קומבינטוריקה:

חליפות (וקטור סדור באורך r ואיבריו מתוך n איברים, וכל איבריו שונים): $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

תמורות (פרמוטציות): $P(n)=n!$

חליפות עם חזרות: n^r

צירופים (בחירת תת קבוצה של n בגודל r ללא חשיבות סדר הבחירה): $C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

צירופים עם חזרות (חלוקת r כדורים זהים ל- n תאים שונים): $\binom{n+r-1}{n-1}=\binom{n+r-1}{r}$

סכומים וטורים חשובים:

סכום סדרה הנדסית: $S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $(|q|<1)$: $S=\frac{a_1}{1-q}$, טור חשבוני: $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

טור חזקות: $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{a=0}^{\infty}\frac{k^a}{a!}=e^k$

הבינום של ניוטון: $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$

זהויות בינומיות: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$ $\qquad$ $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$

אינטגרלים: $\int_0^{\infty}\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=1$

$\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$ $\qquad$ $\int_0^{\infty}S^{n-1}\cdot e^{-S}dS=(n-1)!$

קירוב סטרלינג: $n!=\sqrt{2\Pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

הסת' מאורע A במרחב שווה הסתברות: $P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$

חוק הכפל: $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$

אם A,B ב"ת אז $P(A|B)=P(A|B^C)=P(A)$

כלל ההכלה וההפרדה:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A_1\cup A_2\cup..\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+...$

$..+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-..+(-1)^{n+1}\cdot P(A_1\cap..\cap A_n)$

הגדרת תלות בין מאורעות:

המאורעות A,B בלתי תלויים $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

- מאורעות זרים שאינם ריקים – תלויים.
- מאורעות מוכלים שאינם ריקים – תלויים.
- מאורעות בלתי תלויים שאינם ריקים – נחתכים.

מאורעות A,B הם ב"ת אמ"מ האינדיקטורים שלהם ב"ת: [צריך לבדוק גם עבור (1,0),(0,1),(0,0)]

$P(I_A=1,I_B=1)=P(I_A=1)\cdot P(I_B=1)$

מספר הבדיקות לאי-תלות n מאורעות:

$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+....+\binom{n}{n}=2^n-n-1$

התפלגות שולית: $P_x(x)=\sum_y P_{xy}(x,y)$

מהתפלגות משותפת ניתן תמיד למצוא התפלגות שולית אך לא להפך.

X ו- Y שווי התפלגות אם לכל a ממשי $P_x(a)=P_y(a)$

X ו- Y שווים אם $P(X=Y)=1\Leftarrow\sum_a P_{xy}(a,a)=1$

נוסחת בייס:

$P_{Y|X}(y|x)=\frac{P_{X|Y}(x|y)\cdot P_Y(y)}{P_X(x)}$

הסתברות מותנית:

$P_{Y|X}(y|x)=P(Y=y|X=x)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}$

נוסחת ההסתברות השלמה:

$P_X(x)=\sum_y P_{X|Y}(x|y)\cdot P_Y(y)$

התפלגות גיאומטרית:

ההסתברות להצלחה ראשונה בנסיון ה- k כאשר הסתברות ההצלחה בכל ניסוי היא p.

התפלגות בינומית: ההסתברות לקבל בדיוק k הצלחות בסדרה של n ניסויים שלכל אחד הסתברות הצלחה p.

אם $X\sim B(n,p)$ וגם $Y\sim B(m,p)$ (אותו p בשניהם) אז: $X+Y\sim B(m+n,p)$

התפלגות בינומית שלילית: ההסתברות לקבל את ההצלחה ה- m -ית בדיוק בנסיון ה- k כאשר לכל ניסוי הסת' הצלחה p.

התפלגות היפר-גיאומטרית: בכד נמצאים N כדורים שחורים ו- M כדורים לבנים. מוציאים n כדורים באקראי ללא החזרה. ההסתברות שבין הכדורים שהוצאו נמצאים k כדורים שחורים.

התפלגות פואסון בדידה עם פרמטר μ: μ מדד לקצב הגידול.

אם $X\sim Pois(\lambda)$ וגם $Y\sim Pois(\mu)$ אז $(X+Y)\sim Pois(\lambda+\mu)$ וגם:

$(X|X+Y=x+y)\sim Bin\left(x+y,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

התפלגות מולטינומית: מבצעים n ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי קיימות k תוצאות אפשריות כל שהסתברות לתוצאה i היא p_i ומתקיים: $\sum_{i=1}^{k}p_i=1$. X_i מציין את מספר התוצאות מסוג i שהתקבלות ב- n ניסויים.

שכיח: הערך בהתפלגות, בעל ההסתברות הגבוהה ביותר (או שמופיע הכי הרבה פעמים).

תוחלת: (I_A - אינדיקטור למאורע)

$E(X)=\sum_x x\cdot P(X=x)$

$E(c)=c$ $\qquad$ $E(g(X))=\sum_x g(x)\cdot P(X=x)$

$E(I_A)=P(A)$ $\qquad$ $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$E(\alpha X)=\alpha\cdot E(X)$

אם X,Y ב"ת אז $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$ - ההיפך לא בהכרח נכון.

אם X מ"מ המקבל ערכים בין a ל- b אז $a\le E(X)\le b$

נוסחת הזנב: $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\ge k)$

תוחלת מותנית: $E(X|Y=y)=\sum_x x\cdot P(X=x|Y=y)$

אם X,Y ב"ת אז $E(X|Y)=E(X)$

במקרה הרציף: $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx$

נוסחת ההחלקה: $E(X)=\sum_y E(X|Y=y)\cdot P(Y=y)$

אם $E(X|Y)=g(Y)$ אז $E(X)=E(E(X|Y))=E(g(Y))$

במקרה הרציף

$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f_{Y|X}(y|x)dy\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)\cdot E(Y|X=x)dx$

נוסחאות נוספות: $E(X+Y|Y)=E(X|Y)+Y$

$E(X+Y|Y=y)=E(X|Y=y)+y$

$E(XY|Y)=Y\cdot E(X|Y)$ $\qquad$ $E(XY|Y=y)=y\cdot E(X|Y=y)$

$E(XY)=E(E(XY|Y=y))$ $\qquad$ $E(X^2)=E(E(X^2|Y=y))$

$E(X^2|Y=y)=Var(X|Y=y)+(E(X|Y=y))^2$

שונות: $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E((X-E(X))^2)$

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

$Var(aX+b)=a^2\cdot Var(X)$

אם X,Y ב"ת: $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

c קבוע אמ"מ $Var(c)=0$

אם $E(X)=\mu$ אז $Var(X)=\min_{\mu}E(X-\mu)^2$

נוסחת הסכום, מקרה כללי: $X_1,X_2,...,X_n$ מ"מ:

$Var(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}Var(X_k)+\sum_{k\ne l}Cov(X_k,X_l)$

סטיית תקן:

$SD(X)=\sqrt{Var(X)}$; $SD(aX+b)=|a|\cdot SD(X)$

נוסחת החלקה לשונות: השונות המותנית של Y בהנתן X כמ"מ שערכו כאשר $X=x$ הוא השונות של Y בהנתן $X=x$ כלומר,

$g(x)=Var(Y|X=x)$, $Var(Y|X)=g(X)$:

$Var(Y)=E\left(Var(Y|X)\right)+Var\left(E\left(Y|X\right)\right)$

קירובים להתפלגויות:

פואסוני להתפלגות בינומית: אם $X\sim Bin(n,p)$ ומתקיים ש- n גדול דיו ו- p בסדר גודל של $1/n$, אז בקירוב X (מספר ההצלחות) מתפלג $Pois(\lambda=np)$.

נורמלי להתפלגות בינומית: ע"י שימוש במשפט הגבול המרכזי נגדיר אינדיקטורים:

$X\sim Bin(n,p)\Rightarrow X=\sum I_j\Rightarrow X\sim N(np,npq)$

קירוב בינומי להתפלגות היפר גאומטרית: כאשר $n\ll N+M$, תוצאת ההתפלגות הבינומית קרובה לתוצאת ההתפלגות הגיאומטרית.

$X\sim HG(n,N,M)\Rightarrow X\sim Bin\left(n,\frac{M}{N+M}\right)$

קו-וואריאנס:

X ו- Y מ"מ, $E(X)=\mu_x$ ו- $E(Y)=\mu_Y$:

$Cov(X,Y)=E(X-\mu_x)(Y-\mu_Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

1) אם X ו- Y ב"ת אז $Cov(X,Y)=0$.

בדרך כלל ההיפך אינו נכון $X,Y\not\Leftarrow Cov(X,Y)=0$ ב"ת.

2) אם $Cov(X,Y)=0$ אז X,Y בלתי מתואמים.

ב"ת $\Leftarrow$ בלתי מתואמים. (לא הבכרח נכון בכיוון השני).

3) $Cov(X,X)=Var(X)$.

4) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$ - סימטריות.

5) $Cov(aX+b,cY+d)=acCov(X,Y)$.

6) $Cov(X,Y+Z)=Cov(Y,X)+Cov(X,Z)$.

7) לכל a קבוע $Cov(X,a)=0$.

מקדם המתאם:

$Corr(X,Y)=\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}=\frac{Cov(X,Y)}{SD(X)\cdot SD(Y)}$

1) $-1\le\rho(X,Y)\le1$.

2) $Corr(X,Y)=0\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$.

3) $Corr(X,X)=1$.

4) $Corr(aX+b,cY+d)=(sign(ac))\cdot Corr(X,Y)$.

5) $\rho(aX,bY)=\rho(X,Y)$.

6) אם $|\rho(X,Y)|=1$ אז קיימים λ ו- μ כך ש- $X=\lambda Y+\mu$ (התלות בין X ל- Y לינארית).

7) אם $Cov(A,B)>0$ אז בין A ל- B קיימת תלות חיובית (כלומר ידיעה ש- A התרחש מגדילה את הסיכויים ש- B יתרחש ולהיפך).

8) אם $Cov(A,B)<0$ אז בין A ל- B קיימת תלות שלילית (כלומר ידיעה ש- A התרחש מקטינה את הסיכויים ש- B יתרחש ולהיפך).

אינדיקטורים:

תוחלת של אינדיקטור: $E(I_A)=P(A)$

אם יש אוסף מאורעות $A_i,i=1,2...n$ ו- X סופר כמה מאורעות קרו מתוך n המאורעות, כלומר $X=\sum_{i=1}^{n}I_{Ai}$ אז: $E(X)=\sum_{i=1}^{n}P(Ai)$

שונות של אינדיקטור:

$Var(I_A)=P(A)\cdot(1-P(A))=pq$

Cov של אינדיקטור:

$Cov(I_A,I_B)=P(A\cap B)-P(A)P(B)$

אמינות רכיבים בטור: $p_1\cdot p_2$

אמינות רכיבים במקביל: $\left[1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)\right]$

פונקציה יוצרת הסתברות:

X מ"מ המקבל ערכים שלמים חיוביים:

$g_x(s)=P(x=0)+sP(x=1)+s^2P(x=2)+...=E(S^x)$

אם $g_x(s)$ ידועה על $(-\varepsilon,\varepsilon)$ אז אפשר לשחזר את ההתפלגות של X :

$P(x=0)=g_x(0)$

$P(x=2)=\frac{1}{2}g_x''(0)$ $\qquad$ $P(x=1)=g_x'(0)$

$P(x=k)=\frac{1}{k!}g_x^{(k)}(0)$

אם $g_x(s)$ ידועה על $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ אז אפשר לשחזר את התוחלת של X : $E(x)=g_x'(1)$

תמיד מתקיים: $g_x(1)=1$

אם Xi מ"מ ב"ת ו- $Y=\sum Xi$ אז $g_Y(t)=\prod g_{Xi}(t)$

חוק המספרים הגדולים:

$X_1,X_2,...,X_n$ מ"מ ב"ת בעלי תוחלת $E(X_k)=\mu$ ושונות $Var(X_k)=\sigma^2$, אזי לכל $\varepsilon>0$ מתקיים: $\lim_{m\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}X_k-\mu\right|\le\varepsilon\right)=1$; $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}X_k$ הינו ממוצע על סמך הנתונים.

פונקציה יוצרת מומנט:

X מ"מ כלשהו $M_X(t)=E(e^{tx})$

הנחה: M_X מוגדרת (כתוחלת) עבור $t\in(-\delta,\delta)$.

תכונות פי"מ:

1) אם $M_X=M_Y$ עבור $t\in(-\delta,\delta)$ אז ל- X ול- Y אותה התפלגות.

2) אם $M_X(t)$ מוגדרת ב- $(-\varepsilon,\varepsilon)$ אז $\frac{d^k}{dt^k}M_X|_{t=0}=E(X^k)$.

3) אם X ו- Y ב"ת אז $M_{X+Y}=M_X\cdot M_Y$.

X מ"מ ו- a,b קבועים אז: $M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_x(at)$.

אי שיוויונות להערכת הסתברות:

אי-שיוויון בול: $P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)\le\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$

אי-שיוויון מרקוב: (X מ"מ אי-שלילי, a כלשהו): $P(X\ge a)\le\frac{E(X)}{a}$

אי-שיוויון ג'נסן: אם f קמורה $E(f(X))\ge f(E(X))$

אי שיוויון צ'בשב: X מ"מ, $E(X)=\mu$, $SD(X)=\sigma$

$P(|X-\mu|\ge k\cdot\sigma)\le\frac{1}{k^2}$ $\qquad$ $P(|X-\mu|\ge a)\le\frac{Var(X)}{a^2}$

התפלגויות רציפות:

X מ"מ רציף, $f_x(x)$ - פונקציית הצפיפות של X.

$P(X\in[a,b])=P(a\le X\le b)=\int_a^b f_x(x)dx$

$P(X\in[x,x+dx])=f_x(x)dx$

$P(X\le a)=\int_{-\infty}^{a}f_x(x)dx$

$P(a\le X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)$

1) $f_x(x)\ge0$ - אחרת מקבלים הסתברות שלילית.

2) $P(-\infty\le X\le\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)dx=1$ - הסתברות מאורע ודאי.

תוחלת מ"מ רציף: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_x(x)dx$.

$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\cdot f_x(x)dx$

תוחלת $E(X)$ קיימת רק כאשר $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f_x(x)|dx<\infty$.

פי"מ של מ"מ רציף $M_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\cdot f_x(x)dx$

התפלגות נורמלית:

שימוש בטבלה עבור מ"מ נורמלי $Z\sim N(0,1)$; $f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}e^{-z^2/2}$

$P(a\le Z\le b)=\Phi(b)-\Phi(a)$ $\qquad$ $P(Z\le a)=\Phi(a)$

$P(-a\le Z\le a)=2\cdot\Phi(a)-1$ $\qquad$ $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

נירמול: אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ אזי $Z\equiv\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

אם $X_1,X_2,...,X_n\sim N[0,1]$ ב"ת, $S_n^2=\sum X_i^2$, אז $S_n^2\sim Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$

משפט הגבול המרכזי:

$X_1,X_2,...,X_n$ מ"מ ב"ת, $E(X_i)=\mu$, $Var(X_i)=\sigma^2$ אזי:

$SD\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)=\sigma\cdot\sqrt{n}$

אם $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ אז $\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}N(0,1)$, כלומר

$\overline{X_n}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

כלומר $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\le a\right)=\varphi(a)$

$\sum_{i=1}^{n}X_i$ מתפלג $N(n\cdot\mu,n\cdot\sigma^2)$.

התפלגות מינימום ומקסימום:

יהיו $X_1, X_2, ..., X_n$ מ"מ ב"ת:

$$X_{\max} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

$$X_{\min} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

$$F_{X\max} = P(X_{\max} \le x) = \prod_{i=1}^{n} F_{Xi}(x)$$

$$F_{X\min} = P(X_{\min} \le x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1-F_{Xi}(x))$$

תכונת חוסר זיכרון:

תכונת חוסר זיכרון מתקיימת רק בהתפלגויות פואסון, אקספוננציאלית, גיאומטרית.

דילול פואסון: נתון: $N \sim Poisson(\lambda)$

$$X|N = Bin(n,p) \Rightarrow N - X|N{=}n \sim Bin(n,q)$$

$$X \sim Poisson(p\lambda)$$

$$N - X \sim Poisson(q\lambda)$$

פונקצית התפלגות מצטברת:

הגדרה $F_x(x) = P(X \le x)$.

במקרה הבדיד $F_x(x) = \sum_{t \le x} P(X{=}t)$

במקרה הרציף $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)dx$

1) $0 \le F_x(x) \le 1$. 2) $F_x(x)$ לא יורדת.

3) $\lim_{x\to-\infty} F_x(x) = 0$ $\lim_{x\to\infty} F_x(x) = 1$.

4) $F_x(x)$ רציפה מימין. 5) $f_x(x) = \frac{d}{dx}F_x(x)$.

נוסחת הזנב עבור מ"מ רציף אי שלילי

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1-F_x(x))dx = \int_0^{\infty} P(X>x)dx$$

אם $E(X) < \infty$ אז $\lim_{x\to\infty} x\cdot(1-F_x(x)) = 0$.

התפלגות אחידה (יוניפורמית):

X מ"מ המציין נקודה שנבחרה באקראי בקטע $[a,b]$: $P_x(x) = \frac{1}{b-a}$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad P(c \le x \le d) = \frac{d-c}{b-a}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

אם $X_1, X_2, ..., X_n \sim U[0,1]$ ב"ת:

$$f_{\min}(x) = n(1-x)^{n-1} \qquad f_{\max}(x) = nx^{n-1}$$

$$E(X_{\min}) = \frac{1}{n+1} \qquad E(X_{\max}) = \frac{n}{n+1}$$

התפלגות אקספוננציאלית: $X \sim Exp(\lambda)$

$$P(X > a) = e^{-\lambda a}$$

מינימום של אקספוננט הוא אקספוננט

$$X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu) \Rightarrow Min(X,Y) \sim Exp(\lambda+\mu)$$

אם X,Y ב"ת

$$X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu) \Rightarrow P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

תכונת חוסר זיכרון: $P(T > t+s | T>t) = P(T > s)$

משפט: נתון מ"מ T, נגדיר $G(t) = P(T > t)$.

אם $G(t+s) = G(t)\cdot G(s)$, אז קיים λ כך ש- $T \sim Exp(\lambda)$.

התפלגותGamma:

$X_1, X_2, ..., X_n$ מ"מ ב"ת, $X_i \sim Exp(\lambda)$, נגדיר $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, אזי $Y \sim Gamma(n,\lambda)$.

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\Pi}$$

כאשר n שלם מתקיים: $\Gamma(n) = (n-1)!$

הקשר בין מ"מ אקספוננציאלי פואסוני ו-Gamma:

יהי N_t מספר ההופעות בקטע $[0,t]$ נגדיר Ti זמן המופע ה- I; $(T_i - T_{i-1})$ - זמן בין מופעים.

$$(T_i - T_{i-1}) \sim Exp(\lambda) \; ; \; Ti \sim Gamma(i,\lambda),$$

$$Nt \sim Poisson(\lambda t), \quad P(Ti > t) = P(N_t < i-1) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$$

טרנספורמציות ליניאריות:

מגדירים שני מ"מ U,V כפונקציה ליניארית של המשתנים X,Y:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

פונקצית הצפיפות המשותפת של U ו- V:

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{|A|} f_{XY}\left(A^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{|A|} f_{XY}\left(\frac{a_{22}u - a_{12}v}{|A|}, \frac{a_{11}v - a_{21}u}{|A|}\right)$$

התפלגות משותפת רציפה של שני מ"מ

לוקטור (x,y) פונקצית צפיפות f אם לכל תת קבוצה של R^2: $P((x,y)\in A) = \iint_A f_{xy}(t,s)dtds$

$$P(x \le X \le x+dx, y \le Y \le y+dy) = f_{xy}(x,y)dxdy$$

1) $f \ge 0$. 2) $\iint_{R^2} f_{xy}(x,y)dxdy = 1$.

3) פונקצית הצפיפות השולית של X: $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy$.

4) X,Y ב"ת אמ"מ $f_{xy}(x,y) = f_x(x)f_y(y)$ או

$$F_{xy}(x,y) = F_x(x)F_y(y)$$

שיטות למציאת צפיפות משותפת:

א. ע"י $P(x \le X \le x+dx, y \le Y \le y+dy) = f_{xy}(x,y)dxdy$.

ב. ע"י מציאת $F_{xy}(x,y)$ וגזירתה:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[F_{X,Y}(x,y)\right].$$

ג. $f_{xy}(x,y) = f_{Y|X}(y|X{=}x)f_X(x)$

אם ניתן להפריד את $f_{X,Y}(x,y)$ למכפלת שתי פונקציות באופן הבא: $f_{X,Y}(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ ותחומיהם השוליים של X,Y אינם תלויים אחד בשני, כלומר התחום המשותף של (X,Y) הינו מלבן המקביל לצירים, אזי המשתנים המקריים X,Y הם ב"ת ו- $g(x), h(y)$ הן פונקציות הצפיפות של X,Y **עד כדי קבוע**.

התפלגות גאוסית רב מימדית:

$X_1, X_2, ..., X_n$ מ"מ נורמליים ב"ת, $X_1, ..., X_n \sim N(0,1)$;

$R^2 = (X_1)^2 + (X_2)^2 + ... + (X_n)^2$:

$f_R(r) = \frac{Un\cdot(r)^{n-1}}{\sqrt{(2\Pi)^n}} e^{-\frac{r^2}{2}}$, כאשר Un שטח ספירת יחידה ב- R^n.

הגדרה: וקטור X,Y נורמלי אם ל- $aX+bY$ התפלגות נורמלית לכל a,b. (לא מספיק שההתפלגויות השוליות של X ו- Y יהיו נורמליות).

תכונה אופיינית: $aX + bY \sim N(0, a^2+b^2)$

כאשר $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$,

נגדיר $A = \begin{bmatrix} Var(x) & Cov(x,y) \\ Cov(x,y) & Var(y) \end{bmatrix}$

$$Var(aX+bY) = (a,b)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$aX + bY \sim N\left(a\mu_x + b\mu_y, (a,b)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$$

משפט: אם (X,Y) וקטור נורמלי עם רכיבים מתוקנים כך ש: $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$, אז $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z$, כאשר $Z \sim N(0,1)$ ולא תלוי ב- X. $\rho = Corr(x,y) = E(XY)$

תוחלת וקטור: כאשר (U,V) וקטור נורמלי מתוקן, $\rho = Corr(U,V)$,

$$E(U|a \le v \le b) = \int_a^b E(U|V{=}v)f_V(v|a \le v \le b)dV =$$

$$= \frac{\rho}{\varphi(b)-\varphi(a)} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\left(e^{-\frac{a^2}{2}} - e^{-\frac{b^2}{2}}\right)$$

$$E(U|V{=}v) = \rho \cdot v$$

פונקצית צפיפות מותנית:

$$f_V(V|a \le v \le b) = \begin{cases} \frac{f_V(v)}{P(a \le v \le b)} & v\in[a,b] \\ 0 & v\notin[a,b] \end{cases}$$

התניות במקרה הרציף:

צפיפות מותנית: $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 0 & f_x(x)=0 \\ \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)} & f_x(x)\neq 0 \end{cases}$

כלל הכפל: $f_{xy}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$

פונקצית ההתפלגות המצטברת המותנית

$$F_{xy}(x|y) = P(X \le x | Y{=}y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx$$

חישוב הסתברות מותנית:

$$P(a \le X \le b | Y{=}y) = \int_a^b f_{X|Y}(x|y)dx$$

נוסחת בייס: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}$

הקבלה לחוק ההסתברות השלמה:

$$P(A) = \int_x P(A|X{=}x)f_X(x)dx$$

התפלגות דו נורמלית:

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \qquad X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$\rho = Corr(X,Y)$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\Pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\cdot Exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right)$$

בניה של משתנה מקרי בעל התפלגות דו נורמלית סטנדרטית:

$Z, X \sim N(0,1)$ ב"ת: $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z$ כאשר $\rho = Corr(X,Y)$ ומקבלים: $E(X) = E(Y) = 0$

$$(Y|X{=}x) \sim N(\rho x, 1-\rho^2)$$

$$E(Y|X) = \rho X \qquad Var(Y|X) = 1-\rho^2$$

$$(X|Y{=}y) \sim N(\rho y, 1-\rho^2)$$

$$E(X|Y) = \rho Y \qquad Var(X|Y) = 1-\rho^2$$

חישוב $P(X>0,Y>0)$ אם נתון $X,Y \sim N(0,1)$ ו- $\rho = Corr(X,Y)$:

$$P(X>0,Y>0) = \frac{90^\circ - \arctan\left(\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{360^\circ}$$

התפלגות דו נורמלית סטנדרטית של מ"מ ב"ת בקואורדינטות פולאריות (התפלגות ריילי):

$$f_{R\theta}(r,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Pi} re^{\frac{-r^2}{2}} & r>0, \theta\in[0,2\Pi] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$f_R(r) = re^{\frac{-r^2}{2}}$$

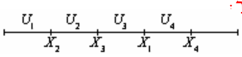
$$F_R(r) = \begin{cases} 1-e^{\frac{-r^2}{2}} & r \ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$f_\theta(\theta) \sim U[0,2\Pi]$$

$$R^2 \sim Exp\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

סטטיסטי הסדר:

יהיו $, X_2, ..., X_n$



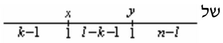
מתפלגים לפי $f_{xi}(x_i)$ נגדיר:

$$U_1 = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

$$U_n = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \qquad = \min\{X_i > U_1; i = 1, ..., n\}$$

אז: $f_{U_k}(x) = n\binom{n-1}{k-1} f_x(x)\left[F_x(x)\right]^{k-1}\left[1-F_x(x)\right]^{n-k}$

התפלגות משותפת של U_k, U_l, $k < l$:

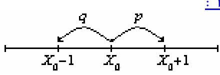


$$P(U_k \in dx, U_l \in dy) = \binom{n}{1,1,k-1,n-l}\cdot\left[F(x)\right]^{k-1}\cdot ...$$

$$..\cdot f(x)dx\cdot\left[F(y)-F(x)\right]^{l-k-1}\cdot f(y)dy\cdot\left[1-F(y)\right]^{n-l}$$

מהלך מקרי על הישר:

חלקיק מתחיל ב- X_0, נע ימינה בהסתברות p,



שמאלה בהסתברות $q = 1-p$, הקפיצות ב"ת, תחום הישר $[0, X_0+c]$. נגדיר אינדיקטור $Y_k = \begin{cases} 1 & right \\ -1 & left \end{cases}$.

מיקום החלקיק אחרי n צעדים: $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

הסיכוי שהחלקיק יגיע ל- $X_0 + c$ לפני שיגיע ל- 0:

1.אם $p = q$ אזי: $U_x = \frac{x}{c}$. תוחלת זמן משחק: $V_x = X(c-X)$.

2.אם $p \neq q$: $U_x = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^c}$.

תוחלת: $V_x = -\frac{X}{p-q} + \frac{c}{p-q}\cdot\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^c}$.

התניה בצעד ראשון:

עבור הסתברות:

$$P(A_x) = P(A_{x+1})\cdot p + P(A_{x-1})\cdot q$$

עבור תוחלת:

$$E(T_x) = (1 + E(T_{x+1}))\cdot p + (1 + E(T_{x-1}))\cdot q$$

נגדיר N - מספר החזרות של חלקיק (המתחיל בראשית) לראשית; α - ההסתברות שהחלקיק יחזור לראשית:

1. $p = q \Leftarrow \alpha = 1$.
2. $p > q \Leftarrow \alpha = 2q$.
3. $p < q \Leftarrow \alpha = 2p$
4. $p \neq q \Leftarrow \alpha < 1 \Leftarrow (1+N) \sim Geo(1-\alpha)$.

קונבולוציה:

אם X,Y מ"מ ב"ת, $Z = X + Y$.

מקרה בדיד: $P_z(z) = \sum_x P_X(x)P_Y(z-x)$

מקרה רציף: $f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)f_y(z-x)dx$.

מקרה רציף, X,Y תלויים:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, z-x)dx.$$

טרנספורמציה חד-חד-ערכית של מ"מ רציף:

יהי X מ"מ רציף המקבל ערכים בקטע $[a,b]$. תהיה $g: R \to R$ פונקציה גזירה ועולה (יורדת) ב- $[a,b]$. אזי למ"מ Y המוגדר להיות $Y = g(X)$ יש את פונקצית הצפיפות הבאה:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_x(g^{-1}(y))\left|\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}\right| & g(a) \overset{(\ge)}{\le} y \overset{(\ge)}{\le} g(b) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

טרנספורמציה לא חח"ע של מ"מ רציף:

יהי X מ"מ רציף המקבל ערכים בקטע $[a,b]$. תהיה $g: R \to R$ פונקציה גזירה ב- $[a,b]$ (לא בהכרח חח"ע) המקיימת שלכל y קיים מספר בדיד של x- ים ב- $[a,b]$ שעבורם $g(x) = y$. אזי למ"מ Y המוגדר להיות $Y = g(X)$ יש את פונקצית הצפיפות הבאה:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{\substack{x: a\le x\le b \\ g(x)=y}} f_x(x)\left|\frac{1}{g'(x)}\right| & \min_{[a,b]}(x) \le y \le \max_{[a,b]}(x) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

טרנספורמציה דו-מימדית:

יהי (X,Y) מ"מ דו מימדי רציף בעל פונקצית צפיפות משותפת $f_{xy}(x,y)$. תהיינה $v = g_2(x,y)$ ו- $u = g_1(x,y)$ פונקציות ממשיות על המישור שהן חח"ע וגזירות, כך שקיימות הפונקציות ההפוכות $x = h_1(u,v)$ ו- $y = h_2(u,v)$. נגדיר יעקוביאן:

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

פונקצית הצפיפות המשותפת של $V = g_2(X,Y)$, $U = g_1(X,Y)$ היא:

$$f_{UV}(u,v) = f_{xy}(h_1(u,v), h_2(u,v))|J(u,v)|$$

עבור מ"מ $U = g_1(X,Y)$ ניתן לכתוב מ"מ נוסף $V = X$ או $V = Y$ לבצע טרנספורמציה דו מימדית עבור U,V ולמצוא צפיפות שולית של U ע"י אינטגרציה.

מעבר לקואורדינטות פולאריות:

$$f_{R\theta}(r,t) = r\cdot f_{xy}(r\sin t, r\cos t)$$