

1. כל הטענות הבאות לא נכונות. מצא דוגמא נגדית, רשום רק תשובה סופית.

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

דוגמא נגדית:

$$a_n = 1 + (-1)^n \text{ ו } b_n = 1 - (-1)^n$$

כי מכפלתם אמנם שווה זהותית ל 0, אך אף אחת מהן לא מתכנסת.

ב. אם $\forall n, a_n > 0$ ו $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

דוגמא נגדית:

מתכנסת ל 1 וממלאת את כל התנאים הנתונים. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

ג. אם a_n ו b_n מתכנסות במובן הרחב, אז $\{a_n b_n\}$ גם.

דוגמא נגדית: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}, b_n = n$.

a_n מתכנסת ל 0 ו b_n מתכנסת לאינסוף, אך מכפלתם לא מתכנסת, גם לא במובן הרחב.

2. א. צ.ל.: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{2n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{2n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{2n^4+n}}$

התשובה היא $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ופותרים לפי משפט הסנדביץ'.

ב. לא זוכר. התשובה שלי: $\frac{1}{2\sqrt{9}}$. פותרים ע"י הכפלה בצמוד ושימוש בזהות טריגו', גם $\frac{1}{6}$ נכון.

3. הוכח לפי הגדרה ש $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

מוכיחים לפי הגדרה.

4. נתון $f(x)$ רציפה ב $[2, \infty)$, ונתון: $f(2) = 1$ ו $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$. הוכח שקיימת נק C כך ש $f(C) = 3$.

פותרים לפי משפט עה"ב.

מראים (בעזרת הגדרת הגבול) שיש שתי נקודות בקטע הסגור, שבאחת ערך הפונקציה קטן מ 3 ובשנייה ערך הפונקציה גדול מ 3, ולכן לפי משפט עה"ב קיימת נק' C בקטע הפתוח בו מתקיים מש"ל לפי משפט עה"ב.