מבוא להסתברות וסטטיסטיקה – 094480, אביב תשס"ט

(נכתב ע"י מיכל מנדל ואסף ליבוביץ)

דף עזר 1

ערכים מסכמים למ"מ בדיד:

מדדי מיקום: **ממוצע** – $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

חציון – הערך שמחצית המקרים קטנים ממנו או שווים לו:

- עבור n אי-זוגי: $MED = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ - עבור n זוגי: $MED = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$

רבעון ראשון/תחתון – הערך שרבע מהמקרים קטנים ממנו או שווים לו: $Q_1 = X_{\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1\right)}$. **רבעון שני** – חציון. **רבעון שלישי/עליון** – הערך ששלושה רבעים מהמקרים קטנים ממנו או שווים לו: $Q_3 = X_{\left(\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor + 1\right)}$. $\lfloor\ \rfloor$ - ערך תחתון שלם, מעגלים כלפי מטה.

שכיח – הערך של המשתנה הנחקר בעל התדירות הגבוהה ביותר (ערך הנפוץ ביותר).

מדדי פיזור:

שונות–מודדת את הפיזור של ערכי הסדרה הסטטיסטית סביב הממוצע.

שונות מדגמית: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}{n-1}$

שונות האוכלוסייה: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)^2}{n}$ **סטיית תקן:** $S = \sqrt{S^2}$, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

מקדם פיזור: $C.V. = \frac{S}{\overline{X}} \cdot 100$

תחום בין-רבעוני: בו מרוכזות 50% מהתצפיות המרכזיות: $IQR = Q_3 - Q_1$.

UIF, LIF: $\boxed{step = 1.5 \cdot (Q1 - Q3)}$ $\boxed{LIF = Q_1 - step}$ $\boxed{UIF = Q_3 + step}$

בניית טבלת שכיחויות

1. נמנה את השכיחות (מספר) ערכי X עבור כל ערך במדגם $\left(\sum_i n_i = n\right)$.
2. חישוב שכיחות יחסית של מקרים בכל קטגוריה: $f_i = \frac{n_i}{n}$ - שכיחות יחסית.
3. חישוב שכיחות מצטברת ושכיחות יחסית מצטברת עבור כל קטגוריה.

חזרה על קומבינטוריקה בסיסית.

חוק הסכום:

אם אפשר לבחור איבר מסוג 1 ב- n_1 אופנים, איבר מסוג 2 ב- n_2 אופנים, … , איבר מסוג k ב- n_k אופנים, והקבוצות זרות, אזי לבחירת בדיוק איבר אחד מבין k סוגי העצמים יש $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ אופנים.

חוק הכפל:

נניח כי: מספר האפשרויות לבחור איבר מסוג 1 הוא n_1.
מספר האפשרויות לבחור איבר מסוג 2 הוא n_2. …
מספר האפשרויות לבחור איבר מסוג k הוא n_k.
והקבוצות זרות, אזי מספר האפשרויות לבחירת קבוצה בת k איברים, כך שיהיה איבר אחד מכל סוג, הוא $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$.

חליפות:

נתונה קבוצה של n איברים שונים (הניתנים להבדלה). וקטור סדור באורך r, שאבריו מתוך n האיברים הנ"ל ושכל רכיביו שונים זה מזה, נקרא חליפה של r איברים מתוך n (r< n).

מספר החליפות: $\boxed{P(n,r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$

תמורות:

חליפה של n מתוך n נקראת תמורה (פרמוטציה) של n איברים.

מספר התמורות: $\boxed{P(n,n) = n!}$

צירופים:

נתונה קבוצה של n איברים. תת קבוצה של קבוצה זו בעלת r איברים (0 < r < n) (אין חשיבות לסדר האיברים בתת קבוצה) נקראת צירוף של r מתוך n איברים.
מספר הצירופים:

$$\boxed{C(n,r) = C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

תמורות עם חזרות:

נתונים: q1 עצמים זהים מסוג 1, q2 עצמים זהים מסוג 2, …
qk עצמים זהים מסוג k, כך ש: q1 + q2 + q3 + … + qk = n,
אזי, מספר התמורות של העצמים האלו הוא: $\boxed{\frac{n!}{q1! \cdot q2! \cdot \ldots \cdot qk!}}$

חליפות עם חזרות:

נתונים n סוגי עצמים, ללא הגבלה בכמות העצמים מכל סוג שהוא. רוצים לבחור r מתוכם, כשיש חשיבות הבחירה. (שימו לב כי ייתכן r > n). אזי מספר האפשרויות הוא: $\boxed{n^r}$

צירופים עם חזרות:

נתונים n סוגי עצמים, ללא הגבלה בכמות העצמים מכל סוג שהוא. רוצים לבחור r עצמים מתוכם, כאשר אין חשיבות לסדר הבחירה. מספר האפשרויות הוא:

$$\boxed{\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}}$$

שימו לב, כי הבעיה שקולה לבעית חלוקת r כדורים זהים ל- n תאים שונים.

דף עזר 2

תורת הסתברות

הגדרות:

ניסוי מקרי - הוא ניסוי שאין לדעת בוודאות מראש את תוצאתו אלא קיים מרחב של תוצאות אפשריות.

מרחב מדגם Ω - הקבוצה הכוללת – אוסף כל התוצאות האפשריות של הניסוי המקרי.

מאורע פשוט ω_i - תוצאה בודדת של מרחב המדגם (איבר ב- Ω).

מאורע A (B, C, …) - אוסף של מאורעות פשוטים (קבוצה חלקית ל- Ω).

קבוצה חלקית (מוכלת) - $A \subset B$ - A תת-קבוצה של B (A מוכלת ב-B) אם כל איבר של A הוא איבר של B.

אנו אומרים שמאורע A קורה אם תוצאת הניסוי (שהיא אחת מנקודות המרחב) שייכת ל-A.

מאורע משלים למאורע A - A^c - כל האיברים ב- Ω שאינם שייכים ל-A.

מאורע ריק $\varnothing$ (קבוצה ריקה) - אינו כולל אף איבר.

פעולות בין מאורעות:

איחוד - $A \cup B$ - כל האיברים שהם או ב-A או ב-B או בשתי הקבוצות.

חיתוך - $A \cap B$ - כל האיברים שהם גם ב-A וגם ב-B.

* אם החיתוך בין הקבוצות הוא ריק, כלומר אין להן איברים משותפים, אזי הקבוצות נקראות זרות.

מאורע A והמאורע המשלים לו A^c הם מאורעות זרים: $A \cap A^c = \varnothing$

האיחוד בין מאורעות A ו- A^c הוא מרחב המדגם: $A \cup A^c = \Omega$

הפרש - $A \setminus B$ - כל האיברים שהם ב-A אך לא ב-B: $A \setminus B = A \cap B^c$

כללי פעולות בין הקבוצות

חוק החילוף: $\boxed{A \cup B = B \cup A}$ $\boxed{A \cap B = B \cap A}$

חוק הפילוג: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

חוקי דה-מורגן: $\boxed{(A \cap B)^C = A^C \cup B^C}$ $\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^C}$

הסתברות מותנית

יהיה A מאורע, כך ש- $P(A) > 0$. ההסתברות המותנית של מאורע B בהינתן A נתונה ע"י: $\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$. באופן דומה: $\boxed{P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)}}$

נוסחת הכפל

יהיו A ו- B מאורעות כך ש- $P(A) > 0$.

ידוע כי $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(B/A)P(A)$.

בדומה עבור 3 מאורעות:

$$P(A \cap B \cap C) = P(C/B \cap A)P(B \cap A) = P(C/B \cap A)P(B/A)P(A)$$

* הערה: כאשר A ו- B מאורעות זרים $\boxed{P(A \cap B) = 0}$

נוסחת ההסתברות השלמה

יהיו $A_1, \ldots, A_n$ מאורעות זרים במרחב הסתברות ובעלי הסתברות חיובית כך ש- $\boxed{\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega}$, ויהיה B מאורע כלשהו במרחב המדגם, אזי:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$

באותו אופן:

$$P(\overline{B}) = \sum_{i=1}^{n} P(\overline{B}/A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\overline{B} \cap A_i)$$

עבור 2 מאורעות: $P(\overline{B}) = P(\overline{B}/A)P(A) + P(\overline{B}/\overline{A})P(\overline{A})$.

נוסחת בייס

באותם התנאים של נוסחת ההסתברות השלמה, יהיה B מאורע כלשהו בעל הסתברות חיובית, אזי:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}.$$

עבור 2 מאורעות: $P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$.

באופן דומה: $P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$

דיאגרמת עץ

* כל פיצול מתייחס לשלב ניסוי מסוים.
* סכום ההסתברויות בכל פיצול שווה ל 1.
* ההסתברות המתאימה לכל ענף היא ההסתברות המותנית בהינתן המאורעות המתאימים לענפים הקודמים

פונקצית הסתברות

יהי מרחב המדגם Ω - אוסף המאורעות הפשוטים: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

לכל מאורע פשוט נצמיד מספר $P(\omega)$ הנקרא ההסתברות של מאורע ω:

$0 \le P(\omega) \le 1$ לכל ω.

$0 \le P(A) \le 1$, כאשר A הוא מאורע כלשהו במרחב המדגם (אוסף המאורעות הפשוטים). $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$.

מרחב מדגם סופי ושווה-הסתברות (מרחב סימטרי בדיד)

מרחב מדגם סופי נקרא שווה-הסתברות כאשר לכל המאורעות הפשוטים במרחב זה יש אותה הסתברות להתרחש:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots P(\omega_n) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\#(\Omega)}$$

במרחב סימטרי בדיד מתקיים: $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$

מרחב מדגם סימטרי רציף

מרחב מדגם סימטרי רציף – מרחב רציף שבו לכל הקטעים\השטחים השווים בגודלם הסתברות שווה להתקבל. במרחב סימטרי רציף מתקיים: $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$

חוקים בחישוב ההסתברות

הסתברות האיחוד של שני מאורעות זרים:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

מקרה פרטי: חישוב הסתברות האיחוד של מאורע A והמאורע המשלים לו A^C.

$$P(A) = 1 - P(A^C)$$

הסתברות האיחוד של שני מאורעות לא זרים:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

הסתברות האיחוד של שלושה מאורעות לא זרים:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

דף עזר 3

אי תלות של מאורעות

יהיו A, B מאורעות במרחב ההסתברות. A ו-B יקראו "מאורעות-בלתי-תלויים" אם קיים השוויון: $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$. מושג אי תלות בין שני מאורעות הוא סימטרי – A בלתי תלוי ב-B וגם B בלתי תלוי ב-A.

אי תלות עבור 3 מאורעות:

A, B, C מאורעות בלתי תלויים אם מתקיימים התנאים הבאים:

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$ $\boxed{P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)}$

$\boxed{P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)}$ $\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}$

הבדל בין זרים לבלתי תלויים:

A ו-B זרים: $\boxed{P(B \cap A) = 0}$ A ו-B ב"ת: $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

טבלה מסכמת:

זרים	תלויים	בת"ל
$A \cap B = \varnothing$ $P(A \mid B) = 0$ $P(A \cap B) = 0$	$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$	$P(A \mid B) = P(A)$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

משתנים מקריים

משתנה מקרי – נתון מרחב הסתברות. הפונקציה X = x(w) המתאימה לכל נקודה w במרחב המדגם Ω נקראת מ"מ (משתנה מקרי)

משתנה מקרי בדיד - מ"מ X יקרא **מ"מ בדיד** אם הוא מקבל סדרה סופית או בת מניה של ערכים.

פונקצית הסתברות עבור מ"מ בדיד:

הפונקציה $P_X(x) = P(X = x)$, $x \in R$ נקראת פונקצית הסתברות עבור מ"מ X.

הערה: $\sum_x P_X(x) = 1$

פונקצית התפלגות מצטברת עבור מ"מ בדיד:

הפונקציה $F_x(x)$, המוגדרת על ידי: $F_X(x) = \sum_{i:X_i \le x} P_X(x_i) = P(X \le x)$

(הסתברות שמ"מ X קטן או שווה למספר x), נקראת פונקצית התפלגות מצטברת של מ"מ X בנק' x.

תכונות פונקצית ההתפלגות:

1. $0 \le F_X(x) \le 1$ לכל $x \in \Re$.
2. הפונקציה $F_X(x)$ מונוטונית לא יורדת ב- x, כלומר:
   אם $x_1 < x_2$, אז $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$.
3. $\lim_{x_0 \to -\infty} F_X(x_0) = 0$, $\lim_{x_0 \to \infty} F_X(x_0) = 1$.

הערה: אם נתונה $P_X(x)$ ניתן לחשב ממנה את $F_X(x)$.

אם נתונה $F_X(x)$: $P_X(x) = F_X(x) - F_X(x-1)$, כלומר, פונקצית ההסתברות שווה לפונקצית ההתפלגות פחות פונקצית ההתפלגות בנקודה שלפני.

תוחלת של מ"מ בדיד

יהי X מ"מ המקבל ערכים $x_1, x_2, \ldots x_n$ בהסתברויות $P_X(x_1), P_X(x_2), \ldots, P_X(x_n)$ בהתאמה, אזי התוחלת של X מוגדרת ע"י:

$E(X) = \sum_{x \in \Omega} x_i P_X(x)$, כאשר Ω היא מרחב המצבים.

תכונות התוחלת:

1. עבור קבוע a, $E(a) = a$	5. $Eg(X) = \sum g(X) \cdot P(X = x)$
2. $E(aX) = aE(X)$	6. אם $X_1, \ldots X_K$ סדרה של מ"מ כלשהם אזי:
3. $E(X + a) = E(X) + a$	$E(X_1 + X_2 + \ldots X_K) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$
4. $E(aX + b) = aE(X) + b$	

שונות

שונות הִנה מדד לפיזור. שונות של מ"מ מסומנת על ידי $Var(X)$ או על ידי $V(X)$.

הגדרה תיאורטית של שונות: $\mathrm{var}(X) = E[X - E(X)]^2$.

נוסחת העבודה: $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

סטיית תקן: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

תכונות של שונות:

1. $Var(X) \ge 0$	5. אם X ו- Y מ"מ **בלתי תלויים** אזי $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
2. $Var(a) = 0$	6. אם X ו- Y מ"מ **בלתי תלויים** אזי $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$
3. $Var(a \cdot X) = a^2 \cdot Var(X)$	
4. $Var(a + X) = Var(X)$	

דף עזר 4

פונקצית התפלגות ברנולי עם פרמטר p

מבצעים ניסוי ברנולי עם הסתברות p להצלחה. X מקבל 1 אם הניסוי הצליח ו- 0 אחרת. אזי:

$$p_X(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q & x = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ומסמנים: X~Ber(p)

תוחלת: $E(X) = p$ ושונות: $Var(X) = p \cdot q$

פונקצית התפלגות בינומית עם פרמטרים n,p

X מ"מ שסופר את מספר ההצלחות ב- n ניסויי ברנולי בלתי תלויים עם הסתברות p להצלחה, אזי:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & x = 0,1,\ldots,n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ומסמנים: $X \sim Bin(n,p)$

אם X~Bin(n,p) (בינומי) אז התוחלת שלו היא: $E(X) = n \cdot p$

השונות שלו היא: $Var(X) = n \cdot p \cdot q$

<u>פונקצית התפלגות גיאומטרית עם פרמטר p</u>

X מ"מ שסופר את מספר הניסיונות עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי בלתי תלויים עם הסתברות p להצלחה, אזי:

$$p_X(x)=\begin{cases} q^{x-1}p & x=1,2,3,... \\ 0 & otherwise\end{cases}$$ ומסמנים: X~Geo(p). אם X~Geo(p)

(גיאומטרי) אז: $E(X)={}^{1}\!/_{p}$, $Var(X)={}^{q}\!/_{p^2}$. $\boxed{P(x=0)=0}$

$\boxed{P(x>n)=q^n}$ $\boxed{P(x\le n)=1-q^n}$, תכונת חוסר הזכרון:

$\boxed{P(x>n+k/x>k)=P(x>n)=q^n}$ $\boxed{P(x=n+k/x>k)=P(x=n)=pq^{n-1}}$

<u>פונקצית התפלגות פואסונית עם פרמטר λ</u>

X - מ"מ פואסוני מונה אירועים לאורך זמן:

$$p_X(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x=0,1,2,... \\ 0 & otherwise\end{cases}$$ ומסמנים: $X\sim Pois(\lambda)$

אם $X\sim Pois(\lambda)$ (פואסוני) אז: $Var(X)=E(X)=\lambda$. <u>עבור t-יחידת זמן</u>:

$\boxed{P(X=x)=\dfrac{(\lambda t)^x\cdot e^{-\lambda t}}{x!}}$ $\boxed{E(x)=V(x)=\lambda t}$

<u>התפלגות בינומית שלילית</u>

מס' ניסויים עד הצלחה m. בשלב k אנו מקבלים הצלחה מס' m.

נתון מרחב המדגם בן-מנייה $\Omega=\{m,m+1,...\}$ ועליו מוגדרת מידת

ההסתברות: (עבור m מסוים) $$P(k)=\begin{cases}\binom{k-1}{m-1}p^m q^{k-m}, & k\ge m\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

כאשר: $q=1-p$, $0<p\le 1$. $\boxed{E(x)=\dfrac{m}{p}}$ $\boxed{V(x)=\dfrac{mq}{p^2}}$

<u>מודל בינומי שלילי</u>

מבצעים סידרה של ניסויי ברנולי ב"ת עד להצלחה ה- m-ית.

ההסתברות שיהיו בדיוק k ניסוים, ז"א ההסתברות לכך שההצלחה ה- m-ית תתקבל בדיוק בניסיון ה-k היא P(k) .

<u>התפלגות היפר גיאומטרית</u>

בכד נמצאים N כדורים, מתוכם D שחורים ו- N-D לבנים. מוציאים n כדורים באקראי וללא החזרה. ההסתברויות שבין הכדורים שהוצאו נמצאים k כדורים שחורים היא:

$$\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

פרופורציה מיוחדים: $\boxed{p=\dfrac{R}{N}}$ $\boxed{E(x)=np}$

$\boxed{V(x)=npq(1-\dfrac{n-1}{N-1})}$

<u>התפלגות מולטינומית</u>

הגדרה: מבצעים n ניסויים ב"ת . לכל ניסוי קיימות k תוצאות אפשריות כך

שההסתברות לתוצאה i היא p_i ומתקיים: $\sum_{i=1}^{k}p_i=1$

Xi – מציין את מספר התוצאות מסוג i שהתקבלו ב- n ניסויים X=(X1,X2,…,Xk)

אזי: X~Multi(n,p1,p2,…,pk)

$$P(X_1=n_1,X_2=n_2,...,X_k=n_k)=$$

$$\begin{cases}\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot...\cdot n_k!}\cdot p_1^{n1}\cdot p_2^{n2}\cdot...\cdot p_k^{nk} & ,if\ \sum_{i=1}^{k}n_i=n\\ 0 & ,else\end{cases}$$

<u>התפלגות אחידה בדידה</u>:

סימון: X~Uni[a,b] (a<b)

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a+1} & x=a,..,b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\qquad Var(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

<u>דף עזר 5</u>

<u>משתנה מקרי רציף:</u>

<u>פונקצית צפיפות</u>

משתנה מקרי רציף מאופיין ע"י פונקצית צפיפות $f_X(x)$ המקיימת:

1. $f_X(x)\ge 0$ 2. $\int_{-\infty}^{\infty}f_X(t)dt=1$

<u>עבור משתנה מקרי רציף</u>

$P(X=x)=0$ (כלומר, ההסתברות לקבל ערך נקודתי מסוים של מ"מ רציף שווה ל-0)

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f_X(x)dx$$

<u>פונקצית התפלגות מצטברת</u>

יהי X מ"מ. פונקי' התפלגות מצטברת של X היא פונקציה $F_X:R\to[0,1]$ המוגדרת

ע"י: $F_X(x)=P(X\le x)$

עבור X רציף: $F_X(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt$

חישוב הסתברות בעזרת פונקציית התפלגות מצטברת:

$$P(a<X<b)=F_X(b)-F_X(a)$$

<u>תוחלת של מ"מ רציף:</u>

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)dx$$

תכונות התוחלת של מ"מ בדיד נכונות גם עבור מ"מ רציף פרט ל:

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{x}g(x)\cdot f_X(x)dx$$

<u>שונות של מ"מ רציף:</u> $Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$

<u>משתנים מקריים רציפים מיוחדים</u>:

<u>התפלגות אחידה רציפה</u>:

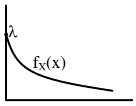
סימון: X~U(a,b) (a<b)

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\qquad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

<u>התפלגות מעריכית (אקספוננציאלית)</u>:

סימון: X~exp(λ) (λ נקרא "הקצב" של התפלגות)



$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}\qquad Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$P(X>a)=\int_a^{\infty}f_X(x)dx=\int_a^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda a}$$

$$F_x(X)=P(X<a)=1-e^{-\lambda a}$$

<u>התפלגות נורמלית</u>:

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\boxed{f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<\infty}$ $\boxed{\begin{matrix}E(X)=\mu\\ Var(X)=\sigma^2\end{matrix}}$

מקרה פרטי של התפלגות נורמלית – מ"מ נורמלי סטנדרטי:

$Z\sim N(0,1)$ - מ"מ מתפלג נורמלית עם תוחלת $\mu=0$ ושונות $\sigma^2=1$

<u>חישוב הסתברות בהתפלגות נורמלית (תקנון משתנה נורמלי – מעבר להתפלגות נורמלית סטנדרטית):</u>

אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, אזי $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$$F_x(X)=P(X<a)=P\left(Z<\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

<u>חישוב הסתברות בהתפלגות נורמלית סטנדרטית</u>:

$P(Z<z)=\varphi(z)$, מאחר שההסתברות סימטרית סביב ה-0:

$$P(Z>z)=1-P(Z<z)=1-\varphi(z)=\varphi(-z)=P(Z<-z)$$

$\boxed{P(z_1\le Z\le z_2)=\phi(z_2)-\phi(z_1)}$ $\boxed{\phi(Z\ge -z)=\phi(z)}$

<u>סימון:</u>

z_t - ערך של Z שמשמאלו שטח (הסתברות) של t.

<u>הערה</u>: $z_t=-z_{1-t}$ מתקיים בגלל הסימטריה של התפלגות נורמלית סטנדרטית

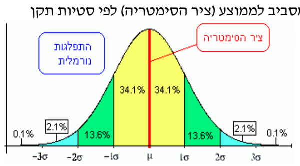
<u>חישוב ערך X</u> כאשר t ידוע ו- $X\sim N(\mu,\sigma^2)$:

$$X\sim N(\mu,\sigma^2),\quad Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1),$$
$$X_t=\mu+z_t*\sigma$$

<u>דף עזר 6</u>

<u>המשך התפלגות נורמאלית</u>:

אחוזי ההתפלגות הנורמאלית מסביב לממוצע (ציר הסימטריה) לפי סטיות תקן



$\left[\mu\pm\sigma\right]=68.2\%$

$\left[\mu\pm 2\sigma\right]=95.4\%$

$\left[\mu\pm 3\sigma\right]=99.6\%$

$\left[\mu\pm 3.5\sigma\right]=99.8\%$

<u>משפט הגבול המרכזי</u>

- יהיו: X1,X2,…,Xn מ"מ בלתי תלויים שווי התפלגות עם תוחלת μ ושונות σ^2.

נגדיר $\overline{X}n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, אזי: $\dfrac{\overline{X}n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}N(0,1)$, זאת כיוון ש- $\overline{X_n}$

בקירוב מתפלג כמו משתנה מקרי מהתפלגות $\boxed{N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})}$ כלומר

$P(\dfrac{\overline{X}n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le a)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(a)$ (הערה: בפועל נסתפק ב-n>=30)

(כאשר $\Phi(a)$ פונקצית התפלגות מצטברת של מ"מ נורמאלי-סטנדרטי וערכה ייקבע לפי הטבלה)

- באופן שקול אם נגדיר $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, אזי: $\dfrac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}N(0,1)$

S_n מתפלג בקירוב כמו משתנה מקרי נורמאלי עם הפרמטרים: $\boxed{N(n\mu,n\sigma^2)}$

<u>דף עזר 7</u>

<u>קירוב נורמלי להתפלגות בינומית</u>

אם $X\sim Bin(n,p)$, אזי לפי משפט הגבול המרכזי, עבור n מספיק גדול (np>5):

$$X\sim N(np,npq)\Rightarrow Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$

<u>משתנה מקרי דו מימדי</u>

יהי נתון מרחב מדגם Ω . הזוג (X,Y) יקרא משתנה מקרי דו מימדי על מרחב המדגם Ω .

יהי פונקצית ההסתברות המשותפת לכל x, y $P(X=x,Y=y)$ של מ"מ דו מימדי (X,Y).

<u>הערה</u>: נהוג להציג את ההתפלגות המשותפת של מ"מ דו מימדי (X,Y) בעזרת טבלה דו-מימדית כדלקמן:

	Y1	Y2	…	Yj	…	P(X)
X1						P(X1)
X2						P(X2)
…						
Xi				P(X=Xi,Y=Yj)		P(Xi)
…						
P(Y)	P(Y1)	P(Y2)		P(Yj)		1

$P_X(x)$ – הסתברות (שולית) של X, $P_Y(y)$ - הסתברות (שולית) של Y

$$P_Y(y)=\sum_x P(x,y)\qquad P_X(x)=\sum_y P(x,y)$$

<u>פונקצית ההסתברות המותנית של X בהינתן Y=y:</u>

$$P(X=x/Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

<u>פונקצית ההסתברות המותנית של Y בהינתן X=x:</u>

$$P(Y=y/X=x)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}$$

<u>חוק הכפל</u>

$$P(X=x,Y=y)=P_X(x)*P(Y=y/X=x)=P_Y(y)*P(X=x/Y=y)$$

<u>שונות משותפת של מ"מ דו-מימדי</u>

יהי X ו-Y מ"מ המוגדרים על אותו מרחב מדגם Ω .

שונות משותפת של X ו-Y מוגדרת על ידי:

$$Cov(X,Y)=E((X-E(X)*(Y-E(Y)))$$

או $\boxed{Cov(X,Y)=E(X*Y)-E(X)*E(Y)}$

<u>תכונות שונות משותפת</u>:

1. שונות המשותפת היא סימטרית: $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
2. $Cov(X,X)=Var(X)$
3. אם a,b,c,d מספרים קבועים אז: $Cov(aX+b,cY+d)=acCov(X,Y)$
4. אם X,Y,Z מ"מ המוגדרים על אותו מרחב Ω אז:

$$Cov(X,Y+Z)=Cov(X,Y)+Cov(X,Z)$$
$$Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$$

<u>תוחלת ושונות של סכום והפרש של מ"מ</u>:

יהי Y,X מ"מ מוגדרים על אותו מרחב Ω אז:

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$
$$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$$

<u>מקדם המתאם</u>: כמו שראינו ברגרסיה ליניארית: $\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$

<u>משתנים מקריים בדידים X ו-Y הם ב"ת אם מתקיים לכל x,y:</u>

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)*P(Y=y)$$

<u>משתנים מקריים בלתי מתואמים</u>:

<u>הגדרה</u>: יהי Y,X מ"מ מוגדרים על אותו מרחב Ω .

Y,X <u>בלתי מתואמים</u> אם לא קיים בניהם קשר ליניארי.

כלומר: $\boxed{\begin{matrix}Cov(X,Y)=0\quad or\\ E(X*Y)=E(X)*E(Y)\\ Var(X+Y)=Var(X-Y)=VaR(X)+Var(Y)\end{matrix}}$

<u>הערות</u>:

1. $\left|\rho(X,Y)\right|=1$ אם X ו-Y <u>תליים ליניארית</u>
2. השונות המשותפת קובעת את סימון מקדם המתאם:

$$\rho(X,Y)>0\Leftrightarrow Cov(X,Y)>0$$
$$\rho(X,Y)<0\Leftrightarrow Cov(X,Y)<0$$

<u>דף עזר 8</u>

<u>אמידה נקודתית</u>

<u>אוכלוסייה</u> – אוסף פריטים עליהם מעוניינים במידע מסוים.
<u>מדגם</u> – אוסף חלקי של פריטים מהאוכלוסייה.
<u>פרמטר</u> – מספר קבוע המאפיין את האוכלוסייה (θ) .
<u>סטטיסטי</u> – ערך הניתן לחישוב מנתוני המדגם.
<u>אמד</u> – סטטיסטי המשמש לאמידת פרמטר $(\hat{\theta})$.
<u>אומדן</u> – הערך המספרי של האמד.

אמד $\hat{\theta}$ ייקרא **<u>אמד חסר הטיה</u>** לפרמטר θ , אם קיים: $E(\hat{\theta})=\theta$.

אחרת, הוא **<u>אמד מוטה</u>** והטייתו ניתנת ע"י: $Bias(\hat{\theta})=E(\hat{\theta})-\theta$.

<u>נעדיף אמד חסר הטיה על אמד מוטה.</u>

שגיאה ריבועית ממוצעת

(MSE): $MSE(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2=Var(\hat{\theta})+[Bias(\hat{\theta})]^2$.

<u>נעדיף את האמד בעל MSE מינימלי.</u>

<u>הערה</u>: אם האמד מוטה ובעל MSE נמוך יותר הוא עדיף על אמד שאינו מוטה ובעל MSE גבוה יותר.

<u>הערה</u>: אם $\hat{\theta}$ הוא אמד חסר הטיה לפרמטר θ , מתקיים:

- $Bias(\hat{\theta})=0\Rightarrow MSE(\hat{\theta})=Var(\hat{\theta})$.

סטיית התקן של הממוצע כאשר σ_X ידועה: $SE_{\overline{X}}=\dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$

סטיית התקן של הממוצע כאשר σ_X לא ידועה: $SE_{\bar{x}}=\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{X}^2}{n-1}$$

<u>התפלגויות דגימה</u>

1. התפלגות T: התפלגות סימטרית בעלת k דרגות חופש .

עבור מ"מ המתפלג T~t(6) מצא את השיברון ה- 0.1 וה - 0.995

2. התפלגות חי בריבוע: התפלגות לא סימטרית בעלת n דרגות חופש. מ"מ בעל התפלגות הינו חיובי. עבור משתנה מיקרי $W\sim\chi^2(12)$ מצא את האחוזון ה 0.9 וה- 0.1.

3. התפלגות F: איננה סימטרית ובעלת k דרגות חופש במונה ו-m דרגות חופש במכנה.

תכונת התפלגות F:

$F(k,m)=\dfrac{1}{F(m,k)}$ ולכן לכל $0\le p\le 1$ מתקיים $\boxed{x_{1-p}(m,k)=\dfrac{1}{x_p(k,m)}}$.

<u>שאלה</u>: מצא את השיברונים ה-0.05 וה-0.95 עבור F(15,10) ועבור F(10,15).

<u>תשובה</u>: $\boxed{F_{0.95}^{(15,10)}=2.85}$ $\boxed{F_{0.05}^{(15,10)}=\dfrac{1}{F_{0.95}^{(10,15)}}=\dfrac{1}{2.54}}$

דף עזר 9 – רווחי סמך

(1) רווח בר-סמך לתוחלת μ של אוכלוסייה נורמלית כאשר שונות σ^2 ידועה:

$\bar{X}$ אמד נקודתי לתוחלת μ.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

ולכן, $\boxed{\mu \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}\right]}$

זהו רווח בר-סמך לתוחלת μ ברמת ביטחון $1-\alpha$.

d – חצי אורך של רווח הסמך: $\boxed{d = Z_{1-\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}}$ (2d – אורך רווח סמך)

על מנת למצוא את גודל המדגם שיביא לסטייה של d מהתוחלת: $n \geq \left(\frac{Z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{d}\right)^2$

(2) רווח בר-סמך לתוחלת μ של אוכלוסייה נורמלית כאשר שונות σ^2 אינה ידועה: נאמוד את השונות בעזרת סטטיסטי S^2 המחושב מהמדגם:

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}, \quad \text{מתקיים:} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}.$$

כאשר $(n-1)$ - מספר דרגות חופש – פרמטר בהתפלגות $t_{(n-1)}$; n הוא גודל המדגם שעליו מבוסס הממוצע. ולכן, $\mu \in \left[\bar{X} \pm t_{n-1}^{1-\alpha/2}\, S/\sqrt{n}\right]$

זהו רווח בר-סמך לתוחלת μ ברמת ביטחון $1-\alpha$.

d – חצי אורך של רווח הסמך: $d = t_{(n-1)}^{1-\frac{\alpha}{2}}\, S/\sqrt{n}$ (2d – אורך רווח סמך)

על מנת למצוא את גודל המדגם שיביא לסטייה של d מהתוחלת במקרה זה:

$n \to \left(\frac{Z_{1-\alpha/2}\cdot S}{d}\right)^2$ הערה: יש לשים לב ש- n שואף לערך זה מכוון שאנו משתמשים בהתפלגות Z ולא ב-t.

(3) רווח בר-סמך לשונות σ^2 של אוכלוסייה נורמלית כאשר התוחלת μ ידועה:

$\frac{\sum (X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$, מכאן הרווח סמך עבור σ^2 ברמת סמך $1-\alpha$:

$$\left[\frac{\sum_{i}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{\chi^{2(n)}_{1-\alpha/2}}, \frac{\sum_{i}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{\chi^{2(n)}_{\alpha/2}}\right]$$

(4) רווח בר-סמך לשונות σ^2 של אוכלוסייה נורמלית כאשר התוחלת μ אינה ידועה: S^2 אמד נקודתי לשונות. $\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} = \frac{\sum (X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

מכאן הרווח סמך עבור σ^2 ברמת סמך $1-\alpha$:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^{2(n-1)}_{\alpha/2}}\right] = \left[\frac{S^2\cdot(n-1)}{\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha/2}}, \frac{S^2\cdot(n-1)}{\chi^{2(n-1)}_{\alpha/2}}\right]$$

הרווח סמך עבור σ (סטיית תקן) ברמת סמך $1-\alpha$:

$$\left[S\cdot\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha/2}}},\ S\cdot\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^{2(n-1)}_{\alpha/2}}}\right]$$

(5) רווח סמך ל – p - פרופורציה באוכלוסייה:

$\hat{p} = \frac{x}{n}$ אמד נקודתי ל-p הפרופורציה במדגם. x - הנו מספר בעלי התכונה במדגם בגודל n. עבור np $np \geq 5$ $nq \geq 5$ מתקיים בקירוב

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p\cdot(1-p)}{n}\right) \Rightarrow \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

ולכן, $-Z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq Z_{1-\alpha/2}$

כעת ניתן לפתור בכמה דרכים:

א. **הצבת אמד במכנה**: בקירוב עבור n דיי גדול מתקבל $\frac{pq}{n} \approx \frac{\hat{p}\hat{q}}{n}$. לכן נציב במקום p את האמד $\hat{p}$, ובמקום q $1-\hat{p}$, ונקבל את רווח הסמך:

$$p \in \left[\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}\right]$$

ב. **שיטת המשוואה הריבועית:**

יש לפתור את המשוואה הריבועית הבאה:

$$p^2(1+Z_{1-\alpha/2}{}^2 * \frac{1}{n}) + p(-Z_{1-\alpha/2}{}^2 * \frac{1}{n} - 2\hat{p}) + \hat{p}^2 \leq 0$$

כעת נותר להציב את $\hat{p}$ α n ולמצוא את שורשי המשוואה $p_1,\ p_2$.

ונקבל את רווח הסמך: $p \in \left[p_1, p_2\right]$

ג. רווח סמך שמרני:

נציב $p = q = \frac{1}{2}$ ונקבל את רווח הסמך: $p \in \left[\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{2}}{n}}\right]$

על מנת למצוא את גודל המדגם שיביא לסטייה של d מ-p:

$n \geq \left(\frac{Z_{1-\alpha/2}}{2d}\right)^2$ (d – חצי אורך רווח סמך)

דף עזר 10

אמידה מרווחית (המשך)

(6) רווח סמך להפרש תוחלות במדגמים נורמליים בלתי-תלויים:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x^2}{n_x}\right), \quad \bar{Y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma_y^2}{n_y}\right)$$

א. כאשר השונויות של שתי האוכלוסיות ידועות:

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_x-\mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}\right) \Rightarrow \frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_x-\mu_y\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}} \sim N(0,1).$$

ולכן, $\mu_x-\mu_y \in \left[\bar{X}-\bar{Y} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\left(\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}\right)\right)}\right]$

ב. כאשר שונויות לא ידועות ומניחים ששוות :

את השונות נאמוד על-ידי:

$S_p^2 = \frac{\left(n_x-1\right)S_x^2+\left(n_y-1\right)S_y^2}{n_x+n_y-2}$, כאשר: $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_x}\left(x_i-\bar{X}\right)^2}{n_x-1}$, $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_y}\left(y_i-\bar{Y}\right)^2}{n_y-1}$

מתקיים:

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_x-\mu_y\right)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}\right)}} \sim t_{\left(n_x+n_y-2\right)}.$$

ולכן, $\mu_x-\mu_y \in \left[\bar{X}-\bar{Y} \pm t^{1-\alpha/2}_{\left(n_x+n_y-2\right)}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}\right)}\right]$

זהו רווח בר-סמך להפרש תוחלות ברמת ביטחון $1-\alpha$.

ג. שונויות לא ידועות ולא מניחים שהן שוות:

$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_x-\mu_y\right)}{\sqrt{\left(\frac{S^2{}_x}{n_x}+\frac{S^2{}_y}{n_y}\right)}} \sim t(f)$, כאשר: $f = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)}+\frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$

לכן ר״ס להפרש תוחלות ברמת סמך/ביטחון $1-\alpha$:

$$\mu_x-\mu_y \in \left[\bar{X}-\bar{Y} \pm t^{1-\alpha/2}_{(f)}\sqrt{\left(\frac{S_x^2}{n_x}+\frac{S_y^2}{n_y}\right)}\right]$$

ד. כאשר המדגמים מזווגים:

$$d_i = x_i - y_i$$

נגדיר: $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$, רווח הסמך המתקבל: $\mu_d \in \left[\bar{d} \pm t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_d}{\sqrt{n}}\right]$

$$\mu_d = \mu_x - \mu_y$$

כאשר: $s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}}$

(7) רווח סמך להפרש פרופורציות:
באותו אופן כמו בהפרש תוחלות:

$$p_1-p_2 \in [\hat{p}_1-\hat{p}_2 \pm Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}]$$

(8) רווח סמך ליחס שונויות :

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}^{(n_x-1,n_Y-1)}} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leq \frac{S_X^2}{S_Y^2}F_{1-\alpha/2}^{(n_Y-1,n_X-1)}$$

דף עזר 11

בדיקת השערות:
המטרה: רוצים להחליט על נכונותה או אי – נכונותה של השערה מסוימת לגבי פרמטרים של התפלגויות.
ההחלטה אם לדחות או לא לדחות את ההשערה נעשית על סמך המדגם, ובעזרת כלל הכרעה הקובע לכל תוצאת מדגם אפשרית לדחות או לא לדחות את ההשערה.

השערות סטטיסטיות:
H_0 : השערת האפס – זוהי ההשערה שעומדת לבדיקה סטטיסטית. עורכים את המחקר כדי לבדוק האם ניתן לסטות מהנחה זו (בד״כ מה שידוע ומקובל על הפרמטר).
H_1 : השערה אלטרנטיבית – הטענה החדשה שאותה רוצים לאמת במחקר – השערת החוקר.
סטטיסטי מבחן: ערך המחושב מהמדגם שבעזרתו מחליטים אם לדחות או לא לדחות את השערת האפס.
סימונים:
α - הסתברות לטעות מסוג ראשון או רמת מובהקות

$$\alpha = P(\text{reject the null hypothesis | the null hypothesis is correct})$$

β - הסתברות לטעות מסוג שני

$$\beta = P(\text{don't reject the null hypothesis | the alternative hypothesis is correct})$$

$\pi = 1-\beta$ - עוצמת המבחן

סוגי השערות:
השערה פשוטה – מגדירה באופן חד ערכי את ההתפלגות
השערה מורכבת – כוללת הרבה אפשרויות

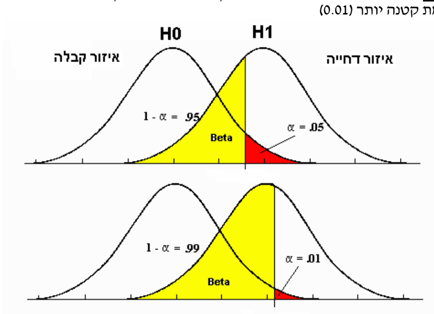
השערה מורכבת חד-צדדית (דוגמה: $H_0: \mu = 800$, $H_1: \mu < 800$)

השערה מורכבת דו-צדדית (דוגמה: $H_0: \mu = 800$, $H_1: \mu \neq 800$)

- לכל סוג של השערה אלטרנטיבית נקבע **אזור הדחייה** שאם הממוצע המדגמי נופל בו, המסקנה תהיה **לדחות את H_0.** נהוג לסמן אזור דחייה ב- C.

- האזור המשלים נקרא אזור הקבלה. אם הממוצע המדגמי נופל בו המסקנה תהיה לא לדחות את H0.

דוגמא: עבור סט השערות אחד – הבדל בין טעות מסוג ראשון גדולה יותר (0.05) לעומת קטנה יותר (0.01)



- עבור השערה חד-צדדית ימנית אנו נדחה עבור ערכים גדולים של הממוצע.
- עבור השערה חד-צדדית שמאלית אנו נדחה עבור ערכים קטנים של הממוצע.
- עבור השערה דו-צדדית אנו נדחה עבור ערכים קטנים או גדולים של הממוצע.

דף עזר 13

מבחני טיב התאמה:

המטרה לבדוק האם המדגם שייך להתפלגות מסוימת. $H_0: X \sim F$, $H_1: otherwise$

סטטיסטי המבחן עבור מבחני טיב התאמה הינו:

$$\chi_p{}^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_{i0})^2}{np_{i0}} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$$

* n_i - מספר התצפיות בקטגוריה i
* k – מספר הקטגוריות

אזור דחייה ברמת מובהקות α

נדחה את H_0 אם $\chi_p^2 > \chi_{1-\alpha}^2(k-l-1)$, l - מספר הפרמטרים שנאמדו.

רגרסיה ליניארית
Y – משתנה תלוי / משתנה מוסבר.
X – משתנה בלתי-תלוי / משתנה מסביר.
לפעמים יש מספר משתנים מסבירים (p משתנים מסבירים) ואז הם מסומנים: $X_1, X_2, ..., X_p$. **המטרה**: רוצים להסביר את Y בעזרת המשתנה/ים המסביר/ים ולתת תחזיות לציון Y על סמך ציון ה – X.

שלבים:
1. ציור דיאגרמת פיזור: מדיאגרמת הפיזור נלמד האם קיים קשר לינארי בין X ל– Y.
2. מציאת קו הרגרסיה: $\boxed{Y = \beta X + \alpha}$ כאשר β - שיפוע הקו, ו- α - חותך הקו
3. חיזוי Y על-פי X ועל-פי קו הרגרסיה.

שיפוע הקו:

$$\beta = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sum xy - n\overline{xy}}{\sum(x^2)-n(\bar{x})^2}$$

$$\beta = r\frac{\sqrt{\sum(y^2)-n(\bar{y})^2}}{\sqrt{\sum(x^2)-n(\bar{x})^2}} = r\cdot\frac{\sqrt{\sum\left(y_i-\bar{y}\right)^2}}{\sqrt{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}}$$

החותך:

$$\alpha = \bar{Y} - \beta\bar{X}$$

שונות הרגרסיה:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(Y_i-(\beta X_i+\alpha))^2}{n-2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2\right)-\beta^2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right)}{n-2}$$

מקדם המתאם:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)-n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2\right)}}$$

תכונות מקדם המתאם:
- $-1 \leq r \leq 1$
- $r = 0$: אין קשר לינארי בין x ל y – .
- $0 < r \leq 1$: קשר לינארי חיובי בין x ל y – . (כש x – עולה, y עולה).
- $-1 \leq r < 0$: קשר לינארי שלילי בין x ל y – . (כש x – עולה, y יורד).

r^2 - פרופורצית ה״שונות המוסברת״ על-ידי x (מקדם דטרמינציה) $0 \leq r^2 \leq 1$

דף עזר 14 – רגרסיה ליניארית

משוואת הרגרסיה: $\boxed{\hat{y} = \hat{\beta}x + \hat{\alpha}}$

סימונים:

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$S_{YY} = \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$$

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{n}Y_i(X_i-\bar{X}) = \sum_{i=1}^{n}X_i(Y_i-\bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$$

שיפוע הקו:

$$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = r\sqrt{\frac{S_{YY}}{S_{XX}}} = r\sqrt{\frac{(n-1)S_Y^2}{(n-1)S_X^2}} = r\frac{S_Y}{S_X}$$

כאשר r הוא מקדם המתאם (מופיע בהמשך)
כמו כן, יש לשים לב כי S_X ו- S_Y הינם אמדים לסטיות התקן של X ו – Y ושונים מהסימונים S_{XX} ו- S_{YY} שהגדרנו לעיל.

החותך:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

אמד לשונות הרגרסיה:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{\sum (Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i))^2}{n-2} = \frac{S_{YY} - \hat{\beta}^2 S_{XX}}{n-2} = \frac{SS_e}{n-2} = MS_e$$

האמד לשונות של β :

$$\boxed{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}$$

האמד לשונות של אלפא:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2 \sum x_i^2}{n S_{XX}}$$

מקדם המתאם:

$$r^2 = \frac{\hat{\beta}^2 S_{XX}}{S_{YY}} = \frac{SS_B}{SS_T} = \frac{S_{XY}^2}{S_{XX} S_{YY}}$$

$$r = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2\right)}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

בדיקת השערות לשיפוע הרגרסיה

$H_0: \beta = 0$

$H_1: \beta \neq 0$

$$T = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} = \frac{\hat{\beta}}{SE(\hat{\beta})} = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}} \sqrt{S_{XX}} \sim t_{n-2}$$

אזור הדחייה הוא:

$$T > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$$
$$T < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$$

$$T^2 = \left[\frac{\hat{\beta}}{SE(\hat{\beta})}\right]^2 = \left[\frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}}\right]^2 S_{XX} = \frac{MS_B}{MS_E} \sim F_{1,n-2}^{1-\alpha}$$

אזור הדחייה הוא : $F > F_{1-\alpha}(1, n-2)$

ניתן לחשב את T גם באמצעות : $T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2}$

רווח סמך עבור שיפוע הקו

$$\hat{\beta} - t_{n-2}^{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{n-2}^{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$$

אם 0 מופיע בר״ס לא נדחה את השערת האפס.

לוח ניתוח שונות

את תוצאות הרגרסיה נהוג לסכם בלוח הנקרא לוח ניתוח השונות כמפורט להלן:

	SS	df	MS	F
רגרסיה (explained)	SS_B	1	$MS_B = SS_B / df_B$	MS_B / MS_E
שארית / טעות (error)	SS_E	n-2	$MS_E = SS_E / df_E$	
סה״כ(total)	SS_T	n-1		

$$SS_T = SS_B + SS_E = S_{YY} = \hat{\beta}^2 S_{XX} + \sum e_i^2 = S_Y^2 (n-1) = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$SS_B = SS_{reg} = \hat{\beta}^2 S_{XX} = S_{YY} r^2$$

$$SS_E = \sum e_i^2 = S_{YY} - \hat{\beta}^2 S_{XX} = S_{YY}(1 - r^2)$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{n-2} = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \hat{\sigma}^2$$

$$\frac{SS_B}{SS_T} + \frac{SS_E}{SS_T} = 1 = r^2 + (1 - r^2) = \frac{\hat{\beta}^2 S_{XX}}{S_{YY}} + \frac{\sum e_i^2}{S_{YY}}$$

$$F = \frac{MS_B}{MS_E} = \frac{\hat{\beta}^2 S_{XX}}{\hat{\sigma}^2} = T^2 = \left[\frac{\hat{\beta}}{SE(\hat{\beta})}\right]^2 = \frac{r^2 (n-2)}{1 - r^2}$$

סטטיסטי F תמיד בעל שתי דרגות חופש: של המונה ושל המכנה. ברגרסיה פשוטה דרגות החופש של המונה תמיד 1, ושל המכנה תמיד n-2. בטבלה מחפשים את הערך של $F_{(1,n-2)}^{1-\alpha}$

-EOF-