version 1.2

סיכום קורס אלגברה 1

104005

החומר נלקח מתירגוליו של דניאל רבייב

Or.Tzafrir
Or.Tzafrir@Gmail.com
sort@t2.technion.ac.il

1. <u>**מספרים מרוכבים**</u>
- $i=\sqrt{-1}$
- $z=a+bi$
- $i^{4k}=1$
- $i^{4k+1}=i$
- $i^{4k+2}=-1$
- $i^{4k+3}=-i$
- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
- **הגדרת צמוד:** $\bar{z}=a-bi$
- **חילוק מספרים מרוכבים:** בחילוק מספרים מרוכבים מכפילים בצמוד של המכנה, ודואגים שלא נשארים מס' מרוכבים במכנה, הסבר: $\frac{z}{w}=\frac{z}{w}*\frac{\bar{w}}{\bar{w}}$
- הגדרה: $r=\sqrt{a^2+b^2}=|w|$
- הגדרה: $\phi=artan\left(\frac{b}{a}\right)$
- $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\,cis(\theta)$
- $z^n=w=r\,cis(\theta),\ z=\sqrt[n]{r}*cis\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$
- $\frac{r_1 cis(\phi_1)}{r_2 cis(\phi_2)}=\frac{r_1}{r_2}*\mathrm{cis}(\phi_1-\phi_2)$
- אם $\propto$ הוא שורש מריבוי l של $p(x)$. אז $\bar{\propto}$ הוא גם שורש מריבוי l, בתנאי שכל המקדמים של $p(x)$ הם מקדמים ממשיים.
- כל פולינום ממעלה אי זוגית, קיים לו לפחות שורש ממשי אחד.
- אם אני מסמן ש: $Z=a+bi, a\in\mathbb{R},\ bi\in\mathbb{C}$. ויוצא לי $b=0$. אז אם אני מציב אח"כ ויוצא לי $a=5+4i$. אז אני יודע שהשורש הזה לא יכול להיות, מכיוון שאני יודע שאמור לצאת לי מס' מרוכב ולא ממשי. ולכן אני יכול "לוותר" על השורש הזה.
- אם $\propto$ הוא שורש של $p(x)$ מריבוי l, אז: $p(x)=(x-\propto)^l Q(x)$

2. <u>**מטריצות**</u>
- מט' היחדיה: $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
- מט' סקלרית: αI
- מט' אלכסונית: $D=\begin{pmatrix}\propto_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&\propto_n\end{pmatrix}$
- מט' סימטרית: $A^t=A$, $a_{ij}=a_{ji}$
- מט' אנטי-סימטרית: $A=-A^t$, $a_{ij}=-a_{ji}$, אלכסון של אפסים.
- מט' משולשת **תחתונה**: $b_{ij}=0 \Leftarrow i>j$, $B=\begin{pmatrix}*&0&0\\ *&*&0\\ *&*&*\end{pmatrix}$, $*\neq 0$
- מט' משולשת **עליונה**: $C_{ij}=0 \Leftarrow i<j$, $C=\begin{pmatrix}*&*&*\\0&*&*\\0&0&*\end{pmatrix}$, $*\neq 0$
- חיבור או חיסור של מט' סימטריות <= מט' סימטרית.
- חיבור או חיסור של מט' אנטי-סימטריות <= אנטי סימטרית.
- חיסור או חיסור של מט' סימטרית ומט' אנטי סימטרית <= הכל.
- מכפלת אלכסוניות <= אלכסונית.
- $tr(A-B)=tr(B-A)$

- $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$
- לכל מט' ריבועית A_{nxn} מתקיים:
  - $A + A^t$ = מט' סימטרית.
  - $A - A^t$ = מט' אנטי-סימטרית.
- אם יש 2 מט', אחת סימטרית והשנייה אנטי-סימטרית, והן מתחלפות בכפל. אז תוצאת הכפל היא אנטי-סיטרית.
- סכום של מט' משולשת עליונה <= מט' משולשת עליונה.

3. **פולינומים**
- כאשר ידוע לי אחד משורשי הפולינום, אז אני יכול לעשות חילוק ערוך, ובכך להקטין את מעלת הפולינום.
- ויטה:

  עבור הפולינום: $P(x) = x^n + ax^{n-1} + \cdots + cx^0$ מתקיים:
  1. סכום השורשים = $(-1)^n c$
  2. מכפלת השורשים = $-a$
- **הניחוש האינטיליגנטי** – עבור הפולינום $P(x) = a_n q^n + \cdots + a_0$. לוקחים את המחלקים השלמים של a_n ו- a_0. המועמדים לשורשים הם: $\frac{p}{q}$, כאשר p הם המחלקים של a_0, ו- q הם המחלקים של a_n. מציבים את כל המועמדים בפולנים $P\left(\frac{p}{q}\right)$, ואם אחד המועמדים מצליח לאפס את הפולינום, אז המועמד הזה הוא באמת שורש.

4. **פעולות אלמנטריות על שורות של מטריצה**
   1. החלפת שורות
   2. כפל שורה בסקלר $\propto \neq 0$
   3. הוספה לשורה כפולה של שורה אחרת.
- למט' שקולות שורה יש את אותה הדרגה.
- דרגה העמודות = דרגת השורות
- **אסור למחוק שורה אפסים**

5. **מערכת משוואות**
- מערכת הומוגנית: $A\overline{x} = 0$
- מערכת לא הומוגנית: $A\overline{x} = b, b \neq 0$
- נסמן: X פיתרון כללי למער' לא הומוגנית, $\propto x_H$ פיתרון כללי מערכת הומוגנית, x_p פיתרון פרטי מערכת לא הומוגנית. אז מתקיים:

$$x = \propto x_H + x_p$$

- בהנתן לי 2 פיתרונות פרטיים (x_{p1}, x_{p2}) למערכת הלא המוגנית, אז אני יכול להסיק על הפיתרון הכללי של המערכת ההומוגנית (x_H) :
  - $x_H = x_{p1} - x_{p2}$
- מס' דרגות החופש = $n - rank(A)$
- סוגי פיתרונות:
  1. פיתרון יחיד: $n = rank(A) = rank(A^*)$
  2. אינסוף פיתרונות: $n > rank(A) = rank(A^*)$
  3. אין פיתרון: $rank(A) \neq rank(A^*)$

6. **מרחב ווקטורי**
- תנאים לקיום מרחב ווקטורי:
  1. $v + w \in \overline{V}$
  2. $w + v = v + w$
  3. $(u + v) + w = u + (v + w)$

4. $v+\overline{0}=v$
5. $v-v=\overline{0}$
6. $\propto v\in\overline{V}$
7. $(\propto+\beta)v=\alpha v+\beta v$
8. $(\propto\beta)v=\alpha(\beta v)$
9. $1*v=v$
10. $\propto(u+v)=\propto u+\propto v$

- תנאים לקיום תת מרחב וקטורי:
  1. $\overline{0}\in\overline{V}$
  2. $\forall u,v\in\overline{W}, u+v\in\overline{W}$
  3. $\forall\propto\in F, u\in\overline{W},\propto u\in\overline{W}$
- $u\cup w$ תמ"ו של $\overline{V}$ $\Leftrightarrow$ $u\subseteq w$ או $u\supseteq w$
- לרוב $u\cap w$ מהווה תמ"ו.
- מרחב השורות של A^t = מרחב העמודות של A
- מרחב העמודות של A^t = מרחב השורות של A
- למט' שוקולות שורה אותו מרחב שורות.
- אוסף הפיתרונות של $\overline{w}$ של המערכת ההומוגנית $A\overline{x}=\overline{0}$ הוא תת מרחב וקטורי של $\mathcal{F}^n$.
- אם שואלים האם הקב' b נפרשת ע"י הפריסה A. אז אני פותר את מערכת המשוואות $Ax=b$, ואני רואה האם קיים פיתרון למערכת המשוואות.

7. **<u>ת"ל ובת"ל ופריסה</u>**

- הגדרה: **ת"ל**: קיימים $\propto_1 V_1+\cdots+\propto_n V_n=0$ כך **שלא** כל ה- $\propto$-ות הם אפס.
- הגדרה **בת"ל**: קיימים $\propto_1 V_1+\cdots+\propto_n V_n=0$ כך **שכן** כל ה- $\propto$-ות הם אפס.
- אם מבקשים ממני לבדוק האם הקב' היינה ת"ל או בת"ל. אז אני משטח את הקבי לתוך מטריצה. אני מדרג את המטריצה. ואם יש לי שורות אפסים הקב' היא ת"ל, ובת"ל אם אחרת.
- אם נתונים לי וקטורים בצורה כללית $(u,w,v\ \dots)$, אז אני צריך לעבוד לפי הדג' הבאה:

  האם הקב' $\{u+v+w, v-w, 2w\}$ בת"ל?

  פיתרון:

$$\propto_1(u+v+w)+\propto_2(v-w)+\propto_3(2w)=0$$
$$u(\propto_1)+v(\propto_1+\propto_2)+w(\propto_1-\propto_2+2\propto_3)=0$$
$$\propto_1=0,\propto_1+\propto_2=0,\propto_1-\propto_2+2\propto_3=0$$
$$\propto_1=\propto_2=\propto_3=0$$

מכיוון שכל ה- $\propto$-ות שוות אפס, אז הקב' בת"ל.

- אם שואלים אותי האם הווקטור v הוא נפרס ע"י הקב' הפורסת $B=\{u_1,\dots,u_n\}$. אז אני צריך לחפש α-ות כחה שאני אקבל: $\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n=v$.

  אם אני מצליח למצוא α-ות שכאלה, אז הווקטור v אכן נפרש ע"י הקב הפורסת B.

8. **<u>בסיס ומימד</u>**

- הגדרה: $B=\{V_1,\dots,V_n\}$ נקרא **בסיס** אם B קב' פורסת ובת"ל.
- הגדרה: מס' הווקטורים בבסיס B נקרא **המימד** של V, ומסומן $\dim V$.
- משפטים:

  V מ"ו מעל F, $\dim V=n$, אזי:
  1. כל קב' המכילה יותר מ- n וקטורים היא ת"ל.
  2. כל קב' המכילה פחות מ- n וקטורים היא לא קב' פורסת.
  3. כל קב' פורסת המכילה n וקטורים היא בסיס.
  4. כל קב' בת"ל המכילה n וקטורים היא בסיס.
  5. אם $v\subseteq w$ תמ"ו, אז $\dim w\le\dim v$, ואם $\dim w=\dim v$ אז $w=v$.

- אם נתון לי קב' פורסת ואני מחפש בסיס. אז אני צריך ל"זרוק" את כל הווקטורים הת"ל, ולהשאר רק עם בת"ל. ומה שקיבלתי זה בעצם הבסיס, כאשר הגודל הוא המימד.
- משפט המימדים: $\dim(u+w)=\dim u+\dim w-\dim(u\cap w)$
- המימד של מרחב הפולינומים $P_n[x]$ הוא $n+1$.
- מימד המט' M_{nxk} הוא $n*k$.

שימוש במשפט:

1. מוצאים איבר כללי ב- u ואיבר כללי ב- w, עם אותיות שונות. משווים ומקבלים משוואות עם אילצוים, ומשם ממשיכים לפתור את זה.
2. במרחב אחד נמצא איבר כללי ובמרחב השני אילוצים, ו"נכריח" אותם על האיבר הכללי.

<u>דג:</u>

למצוא בסיס ל- $u,w,u\cap w,u+w$

$u=sp\ \{(1,1,2,3),(2,1,1,0),(7,4,5,1),(3,2,3,2)\}$

w = מרחב הפיתרונות של המערכת ההומוגנית:

$$4x-y-2w=0$$
$$4x-y+z-2w=0$$
$$8x-2y+z-4w=0$$

<u>פיתרון:</u>

דירוג u:

$$\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&1&1&0\\7&4&5&1\\3&2&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{מדורג}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן $\dim u=3$

והבסיס הוא: $\{(1,0,-1,0),(0,1,3,0),(0,0,0,1)\}$

דירוג w:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4&-1&0&-2&0\\4&-1&1&-2&0\\8&-2&1&-4&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{מדורג}}\left(\begin{array}{cccc|c}4&-1&0&-2&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

ולכן $\dim w=4-2=2$

מכיוון שאני מחפש את הפיתרונות, אז הבסיס הוא:

$$\begin{cases}4x-y-2w=0\\ z=0\end{cases}$$

עכשיו אני הגעתי לשלב האילוצים:

$(x,y,z,w)=(x,4x-2w,0,w)\ =x(1,4,0,0)+w(0,-2,0,1)$

לפי משפט, בגלל שהמימדים שווים. אז אני יודע שהבסיס של w הוא

$sp\ \{(1,4,0,0),(0,-2,0,1)\}$

<u>$u\cap w$</u> - לוקחים איברי כללי ומאלצים אותו לתנאים.

$a(1,0,-1,0)+b(0,1,3,0)+c(0,0,0,1)=(a,b,-a+3b,c)$

אילוצים מ- w:

$$\begin{cases}-a+3b=0\\ b=4b-2c\end{cases}$$

$$a=3b,c=\frac{11}{2}b$$

אחרי הצבה נקבל בסיס שהוא: $\{(6,2,0,1)\}$

$\dim u\cap w=1$

<u>$w+u$</u>

$\dim(u+w)=3+2-1=4$

מכיוון שקיים שיוון במימדים:

$\dim P_3[x]=\dim(u+w)=4$

אז כל בסיס ל- $P_3[x]$ הוא בהכרח בסיס ל- $u+w$, ובפרט $\{1,x,x^2,x^3\}$ הוא בסיס.

9. **<u>וקטור קורדינטות</u>**

<u>הגדרה</u>

$B=\{V_1,\dots,V_n\}$ בסיס. ווקטור הקורדינטות של

$w=\alpha_1 V_1+\cdots+\alpha_n V_n$

ב- $\mathbb{R}^n$ לפי בסיס B הוא:

$$[w]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

<u>דג':</u>

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\overline{V}=sp(B)$$

$$A=\begin{pmatrix}1&7\\1&-1\end{pmatrix}$$

מצא את ווקטורי הקורדינטות של A בבסיס B.

<u>פיתרון</u>

מנסים למצוא את המקדמים של הבסיס שאיתם ניתן להגיע ל- A:

$$A=2\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^4\ni[A]_B=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\0\end{pmatrix}$$

01. **<u>מטריצות הפיכות</u>**

- הבאים שקולים:
  1. A הפיכה.
  2. הדרגה של A_{nxn} היא n.
  3. למערכת $Ax=b$ יש פיתרון יחיד לכל b.
  4. A שקולת שורות ל- I.
- מכפלה של מט' הפיכות היא הפיכה.
- אם A, B מט' ריבועיות כך $A*B$ הפיכה, אז גם A וגם B הפיכות.
- אם A היא הפיכה, אז A^t הפיכה.
- המט' ההפיכות אינן מ"ו, מפני שהן אינן סגורות לחיבור.
- $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$
- $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$
- $|A|=0$ <= המט' A **לא** הפיכה.
- $|A|\neq 0$ <= המט' A **כן** הפיכה.
- A ריבועית וקיימת B כך ש- $A*B=I$, אז A הפיכה ו- $B=A^{-1}$.
- אם רוצים למצוא את המט' ההפוכית למטריצה $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, אז משווים אותה למטריצה I_{3X3}. מדרגים את המט' A עד להגעה למטריצה קנונית.
  המט' שהתקבלה במקום המטריצה I_{3X3} היא המט' ההופכית של A.
  הסבר: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}a_{11}&a_{12}&a_{13}&1&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0&1&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&0&0&1\end{array}\right)$
- מט' סינגיולרית = מט' לא הפיכה

11. **דטרמיננט**

- הגדרה: $C_{i,j} = (-1)^{i+j} * M_{i,j}$
- הגדרה: הדטרמיננט של A לפי השורה i והעמודה j מסומן כך:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{nxn}$$

  - לפי השורה ה- i-ית: $a_{i1} * C_{i1} + a_{i2} * C_{i2} + \cdots + a_{in} * C_{in}$
  - לפי העמודה ה- j-ית: $a_{1j} * C_{1j} + a_{2j} * C_{2j} + \cdots + a_{nj} * C_{nj}$
- $|A| = 0$ <= המט' A **לא** הפיכה.
- $|A| \neq 0$ <= המט' A **כן** הפיכה.
- אם קיימת במטריצה A שורה / עמודת אפסים, אז $|A| = 0$
- אם למטריצה A יש 2 שורות / עמודות תלויות, אז $|A| = 0$
- לכל מטריצה ריבועית A מתקיים $|A| = |A^t|$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- מינור של האיבר $a_{i,j}$ מסומן ע"י $|A_{i,j}| = M_{i,j}$
- הגדרה: $adj(A) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \cdots \\ M_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & M_{ii} \end{pmatrix}$

  $adj(A)_{ij} = (-1)^{i+j} * M_{ij}$
- $A * adj(A) = |A| I$
- אם A הפיכה, אז: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * adj(A)$
- אם A מט' משולשת, אז: מכפלת איברי האלכסון הראשי $= |A|$
- למט' דומות יש אותו דטרמיננט.
- הכפלת שורה בסקלר α <= הכפלת הדטרמיננט בסקלר α
  - מסקנה: $|\propto A_{nxn}| = \propto^n |A|$
- כפל של שורה בסקלר והוספתה לשורה אחרת לא משנה את הדטרמיננט.
- אם כופלים שורה / עמודה ב- $\propto \neq 0$, אז הדטרמיננט משתנה ב- $\frac{1}{\propto}$
- החלפת שורות משנה את **סימן** הדטרמיננט:
  - מס' **זוגי** של החלפות <= **לא** משנה סימן.
  - מס' **אי זוגי** של החלפות <= **כן** משנה סימן.
- אם A_{nxn} היא מט' אנטי-סימטרית ו- n אי זוגי, אז: $|A| = 0$
- הקשר בין מט' בלוקים ודטרמיננטים:
  - A תהיה מטריצת בלוקים: $A = \begin{pmatrix} B_{nxk} & D \\ 0 & C_{(n-k)x(n-k)} \end{pmatrix}$
  - אז: $|A| = |B||C|$
- כאשר אנו מחשבים דטרמיננט, נשאף להגיע לצורה של מט' משולשת, או כמה שיותר אפסים בשורה / עמודה מסויימת, שע"פ שורה / עמודה זו נבנה את הדטרמיננט.
- $|A|^2 = |A^2|$
- כאשר נתון לי $A^3 = -A$ אז אני יכול להפעיל דטרמיננט על 2 הצדדים ולהגיע למצב: $|A|(|A|^2 + 1) = 0$, ולהגיע למסקנות בקשר להפיכות המט' A.
- <u>כלל קרמר:</u> (דרך למצוא את ווקטורי הקורדינטות)

  A_{nxn} מט' הפיכה ונתון $Ax = b$. הפיתרון שניתן ע"י קרמר הוא:

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \forall i = 1, \dots, n$$

$\Delta = |A|$

$\Delta_i =$ הדטרמיננט של המט' המתקבלת מ- A ע"י החלפת העמודה ה- i במקום הווקטור b.

<u>דג':</u>

נתונה המערכת הבאה:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

פתור בעזרת כלל קרמר (<= ז"א שמט' הפיכה).

<u>פיתרון:</u>

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = |A| = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -8, X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{-2} = 4$$

לפיכך הפיתרון הסופי הוא: $\overline{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

21. **<u>העתקות ליניאריות</u>**

כדי לבדוק האם קיימת העתקה ליניארית צריך לבדוק האם 2 הטענות הבאות מתקיימות:

1. $\forall u, w \in \overline{V}, T(u+w) = T(u) + T(w)$
2. $\forall \propto F, T(\propto u) = \propto T(u)$

- הפעלת ה"ל על 0 חייבת לתת 0. ולכן אם אני לא מקבל 0, אז זו לא ה"ל.
- הגדרה: $\ker T \coloneqq \{v \in \overline{V},\ T(v) = \overline{0}_u\}$
- הגדרה: $Im\ T \coloneqq \{u \in \overline{U},: \exists v \in \overline{V},\ T(v) = u\}$
- T חח"ע $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$
- T על $\Leftrightarrow \dim(Im\ T) = \dim u$
- משפט: $\dim V = \dim(Im\ T) + \dim(\ker T)$
- עבור ההעתקה הליניארית $T: V \to U$. אפשר להגיד:
  1. אם $\dim u < \dim v$, אז: T בטוח **לא על**.
  2. אם $\dim u > \dim v$, אז: T בטוח **לא חח"ע**.
- **מציאת גרעין**: לוקחים את התוצאה של הה"ל (נסמנה כ- t), ופותרים את המשוואה הבאה: $t\overline{x} = 0$. כאשר אני מחפש תוצאה בת"ל. אחרי דירוג והגעה לבת"ל, הגעתי לבסיס. והדרגה היא המימד.
- **מציאת התמונה**: לוקחים בסיס סטנדרטי (למשל $\{1, x^2, x^3, \ldots\}$) מפעילים עליו את הה"ל. מהתוצאה זורקים את הווקטורים התלויים, ואז מקבלים את הבסיס של התמונה.

31. **<u>מטריצה מייצגת</u>**

- כשמבקשים למצוא מט' מייצגת של אופרטור לפי בסיס מסויים. אז מפעילים את האופרטור על הצורה הסטנדרטית שלו. אח"כ בודקים באיזה מקדמים צריכים לכפול את כל הבסיסים כדי

להגיע לאותו שיצא אחרי הפעלת האופרטור (בודקים את זה לכל איברים). בסופו של דבר לוקחים את כל המקדמים ולפי סדר הבסיסים מעמידים אותם בעמודות, וזוהי המט' המייצגת לפי הבסיס.

- דג' למציאת מט' מייצגת לפי בסיס לא סטנדרטי לפולינום:

תהא:

$T: P_2[x] \to P_2[x]$

$T(a+bx+cx^2) = (2a+b)+(a-2b)x+(3a-c)x^2$

מצא מט' מייצגת לפי הבסיס:

$B = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$

<u>פיתרון:</u>

נפעיל את המט' על בסיס סטנדרטי, ואז נעביר אותו לבסיס הנתון.

$T(1) = 2+x+3x^2 = 3(1+x)^2 - 5(1+x) + 4*1$

$T(1+x) = T(1)+T(x) = -3-x+3x^2 = 3(1+x)^2 - 7(1+x) + 7*1$

$T((1+x)^2) = \cdots = 2(1+x)^2 - 7(1+x) + 9*1$

$$[\boldsymbol{T}]_B = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{9} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-7} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

- קיצור דרך במציאת מטריצה מייצגת בבסיס סטנדרטי:
  1. בסיס סטנדרטי של **מטריצה**:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+2b \\ c+d & 2c+2d \end{pmatrix}$$

כל תא מסמן שורה, בצורה הבאה:

$$E = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\}, [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

  2. בסיס סטנדרטי של **פולינום**:

$$T\quad(a+bx+cx^2)) = (2a-b+c)+(a-b)x+(3a+b)x^2$$

$$E = \{1, x, x^2\}, [T]_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $rank([T]_b) = \dim Im\, T$
- משפט: $[T]_B * [u]_B = [T(u)]_B$,

מימוש: אם נתון לי בסיס ו $[T]_B$ אז אני יכול למצוא את ההעתקה T וגם כל תמונה $T(x_1, x_2, \dots)$

3. דג':

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$$

1. חישוב $T(1,7,-9)$

צריך קודם כל למצוא את המטריצה המייצגת של ווקטור הקורדינטות:

$[u]_B = [1,7,-9]_B = -9b_1 + 16b_2 - 6b_3$

עכשיו משתמשים בנוסחה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ 16 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -28 \\ -27 \end{pmatrix}$$

$T(1,7,-9) = 1*(1,1,1) - 28*(1,1,0) - 27*(1,0,0) = (\mathbf{-54, -27, 1})$

2. חישוב ההעתקה T: אותו דבר כמו מיקודם רק שעכשיו בעצם מחשבים $T(x,y,z)$

$(x,y,z) = \propto(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0)$

$x = \propto + \beta + \gamma\ , y = \propto + \beta\ , z = \propto$

$$\propto = z\,,\beta = y - z\,,\gamma = x - y$$
$$[(x,y,z)]_B = (z, y-z, x-y)$$
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ y-z\\ x-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ 2x-3y+z\\ z+3x-3y\end{pmatrix}$$
$$T(x,y,z) = x(1,1,1) + (2x-3y+z)(1,1,0) + (z+3x-3y)(1,0,0)$$
$$= (\mathbf{6x - 6y + 2z}\,,\mathbf{3x - 3y + z}, \mathbf{x})$$

- כאשר מבקשים למצוא את הבסיס לגרעין, אז פשוט פותרים את המשוואה $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ \vdots\end{pmatrix} = 0$, כאשר את התוצאה משווים לבסיס הקיים (כמו בדג' הקודמת).

41. **<u>ע"ע, ו"ע, פ"א....</u>**

- ר"א = ר"ג ⇔ T לכסינה
- לכסינה = דומה לאלכסונית: ז"א קיימת A כך ש: $P^{-1}AP = D$.
  המטריצה הלכסינה P בעצם מכילה בעמודותיה את הו"ע של כל הע"ע.
  המט' D מכילה בכל תא באלכסון ע"ע.
  לא משנה סדר ה- ע"ע ב- D או P, רק שהסדר יהיה תואם ב- 2 המט'.
- מציאת ו"ע: פותרים את המשוואה $(A - I\lambda_0) = 0$, כאשר λ_0 הוא הע"ע. בסוף עושים פיתרון כללי, וזהו הו"ע.
- מציאת פ"א: לבצע את הדטרמיננט הבא: $|A - \lambda I|$.
  אני מקבל את הצורה הבאה: ..... $(x_0 - \lambda)^a (x_1 - \lambda)^b$, כאשר:
  - $x_0, x_{1\ldots}$ - כל אחד מהם מהווה ע"ע (ערך עצמי).
  - a ,b – מייצגים את ה- ר"א (ריבוי אלגברי).
  - המט' $(A - \lambda I)$ חייבת להיות לא הופכית כדי לקבל את הפ"א, ז"א: $|A - \lambda I| \neq 0$
- ר"ג (ריבוי גיאומטרי) – $n - rank(A - \lambda I)$
- $1 \leq$ ר"ג $\leq$ ר"א
- אם ל- A ע"ע שונים זה מזה <= A לכסינה.
- אם A משולשת <= הע"ע שלה הם איברי האלכסון הראשי.
- אם סכום אברי כל שורה הם k, אז k הוא ע"ע עם ו"ע: $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$
- נסמן $x_0, x_1, \cdots, x_n$ הם ע"ע, אזי:
  - $x_0 * x_1 * \cdots * x_n = |A|$
  - $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = trace(A)$, $trace(A) =$ סכום איברי האלכסון הראשי.
- λ_0 אשר במשוואה $(A - I\lambda_0)$ גורם לאיפוס אחת השורות (ע"י פעולות שורה אלמנטריות), הוא מהווה ע"ע.
- למט' דומות יש את אותו פ"א (ז"א, שכך גם הע"ע, ר"ג, ר"א...).
- כל מט' ממשים וסימטרית היא לכסינה מעל הממשיים.
- אם A לא הפיכה, אז 0 הוא ע"ע שלה.
- אם 0 הוא ע"ע של A, אז A היא לא הפיכה.
- אם נתון לי $\det(A - 2I) = 0$, אז אני יודע ש- 2 הוא ע"ע. מכיוון שהוא הופך את המט' ללא הפיכה -> מוריד את דרגה המט' מ- n.
- כשאני מחפש בדטרמיננט את הע"ע, זה לא משנה לי מינוסים ופלוסים, כי אני צריך להשוות ל- 0.
  הסבר: $\det(3I - A) = \det(A - 3I)$
- אם נתון לי שעבור $A - \lambda_1 I$, אני מקבל $rank\ (A - \lambda_1 I) > n$. אז אני יודע ש- λ_1 הוא ע"ע.
- כאשר נתון לי λ_1 ע"ע, והו"ע המתאים לו הוא v. אז: $T(v) = \lambda_1 * v$