrt{29},$$