Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

אופטימיזציה

בעי"ת תכנות מתמטי :

בבעי"ת תכנות מתמטי יש כמה משתנים.

Objective function ←פונקצי"ת מטרה - מה המטרה? הזמן הכי קצר, מימון הכי זול וכו'

decision variables ← משתני החלטה

constraints ← אילוצים

לדוגמה :

פונקצי"ת מטרה :

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

subject to

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$ m אילוצי אי-שוויון

$$h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, p$$ p אילוצי שוויון

נסמן וקטור $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ועכשיו נכתוב את אותה הבעיה המתמטית בכתיב החדש.

בעיה (P)

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ g_i(x) \le 0 & i = 1, \ldots, m \\ h_j(x) = 0 & j = 1, \ldots, p \end{cases}$$

כלל : $\max f(x) = -\min(-f(x))$

הגדרות :

$x \in \mathbb{R}^n$ הוא <u>פיתרון אפשרי</u> (feasible solution) של בעיה (P) אם הוא מקיים את כל האילוצים.

x^* הוא <u>פיתרון אופטימלי</u> אם

א) הוא פיתרון אפשרי

ב) הוא מקיים : $f(x^*) \le f(x)$ לכל x

אילוצים מיוחדים

אילוצי חסם: אילוצים עם גבול עליון ותחתון $l_i \le x_i \le u_i$

מקרים פרטיים של אילוצי חסם הם:

אילוצי אי-שליליות: $x_i \geq 0$

אילוצי שלמות: $x \in \{0,1,\dots\}$

אילוצים בינאריים: $x_i \in \{0,1\}$

בעיות טיפוסיות לנושאי הקורס

נושאי הקורס:

תכנות לינארי - Linear Programming

תכנות לינארי בשלמים - Integer Linear Programming

תכנות דינאמי - Dynamic Programming

תכנות לינארי

בעיית "ייצור": מ- m חומרי גלם (ח"ג) ניתן לייצר n מוצרים שונים. ח"ג נתונים בכמות ידועה.

ידועה טכנולוגיית הייצור.

לכל יחידת מוצר, ידוע הרכב ח"ג הדרושים לייצור.

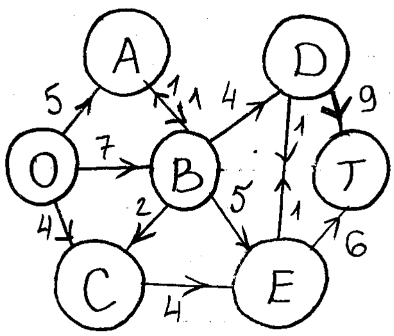
ידועים מחירי הקניה של ח"ג ומחירי המכירה של המוצרים.

בעיית המפעל- לקבוע כמה לייצר מכל מוצר, כך שהרווח הנקי ממכירת המוצרים יהיה מקסימלי תוך עמידה באילוצי כמות ח"ג הנתונה.

בעיית התחבורה: סחורה מצויה ב- n מחסנים ויש להפיצה ל- n חנויות.
כמויות במחסנים ידועות, הביקוש בכל אחת מהחנויות ידוע וכן ידועים מחירי ההובלה מכל מחסן לכל חנות.
המטרה - כמה להוביל מכל מחסן לכל חנות כך שעלות ההובלה הכוללת תהיה מינימלית.

בעיית השמה (Assignment) - יש לאייש n משרות n משרות ב- n מועמדים. התועלת של כל מועמד לכל אחת מהמשרות ידועה באופן כמותי.
המטרה - איך לאייש את המשרות כך שהתועלת הכללית מקסימלית.

בעיית השמה היא כמעט מקרה פרטי של בעיית התחבורה.
מחסנים הם המועמדים שיש אחד בכל מחסן, המשרות הן החנויות והעלויות הם התועלת של כל מועמד.



בעיית זרימה ברשת

מעוניינים להעביר שכל מ- O ל- T דרך הרשת ומה הכי הרבה שניתן להעביר ועדיין לעמוד בקיבולת של הקשתות

דוגמה לפיתרון אפשרי ולא בהכרח אופטימלי:
- הזרם 5 יחידות במסלול $O \to B \to E \to T$
- הזרם 1 יחידות במסלול $O \to B \to C \to E \to T$
- הזרם 1 יחידות במסלול $O \to B \to C \to E \to D \to T$

סה"כ זרימה של 7 יחידות.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

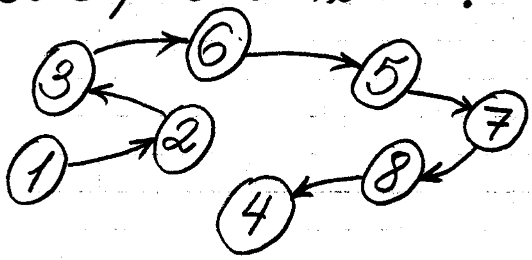
תכנות לינארי בשלמים

TSP (Traveling Salesperson Problem) - בעיית סוכן נוסע

סוכן יוצא ביום הראשון מביתו (עיר מס' 1) וצריך לבקר בכל יום באחת מ- n ערים בדיוק פעם אחת ולחזור לביתו.
ידועים מרחקי הנסיעה בין כל זוג ערים.

המטרה: מסלול באורך מינימלי.

נניח שמדובר לדוגמה ב- 8 ערים. הנה פיתרון אפשרי אך לא בהכרח אופטימלי:



ננסה למדל חלק מהבעיה.

נתונים:

נניח ש - C_{ij} - מרחק הנסיעה מהעיר i לעיר j $(i,j=1,\dots,n)$

בכל בעיה נגדיר את הנתונים, את המשתנים ואת האילוצים ולפיהם נכתוב את המודל.

משתנים:

נגדיר משתני x_{ij} באופן הבא:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{אם מחליטים לנסוע מ-}i\text{ מיד ל-}j \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פונקצי"ת מטרה:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$$

אילוצי שלמות: האילוץ נובע מעצם הגדרת המשתנים

$x_{ij}\in\{0,1\}$ לכל $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,n$

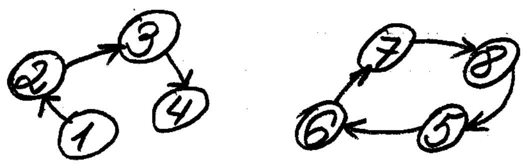
אם יוצאים מעיר i חייב להתקיים $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$

כלומר, יציאה אחת בדיוק מעיר i (מאפיינו של מסלול)

אילוץ נוסף שחייב להתקיים $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$

וזה אומר כניסה אחת לכל עיר j.

אילוצים אלו אינם מספיקים מפני שלא מונעים את האפשרות לתתי מסלולים כגון:



Knapsack problem - בעיית תרמיל הגב

יש תרמיל הקיבולת נתונה C ק"ג.
ניתן לארוז חפצים מתוך רשימה של n חפצים שונים.
משקל חפץ i נסמן ב W_i, ערך חפץ i נסמן ב V_i.
המטרה: להחליט איזה חפצים לארוז תוך עמידה באילוץ הקיבולת של התרמיל וכך שערכם מקסימלי.

פיתרון חלקי:

משתנים: $x_i = \begin{cases} 1 & \text{חפץ } i \text{ נארז} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

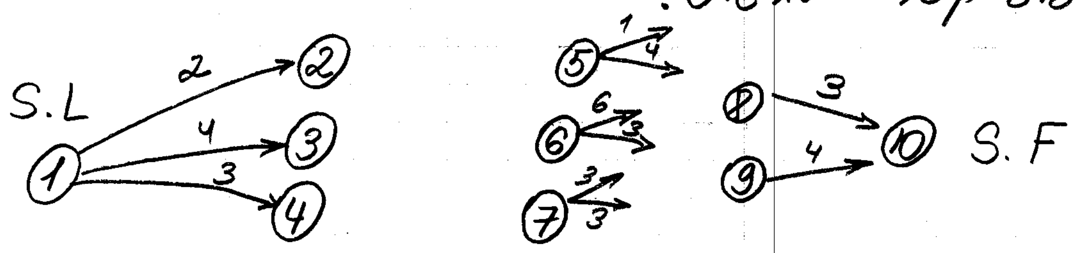
פונקצ"ת מטרה: $\max \sum_{i=1}^{n} V_i x_i$

אילוצים: $\sum_{i=1}^{n} W_i x_i \le C$

כאשר מתקיים $x_i \in \{0,1\}$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$

תכנות דינמי

בעיה בתכנות דינמי - מציאת מסלול בעל אורך הקצר ביותר או בעל העלות הנמוכה ביותר מסנט-לואיס לסנט-פרנציסקו כאשר ידוע שמסנט-לואיס ניתן להגיע ל-3 ערים ומשם לעוד 3 וביציאה מהעיר השניה יש 2 ערים אפשריות ולבסוף מהם לסנט-פרנציסקו כאשר רמת הסיכוי לשוד בכל מסלול שונה.
מטרה: מסלול קצר ברשת.



פיתרון היוריסטי: מכל עיר סע לעיר שהכי זול לנסוע אליה.

$1 \to 2 \to 6 \to 9 \to 10$ סה"כ עלות המסלול $= 2+4+3+4 = 13$

$1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$ $3+1+3+4 = 11 =$ אבל במסלול אחר העלות

ניסוח בעיות בתכנות ליניארי (תו"ל)

בעיית ייצור

מפעל מייצר שני מוצרים I, II מאותם שני חומרי גלם שנסמנם A, B. להלן נתוני הייצור והמחירים:

ח"ג / מוצר	A	B	מחיר מכירה
I	3	2	14
II	2	4	20
מחיר קניית ק"ג	1	2	
כמות מקסימלית	36	40	

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

מטריצת הטכנולוגיה מתארת את טכנולוגיית הייצור

צריך להחליט כמה לייצר ממוצר I וכמה ממוצר II כדי לקבל רווח מקסימלי.

נתונים נוספים -

- מוצר I צריך לעבור טיפול כימי המצריך 100 גרם כימיקל מסוים לכל 1 ק"ג של מוצר I
- כמות מקסימלית של הכימיקל היא 1 ק"ג.

משתנים -

x_1 - כמות הייצור של מוצר I

x_2 - כמות הייצור של מוצר II.

מטרה -

קונים 3 ק"ג של ח"ג A, ח"ג B 2kg

מכירה

רווח מיחידת מוצר I: $14-3\cdot 1-2\cdot 2=7$

רווח מיחידת מוצר II: $20-2\cdot 1-4\cdot 2=10$

פונקציית מטרה $\max(7x_1+10x_2)$

אילוצים s.t

$3x_1+2x_2\le 36$ → הגבלת כמות מקסימלית של חומרי הגלם

$2x_1+4x_2\le 40$

$x_1\le 10$ ← הגבלת הכמות של הכימיקל. $\frac{1000}{100}$ (1 ק"ג / גרם)

$x_1\ge 0$

$x_2\ge 0$

תיאור כללי של בעיית הייצור

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

m חומרי גלם

n מוצרים

a_{ij} - כמות חומר גלם i הדרושה לייצור של המוצר j

כאשר $i=1,\dots,m$

$j=1,\dots,n$

b_i - כמות מקסימלית נתונה מח"ג i

p_j - מחיר מכירה של יחידת מוצר j $(1,\dots,n)$

q_i - מחיר קניה של יחידת חומר גלם i $(1,\dots,m)$

משתנים -

x_j - כמות שתיוצר ממוצר j $(j=1,2,\dots,n)$

מטרה - מקסימום רווח.

חישוב עזר: c_j הרווח הנקי מיחידת מוצר j.

$$c_j = p_j - \left(\sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij}\right)$$

המודל המתמטי:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i=1,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,n$$

כתיב וקטורי:

$$c=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

מטריצה $A_{m\times n}$

$$(A)_{ij}=a_{ij} \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n\end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \max c^T x\\ A\cdot x \le b\\ x\ge 0\end{matrix}}$$

מודל ייצור

כאשר $c^T x = (c_1, c_2, \dots, c_n)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum c_j x_j$

בעיית דיאטה

כיצד לקבוע סל של מוצרי מזון הזול ביותר שעדיין יעמוד בדרישות תזונתיות מינימליות.

אבות מזון \ מוצרי מזון	חיטה	תירס	כמות min נדרשת
עמילן (1)	5	7	8
פרוטאין (2)	4	2	15
ויטמין (3)	2	1	3
מחיר ליחידה	0.60	0.35	

משתנים -

x_1 - כמות חיטה בדיאטה

x_2 - כמות תירס בדיאטה

$$\min \ 0.60x_1 + 0.35x_2$$

$$\begin{aligned} \text{S.t:}\quad & 5x_1 + 7x_2 \geq 8 \\ & 4x_1 + 2x_2 \geq 15 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

מודל כללי -

m - אבות מזון

n - מוצרים

c_J - מחיר קנייה של יחידת מוצר J $\quad J=1,2,\dots n$

b_i - כמות מינימלית נדרשת מאב מזון i $\quad i=1,2,\dots m$

a_{iJ} - כמות אב מזון i ליחידת מוצר J $\quad i=1,\dots,m \quad J=1,2,\dots,n$

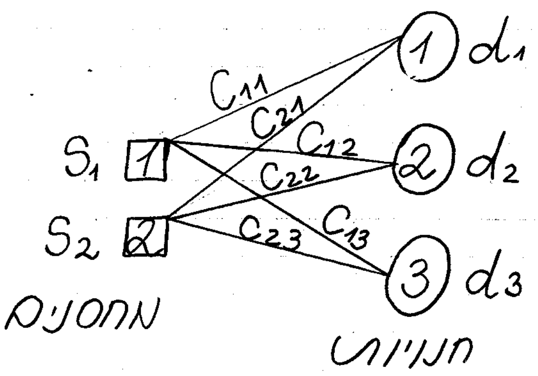
$$\min \sum_{J=1}^{n} c_J x_J$$

$$\begin{aligned} \text{S.t}\quad & \sum_{J=1}^{n} a_{iJ} x_J \geq b_i \qquad i=1,\dots,m \\ & x_J \geq 0 \qquad J=1,\dots,n \end{aligned}$$

ובכתיב וקטורי:

$$\boxed{\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}}$$

בעיית הובלה/תחבורה



כמה להוביל מכל מחסן לכל חנות כך שסה"כ ההוצאות תהיינה מינימליות.

הנחה: סה"כ היצע = סה"כ ביקוש

$S_1+S_2 \quad d_1+d_2+d_3$

זה אומר שכל המחסנים מתרוקנים וכל החנויות מתמלאות בדיוק בכמות המבוקשת על-ידן.

אם $d_1+d_2+d_3 > S_1+S_2$ - אין פיתרון

אם $d_1+d_2+d_3 < S_1+S_2$ תמיד ניתן "לבנות" חנות וירטואלית d_4 ואז $d_1+d_2+d_3+d_4=S_1+S_2$ וההנחה שלנו מתקיימת.

משתנים:

X_{iJ} - כמות שמוביל ממחסן i לחנות J כאשר $J=1,2,3$ $\quad i=1,2$

$$\min \; C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{13}X_{13}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}$$

s.t.

כמות במחסן i

$$\underbrace{X_{i1}+X_{i2}+X_{i3}}_{\text{כמות ממחסן } i \text{ שנשלחת לחנויות 1 2 ו-3.}} = S_i \quad (i=1,2)$$

התרוקנות מחסן i

הביקוש בחנות J

$$\underbrace{X_{1J}+X_{2J}}_{\text{כמות שנשלחה לחנות } J \text{ ממחסן 1 וממחסן 2}} = d_J \quad (J=1,2,3)$$

התמלאות חנות J

$$X_{iJ} \geq 0 \quad i=1,2 \quad J=1,2,3$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

בע"ה כללית של תחבורה

פונקצית מטרה :

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

אילוצי היצע :

s.t

סך ההיצע של מחסן i

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i \qquad i = 1, \dots, m$$

סך ההובלות ממחסן i

אילוצי ביקוש :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j = 1, 2, \dots n$$

סך ההובלות המגיעות לחנות j

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \dots m \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

מודל וקטורי -

$$\underbrace{x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}}_{\text{משתנים}} \qquad \underbrace{C = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}}_{\text{נתונים}}$$

יש לסדר את Ax , לכל משתנה יש עמודה ושורה במטריצה.

שורה	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	RHS
1	1	1	1	0	0	0	S_1
2	0	0	0	1	1	1	S_2
3	1	0	0	1	0	0	d_1
4	0	1	0	0	1	0	d_2
5	0	0	1	0	0	1	d_3

A   b

יוני-מודולריות :

במטריצה הזו ישנה תכונה שכל דטרמיננט של כל תת מטריצה ריבועית שלה שווה או ל-0 או ל-1 או ל-(-1)

משפט : בבעיית תחבורה שבה המשתנים הם Integer תמיד קיים פתרון שהוא Integer זה נובע מתכונת היוני-מודולריות של המטריצה.

$$\boxed{\begin{array}{c} \min\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

בעי"ת השמה

יש לבא"ש n משרות ב-n מועמדים. התועלת של כל מועמד לכל משרה נתונה.

המטרה: תוכנית איוש בעלת תועלת כללית מקסימלית.

U_{iJ} - תועלת מאיוש משרה i ע"י מועמד J.

$$X_{iJ} = \begin{cases} 1 & \text{אם משרה } i \text{ מאוישת ע"י מועמד } J \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מטרה:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{J=1}^{n} U_{iJ} X_{iJ}$$

אילוצים -

s.t

$$\sum_{J=1}^{n} X_{iJ} = 1 \quad i = 1,2,\dots n$$

כל משרה מאוישת בדיוק ע"י מועמד אחד.

$$\sum_{i=1}^{n} X_{iJ} = 1 \quad J = 1,2,\dots, n$$

מועמד מסוים מאייש בדיוק משרה אחת.

$$X_{iJ} \geq 0 \text{ binary } \in \{0,1\}$$

מכיוון שזה מקרה פרטי של בעי"ת התובלה והמטריצה היא יונימודולרית, הפתרונות "יצאו שלמים" בגלל המשפט ואין צורך לדרוש $X_i \in \{0,1\}$

תיאור פיתרון גרפי לבעי"ת תכנות ליניארי ב-2 משתנים

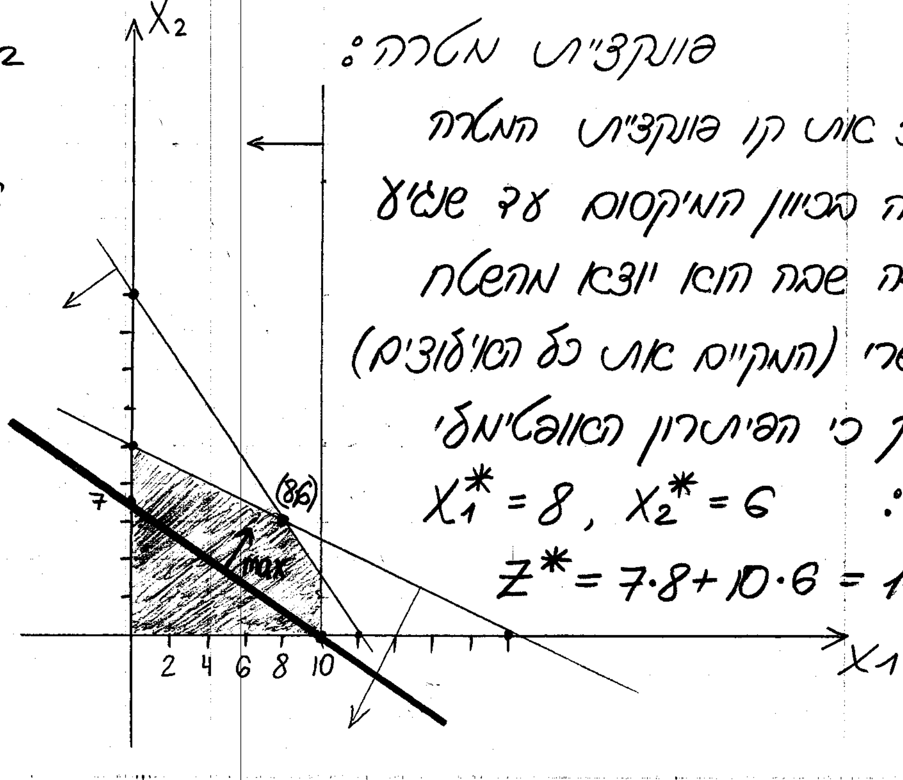
$$\max \; Z = 7X_1 + 10X_2$$

s.t

1. $3X_1 + 2X_2 \leq 36$
2. $2X_1 + 4X_2 \leq 40$
3. $X_1 \leq 10$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$



פונקצ"ית מטרה: נזיז את קו פונקצ"ית המטרה למעלה בכיוון המיקסום עד שנגיע לנקודה שבה הוא יוצא מהמשולש האפשרי (המקיים את כל האילוצים) ונסיק כי הפיתרון האופטימלי הוא: $X_1^* = 8$, $X_2^* = 6$

$$Z^* = 7 \cdot 8 + 10 \cdot 6 = 116$$

נתבונן בקו המחבר את הנקודות $(8,6)$ ו $(10,3)$

ונתאר אותו: $\lambda\binom{8}{6}+(1-\lambda)\binom{10}{3}$ $\quad 0\le\lambda\le 1$

* שטח הפתרונות הוא מצולע
* לפחות אחד הפתרונות האופטימליים מתקבל באחד הקודקודים של המצולע.
* אם ישנם עוד פתרונות אופטימליים המתקבלים על קודקודים אז אוסף הנקודות בניהם מהווה אינסוף פתרונות אופטימליים.

דוגמא: בעיה עם קבוצת פתרונות אפשריים ריקה.

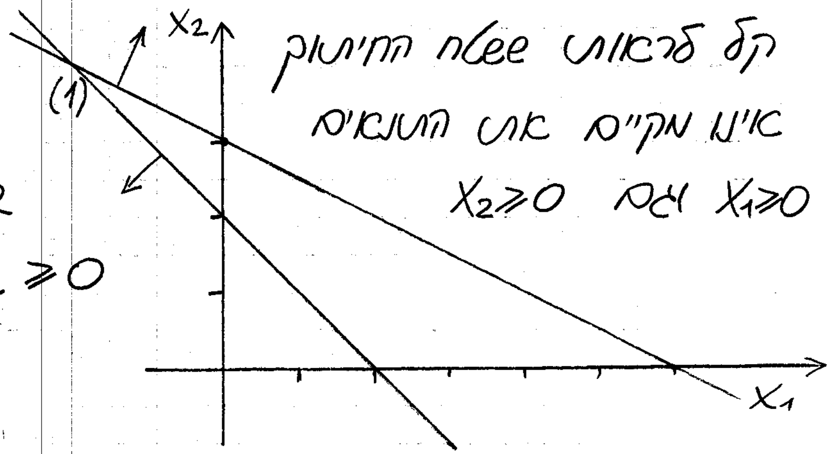
מטרה: $\min\ 3x_1-x_2$

$\underline{s.t}$:

(1) $x_1+x_2\le 2$

(2) $2x_1+4x_2\ge 12$

$x_1\ge 0 \quad x_2\ge 0$



קל לראות ששטח החיתוך אינו מקיים את התנאים $x_1\ge 0$ וגם $x_2\ge 0$

דוגמא: קבוצת פתרונות אפשריים לא חסומה.

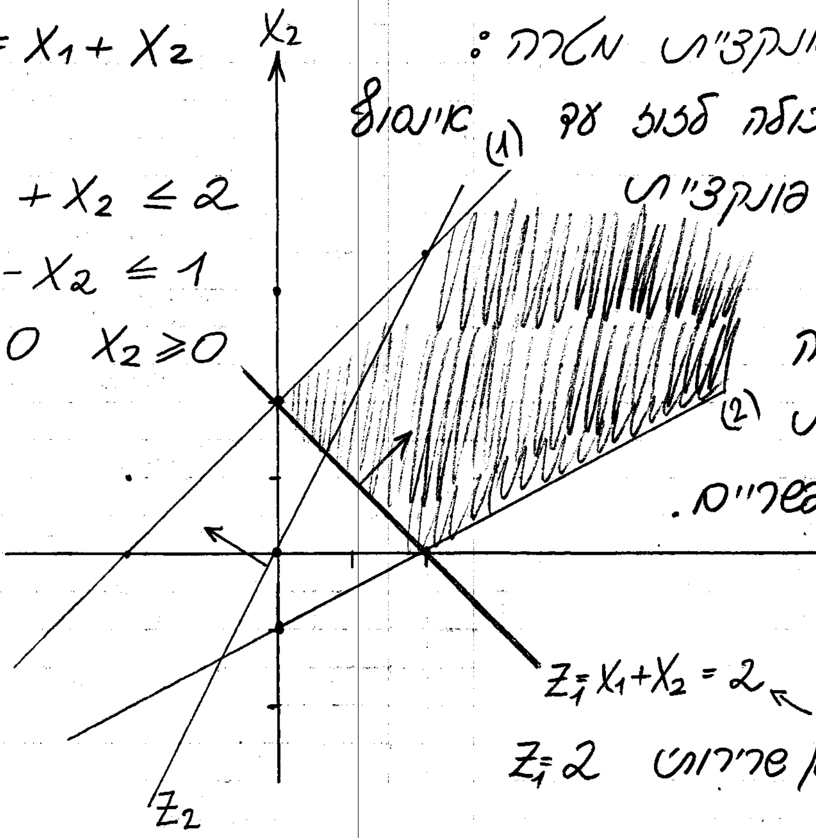
פונקציית מטרה: $\max\ Z_1=x_1+x_2$

$\underline{s.t}$

(1) $-x_1+x_2\le 2$

(2) $\frac{1}{2}x_1-x_2\le 1$

$x_1\ge 0 \quad x_2\ge 0$



הפונקציה Z יכולה לגדול עד אינסוף כלומר עבור פונקציית מטרה Z_1 הבעיה לא חסומה ולא רק קבוצת הפתרונות האפשריים.

נבחר באופן שרירותי $Z_1=2$

פונקצי"ת מטרה $\max z_2 = -2x_1 + x_2$

עם אותם האילוצים.

ניתן להציב את z_2 עד $(0,2)$ שהיא הנקודה האופטימלית.

לכן <u>הבעיה חסומה</u> וקבוצת הפתרונות האפשריים אינה חסומה.

<u>הצורה הסטנדרטית של בעיית תכנות לינארי כללית</u>

נתונים:

$C \in \mathbb{R}^n$

$b \in \mathbb{R}^m$

$A_{m\times n}$

$b \geq 0$ כל אחד מרכיביו גדול או שווה לאפס.

הבעיה תמיד מינימום:

ניתן כל בעיה להפוך לצורה כזו:

$$\boxed{\begin{array}{c} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

<u>כללים להפיכת כל בעיה לבעיה סטנדרטית</u>

(1) אם פונקצי"ת המטרה היא $\max c^T x$

נשתמש בעובדה: $\max c^T x = -\min(-c^T x)$

פותרים את הבעיה החדשה וה-x שפותר את $\min -c^T x$ הוא זהה ל-x שפותר את $\max c^T x$ אבל יש לזכור שאת ערך פונקצי"ת המטרה יש לקחת במינוס.

(2) טיפול באי-שוויונים -

a^J שורה ה-J במטריצה A, כתובה כעמודה.

ונניח שהאילוץ ה-J הוא: $(a^J)^T x \leq b_J \quad (1)$

← מוסיפים משתנה אי שלילי x_{n+J}

← ומחליפים את האילוץ באילוצים:

$$(a^J)^T x + x_{n+J} = b_J$$
$$x_{n+J} \geq 0$$

x_{n+J} נקרא משתנה חוסר - slack variable

(2) $(a^J)^T \geq b_J$ במידה והאילוץ ה-J הוא

← מוסיפים משתנה אי-שלילי x_{n+J}

← ומחליפים את האילוץ באילוצים:

$$(a^J)^T x - x_{n+J} = b_J$$
$$x_{n+J} \geq 0$$

x_{n+J} נקרא משתנה עודף - Surplus variable

דוגמה לבעיית max:

בעיה מקורית -

$$\max (x_1 + 2x_2 - x_3)$$

s.t

$$x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2$$
$$-x_2 + x_3 \leq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$-\min (-x_1 - 2x_2 + x_3)$$

s.t

$$x_1 - 3x_2 + x_3 \overset{\text{Surplus}}{-x_4} = 2$$
$$-x_2 + x_3 \underset{\text{slack}}{+x_5} = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

הבעיה החדשה -

C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
	-1	-2	1	0	0		← מקדמי פונ' המטרה
	1	-3	1	-1	0	2	
	0	-1	1	0	1	0	
	1	1	1	0	0	3	

③ טיפול במשתנה x_j שאינו מוגבל להיות אי-שלילי:

מוסיפים 2 משתנים אי-שליליים x_j^+, x_j^-

ומציבים בכל מקום ש- x_j מופיע בבעייה המקורית

$$\begin{cases} x_j = x_j^+ - x_j^- \\ x_j^+ \geq 0 \quad x_j^- \geq 0 \end{cases}$$

דוגמא: משתנים לא מוגבלים בסימן:

$$\min\ (x_1 - 2x_2 - x_3)$$

s.t

(1) $x_1 + x_2 - x_3 = 2$

(2) $2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5$

$x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0$

לאילוץ 2 נוסיף משתנה חוסר $x_4 \ge 0$ ובמקום x_1 נכתוב $x_1 = x_1^+ - x_1^-$ כאשר x_1^+ ו- x_1^- משתנים חדשים אי שליליים $x_1^+, x_1^- \ge 0$.

$$\min\ (x_1^+ - x_1^- - 2x_2 - x_3)$$

s.t

$x_1^+ - x_1^- + x_2 - x_3 = 2$

$2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5$

$x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

C	x_1^+ 1	x_1^- −1	x_2 −2	x_3 −1	x_4 0	RHS
A	1	−1	1	−1	0	2
	2	−2	3	1	1	5

אם ניקח את אילוץ (2) $x_1 = 2 - x_2 + x_3$ ונציב באילוצים הנוספים ובפונקציית המטרה נקבל את הבעיה הבאה:

$$\min\ (-3x_2 + 2)$$

s.t

$x_2 + 3x_2 + x_4 = 1$

$x_2, x_3, x_4 \ge 0$

אבל היכן בא לידי ביטוי האילוץ $x_1 \ge 0$? לכן יש להוסיף כ אילוץ חדש $x_1 = 2 - x_2 + x_3 \ge 0$

$2 - x_2 + x_3 \ge 0$

פיתרון מערכת משוואות לינאריות

$Ax = b$ מטריצה A m (משוואות) שורות על n (נעלמים) עמודות $m < n$

נסמן $(A)_{ij} = a_{ij}$ נכתב:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m$$

וזה שקול לכתוב

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{\text{וקטור } a_1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{\text{וקטור } a_2} x_2 + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{וקטור } a_n} x_n = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{וקטור } b}$$

ואת המטריצה A ניתן לכתוב $A=[a_1,a_2,\dots,a_n]$ $\quad a_i\in\mathbb{R}^m$

צורה נוספת לכתיבה מע' משוואות:

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$$

פיתרון בסיסי

הגדרה: עבור המערכת $Ax=b$ (כאשר $A_{m\times n}$ ו- $m<n$)
וקטור $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ פתרון בסיסי (Basic Solution) של המערכת אם $n-m$
מרכיבין הם אפסים ושאר m רכיבין מתאימים לעמודות בת"ל
של המטריצה A וכמובן מקיים $Ax=b$ (מקיים את המערכת)

נתונה המערכת

$$A=\begin{array}{ccccc} & & & & \\ \end{array}\begin{bmatrix}1&2&0&-4&6\\0&1&2&2&3\end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccc}a_1&a_2&a_3&a_4&a_5\end{array}$$
$$b=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

ונתון גם $x=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ נבדוק האם הוא פתרון בסיסי.

$m=2$

$n=5$

$n-m=3$ ← 3 שורות אפסים וזה אכן מתקיים.
וכמו כן פתרון זה מקיים שעמודות 1 ו- 2 בת"ל $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
וכמו כן X מקיים את המערכת.
לכן, פיתרון זה הוא בסיסי.

נבדוק פיתרון אפשרי אחר האם הוא בסיסי:
פתרון שבו x_2 ו- x_5 הם הרכיבים החיוביים והשאר אפס.
העמודות 2 ו- 5 ת"ל $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ עמודה 5 פרופורציונית לעמודה 2
לכן פיתרון זה אינו בסיסי.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

פא"ב

הגדרה: עבור המערכת $* \begin{pmatrix} Ax=b \\ x\geq 0 \end{pmatrix}$
וקטור x הוא <u>פיתרון אפשרי בסיסי</u> אם הוא בסיסי
וגם אי-שלילי. כלומר כל רכיביו גדולים/שווים לאפס.

יהי $x\in\mathbb{R}^n$ פיתרון אפשרי בסיסי (פא"ב) של המערכת $(*)\begin{pmatrix} Ax=b \\ x\geq 0 \end{pmatrix}$,
נסמן את רכיביו הבסיסיים ב x_B (וקטור ב $\mathbb{R}^m$) ואת רכיביו
הלא בסיסיים ב x_N (וקטור ב R^{n-m}) כך שניתן לכתוב את x
באופן המחולק $x=\binom{x_B}{x_N}$.
פא"ב הוא אם כן כזה שבו $\begin{matrix} 0=x_N \\ 0\leq x_B \end{matrix}$

החלוקה של x ל $\binom{x_B}{x_N}$ משרה חלוקה מקבילה בעמודות של
המטריצה A. $A=[B \mid N]$

B עמודות בסיסיות, N עמודות לא בסיסיות

B היא מטריצה $m\times m$ ועמודותיה בת"ל ולכן היא הפיכה
(לא סינגולרית) כלומר קיימת B^{-1}.
N היא מטריצה $m\times(n-m)$.
אם אנחנו יודעים כי $x=\binom{x_B}{x_N}$ אזי B^{-1} קיימת,
$x_N=0$ ו- $x_B\geq 0$ וכן $Ax=b \Leftarrow [B\mid N]\binom{x_B}{x_N}=b$

המערכת שקולה ל $Bx_B+N\underset{\text{וקטור אפסים}}{x_N}=b$
$Bx_B=b \Rightarrow x_B=B^{-1}b$ (כפלנו בהופכית בשני האגפים)

סיכום

עבור המערכת $\begin{pmatrix} Ax=b \\ x\geq 0 \end{pmatrix}$ תחת אותן הנחות
יהי x פיתרון אפשרי בסיסי ויהיו רכיביו הבסיסיים $\underbrace{x_{i1},x_{i2},\dots,x_{im}}_{x_B}$
והפרט העמודות הבאות של A $a_1,a_2,\dots,a_m$ בת"ל,
עמודות אלה יחד הם המטריצה הבסיסית B.
שאר עמודות A מהוות את המטריצה הלא בסיסית N.
אזי פא"ב x נתון ע"י $\begin{matrix} x_B=B^{-1}b\geq 0 \\ x_N=0\in\mathbb{R}^{n-m} \end{matrix}$

אם אחד או יותר מרכיביו של X_B הוא אפס אזי X נקרא פא"ב מנוון (degenerated)

<u>דוגמה</u> (פא"בים)

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \end{array} \quad b$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

מחפשים פא"ב ל $\begin{matrix} Ax = b \\ x \geq 0 \end{matrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}^5$

כמה פתרונות בסיסיים יתכנו במערכת כו? $\binom{5}{2} \leftarrow C_2^5$ כלומר מספר סופי של פתרונות בסיסיים.

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_B = B^{-1} b = \overset{B^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{b}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$BX_B = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -2 \\ x_1 = 5 \end{matrix}$$

קיבלנו את הפיתרון $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ אך הוא אינו אי-שלילי ולפיכך איננו פא"ב!

נבדוק עכשיו $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$X_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולפיכך הפיתרון $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא פא"ב לא מנוון.

נבדוק $X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} \Leftarrow$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Leftarrow \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ פא"ב מנוון.

* בעת פיתרון גרפי של מע' לינאריות בשני משתנים, הקודקודים הם פא"ב ובפא"בים הם קודקודים.
לכן בעת חיפוש פיתרון אופטימלי נעוע רק על הקודקודים ורק בכיוון שבו משתפרים.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

המחשת הקשר בין פא"בים וקודקודים של קבוצת הפתרונות האפשריים (ב $\mathbb{R}^2$)

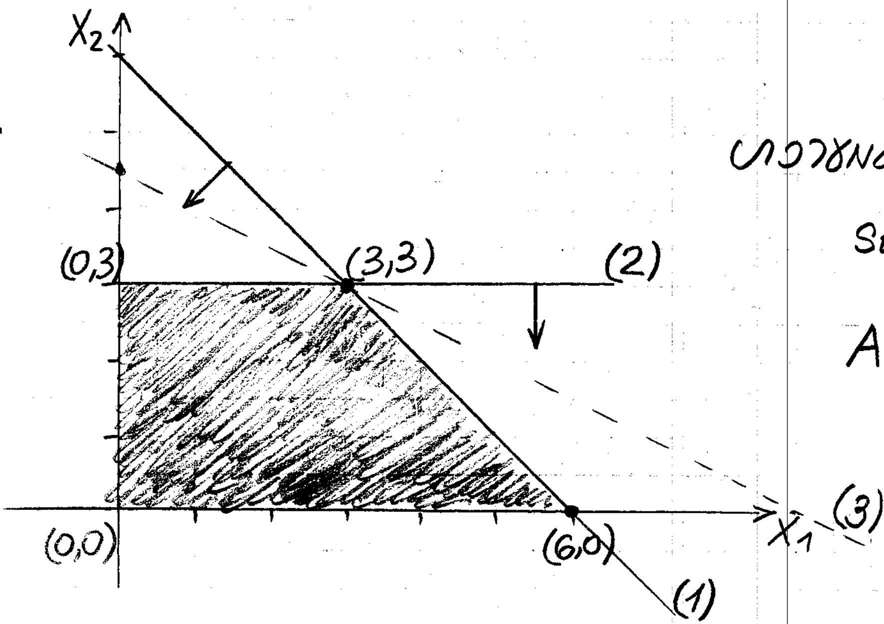
Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

(1) $x_1 + x_2 \le 6$

(2) $x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

נהפוך את המערכת למערכת סטנדרטית ונמצא את כל הפא"בים.



הנתונים המתאימים למערכת קנונית הם:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

slack

slack

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ge 0$$

נבדוק $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x_b = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftarrow x_B = \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ \boxed{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ge 0 \Leftarrow a_1, a_2$ בת"ל $\Leftarrow$ פא"ב

נבדוק $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftarrow$ אינו פא"ב כי העמודות המתאימות לאיברים החיוביים a_1, a_3 הם ת"ל ולכן אינו בסיס.

נבדוק $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ... $x = \begin{pmatrix} \boxed{6} \\ \boxed{0} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ פא"ב

נבדוק $x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ... $x = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

נבדוק $x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ... לא אפשרי כי x לא מקיים $x \ge 0$

נבדוק $x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ... $x = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ פא"ב

נוסיף אילוץ נוסף (3) $x_1 + 2x_2 \le 9$. פא"ב מנוון הוא קודקוד שמתואר ע"י יותר מדי אילוצים כגון הפא"ב $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

אם היינו כותבים את המערכת היינו מקבלים שלמערכת ישנה
שני פתרונות אפשריים ל $\binom{3}{3}$.

נשים לב שמה שמייחד את הבא"ים הוא שאין להם נקודות
גם מימין וגם משמאל אלא רק מצד אחד! (זה יעזור ב-n מימדים)

הגדרה: נתונים 2 וקטורים ב $\mathbb{R}^n$ $x\in\mathbb{R}^n$ וגם $y\in\mathbb{R}^n$
אזי הישר העובר דרך x וגם y הוא קבוצת הנקודות הבאה:

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

אוסף אינסופי של נקודות ב $\mathbb{R}^n$

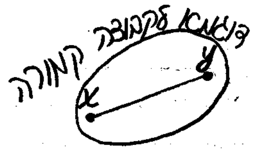
הקטע בין x ל y הוא אוסף הנקודות ב $\mathbb{R}^n$ הבא:

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y \mid 0\le\lambda\le 1\}$$

הקטע מתחיל ב y ומסתיים ב x.

__הגדרה - נקודת קיצון__

נתונה קב' $S\subset\mathbb{R}^n$ אזי $x\in S$ הוא נק' קיצון (extreme point)
של S אם __לא קיימות__ נקודות $y\in S$, $z\in S$ $y\neq z$
(כלומר, לפחות רכיב אחד של y שונה מזה של z) כך ש- x
נמצא בקטע בין y ל z כלומר עבור $1>\lambda>0$ בקטע $\lambda y+(1-\lambda)z$

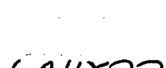


__הגדרה - קבוצה קמורה__

קבוצה $S\subset\mathbb{R}^n$ היא קמורה אם

$$\left.\begin{array}{l}\forall\ x\in S\\ y\in S\\ 0<\lambda<1\end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\lambda x+(1-\lambda)y}^{\text{הקטע בין x ל y}} \in S$$

כלומר הקב' קמורה אם עבור כל זוג נקודות שבה
הקטע המחבר את הנקודות (כל נקודות הקטע) שייך לקבוצה.

דוגמא לקבוצה __לא קמורה__: 

* קבוצת הפתרונות האפשריים בבעיות ת"ל היא קב' קמורה.

משפט

קבוצת הפתרונות האפשריים של בעי"ת ת"ל $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$ היא קבוצה קמורה.

הוכחה

יהיו x ו- y בקב' S ו- $0<\lambda<1$; צ"ל $\lambda x+(1-\lambda)y\in S$

כלומר שמתקיים

$$(1)\quad A(\lambda x+(1-\lambda)y)=b$$

$$(2)\quad \lambda x+(1-\lambda)y\geq 0$$

אם $x\in S$ וגם $y\in S$

$$x\in S \Downarrow \quad Ax=b,\ x\geq 0 \qquad\qquad y\in S \Downarrow \quad Ay=b,\ y\geq 0$$

נכפיל ב- λ וב- $(1-\lambda)$:

$$\begin{cases} Ax=b & /\cdot\lambda>0 \\ x\geq 0 & /\cdot\lambda>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ay=b & /\cdot(1-\lambda)>0 \\ y\geq 0 & /\cdot(1-\lambda)>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\lambda Ax+(1-\lambda)Ay}_{A(\lambda x+(1-\lambda)y)}=\underbrace{\lambda b+(1-\lambda)b}_{b} \quad (1)\checkmark$$

$$\lambda x+(1-\lambda)y\geq 0 \quad (2)\checkmark$$

■

הגדרה - נק' קיצון

תהי $S\subseteq\mathbb{R}^n$ קב' קמורה. וקטור $x\in S$ הוא נקודת קיצון של S אם לא קיימים $y\in S$ (1), $z\in S$ (2), $y\neq z$ (3), ו- $0<\lambda<1$ (4) כך שניתן לכתוב $x=\lambda y+(1-\lambda)z$.

רוצים להראות שהבא"ים הם נקודות קיצון.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

הגדרה שקולה לפב"א:

$$(*)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$ כאשר $A_{m\times n}$, $n>m$ וגם $\underbrace{r(A)=m}_{\text{שורות בת"ל}}$

כלומר אף משוואה אינה תוצאה של משוואה אחרת.

וקטור $x\in\mathbb{R}^n$ פב"א אם הוא אפשרי כלומר מקיים את המערכת $(*)$ ורכיביו החיוביים מתאימים לעמודות בת"ל של A.

מכך שהנחנו שהדרגה היא m נובע שישנם רק m עמודות בת"ל ולכן מספר הרכיבים החיוביים הוא m והשאר אפסים.
אם מספר החיוביים הוא k, $k<m$ אז x פב"א מנוון ואם $k=m$ אז x פב"א לא מנוון.

משפט

וקטור $x\in\mathbb{R}^n$ הוא פב"א של המע' $* \begin{cases} Ax=b \\ x\geq 0\end{cases}$ אם ורק אם x הוא נק' קיצון של הקבוצה האפשרית $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$

הוכחה

כיוון $\Leftarrow$: אם x הוא פב"א $\Rightarrow$ x נקודת קיצון של S.
יהי x פב"א, נניח בשלילה שאינו נ.קיצון ונגיע לסתירה.

אז נניח שכן קיימים $\begin{cases} y\in S \\ z\in S \\ z\neq y \\ 0<\lambda<1\end{cases}$ כך ש- $(1)\quad x=\lambda y+(1-\lambda)z$

יהיו רכיביו החיוביים של x: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$
ובפרט הוקטורים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ בת"ל $\Rightarrow$ לפי הגדרת הפב"א
הרכיבים האחרים הם $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n = 0$ אפסים.
נתבונן ברכיב x_J של $(1)\ x=\lambda y+(1-\lambda)z$ $J=k+1, k+2, \dots n$

$$\underbrace{x_J}_{0} = \underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{y_J}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\underbrace{z_J}_{\geq 0}$$

איך "ייתכן שהוקטור $x_J=0$ והיה סכום של וקטורים אי-שליליים?

אזי חייב לנבוע $\overset{(3)}{\begin{cases} y_J = 0 \\ z_J = 0 \end{cases}}$ וזה נכון ל $\forall J = k+1,\dots,n$

$\begin{cases} Ay = b & (1) \\ Az = b & (2) \end{cases}$ כיוון ש- y ו- z ב S הם מקיימים

$$(1)\quad y_1a_1 + y_2a_2, \dots, a_ky_k, \underbrace{a_{k+1}y_{k+1}, \dots a_ny_n}_{\text{אפסים}} = b$$

$$(2)\quad -\begin{cases} a_1y_1 + \dots + a_ky_k = b \\ a_1z_1 + \dots + a_kz_k = b \end{cases} \longleftarrow$$

מאותה הסיבה, כי כולם אפסים החל מ- $k+1$

$$(y_1 - z_1)a_1 + (y_2 - z_2)a_2 + \dots + (y_k - z_k)a_k = 0$$

$a_1,\dots,a_k$ הם בת"ל ולכן כל מקדמיהם חייבים להיות אפס.

$$(4)\quad \forall J = 1,\dots,k \quad y_J - z_J = 0$$

מ-(3) ומ-(4) נובע ש- $y=z$ ונצאת הסתירה לכך שהנחנו $y \neq z$ ∎

כיוון $\Leftarrow$: אם x הוא נקודת קיצון $\Leftarrow$ x הוא פא"ב.

יהי x נקודת קיצון של S אז נניח שרכיבים החיוביים הם $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ והשאר אפסים. זה בפרט אומר שכיוון ש $Ax = b$ זה שקול ל: $x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + a_kx_k = b$

נותר להוכיח שהוקטורים $a_1,\dots,a_k$ הם בת"ל.

נניח בשלילה שהם תלויים לינארית, כ"א קיימים $y_1,\dots,y_k$ לא כולם אפס כך ש- $y_1a_1 + \dots y_ka_k = 0$.

נגדיר וקטור $y \in \mathbb{R}^n$ באופן הבא: $y_1,\dots,y_k$ הם הרכיבים הרשומים למעלה והשאר אפסים עד שנגיע ל y_n. (לגודל n)

$$y = (\underbrace{y_1, y_2, \dots, y_k, 0, 0, \dots, 0}_{n \text{ רכיבים}}).$$

נתבונן בזוג הוקטורים הבא $x+\varepsilon y$, $x-\varepsilon y$ כאשר $\varepsilon > 0$

נראה שוקטורים אלו מקיימים את מערכת המשוואות:

$$A(x+\varepsilon y) = b \Rightarrow \underbrace{Ax}_{b} + \varepsilon \underbrace{Ay}_{0} = b$$

$$A(x-\varepsilon y) = \underbrace{Ax}_{b} - \varepsilon \underbrace{Ay}_{0} = b$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

כמו כן אם $\varepsilon > 0$ ומספיק קטן אזי $x + \varepsilon y \geq 0$

$$\forall J = 1,\dots,k \quad \underbrace{x_J}_{>0} \pm \varepsilon \underbrace{y_J}_{0} \geq 0 \;;\; \forall J = k+1,\dots,n \quad \underbrace{x_J}_{0} + \varepsilon \underbrace{y_J}_{0} = 0$$

וכן מתקיים $x = \overset{\lambda}{\frac{1}{2}}(x+\varepsilon y) + \overset{(1-\lambda)}{\frac{1}{2}}(x-\varepsilon y)$.

$x+\varepsilon y \neq x-\varepsilon y$ כי לפחות 1 מה-y שונה מאפס.

סתירה לכך ש- S נקודת קיצון כי שני וקטורים **שונים** מתוך S מקיימים $x = \lambda z_1 - (1-\lambda) z_2$.

קיום פתרונות אפשריים בסיסיים

נבדוק פתרון בסיסי אפשרי, נבדוק האם הוא אופטימלי ונתקדם. אבל ראשית יש לבדוק האם קיים פא"ב לבעיה בכלל!

הבעיה הסטנדרטית

$$(P)\quad \boxed{\begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

כאשר מניחים -

* $A_{m\times n}$
* $m<n$
* $r(A)=m$
* $b \geq 0$
* מטריצה A אינה מכילה עמודה שכולה אפסים

נוכיח את **המשפט** הבא:

אם ל-(P) קיים פיתרון אפשרי אזי קיים לה פא"ב

דוגמא -

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1\frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

הוקטור הבא $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 8/3 \\ 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ מקיים $Ax = b$ אבל הוא אינו פא"ב מפני שאין (ולא יכולות להיות ב-$\mathbb{R}^3$) 4 עמודות בלתי תלויות.

אבחנה: כל וקטור מהצורה $x-\varepsilon y$ כאשר $\varepsilon \in R$ (מספר)

ו- y וקטור המקיים $Ay=0$ מקיים $A(x-\varepsilon y)=b$.

$$A(x-\varepsilon y) = \underbrace{Ax}_{b} - \varepsilon \underbrace{Ay}_{0} = b$$

כדוגמה נבחר y הבא: $(Ay=0)$

$y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא אכן מקיים $Ay=0$

כדי שהוקטור $x-\varepsilon y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 8/3 \\ 3/2 \\ 3 \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x'$ והיה אפשרי

כלומר גם מקיים $x' \geq 0$ נראה מה ε צריך לקיים.

כלומר מה כל 5 רכיבין של x' גדולים שווים לאפס.

$$\begin{cases} x'_1 = 0 \quad \forall \varepsilon \\ x'_2 = \frac{1}{2} + \varepsilon \geq 0 \quad \forall \varepsilon \\ x'_3 = 8/3 - \varepsilon \cdot 8/3 \geq 0 \Rightarrow 8/3(1-\varepsilon) \geq 0 \Rightarrow \boxed{\forall \varepsilon \leq 1} = \frac{x_3}{y_3} \Rightarrow y_3 > 0 \\ x'_4 = 3/2 - \varepsilon \geq 0 \Rightarrow \boxed{\forall \varepsilon \leq \frac{3}{2}} = \frac{x_4}{y_4} \Rightarrow y_4 > 0 \\ x'_5 = 3 \geq 0 \quad \forall \varepsilon \end{cases}$$

$\Rightarrow$ התשובה היא $\varepsilon \leq 1$ ואיך קיבלנו את זה?

$$\varepsilon^* = 1 = \min\left(\frac{x_3}{y_3}, \frac{x_4}{y_4}\right) = \min\left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 8/3 \\ 3/2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

הוקטור החדש $x' = x - \varepsilon^* y$ הוא

* בחרנו $\varepsilon = 1$ בכדי שהרכיב ה- 3 (x'_3) יהיה אפס בכדי שיוצר פא"ב. אם לא היינו מקבלים פא"ב היינו מגדירים את הוקטור שקיבלנו כ- x החדש ומתחילים את כל התהליך הזה מחדש.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

משפט

נתבונן בבעיית הת"ל הסטנדרטית

(P) $\min c^T x$

$Ax = b$

$x \geq 0$

$A = m \times n$

$m < n$

$r(A) = m$

אין ב A עמודות אפס.

אם ל (P) קיים פיתרון אפשרי אזי קיים לה פא"ב.

הוכחה:

יהי x פיתרון אפשרי ונניח שרכיביו החיוביים הם $x_1>0, x_2>0, \dots, x_p>0$ והשאר $x_{p+1}=0, x_{p+2}=0, \dots, x_n=0$

מקרה א': העמודות המתאימות $a_1, a_2, \dots, a_p$ בת"ל ואזי אין מה להוכיח כי x בעצמו פא"ב.

מקרה ב': $a_1, a_2, \dots, a_p$ עמודות תלויות (x אינו פא"ב) בפרט קיימים מספרים $y_1, y_2, \dots, y_p$ לא כולם אפס כך ש:

$$(1) \quad y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_p a_p = 0$$

נזכור גם ש- x עצמו מקיים

$$(2) \quad x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_p a_p = b$$

נכפול משוואה (1) במספר ε ונחסיר ממשוואה (2) ונקבל

$$(3) \quad (x_1 - \varepsilon y_1) a_1 + (x_2 - \varepsilon y_2) a_2 + \dots + (x_p - \varepsilon y_p) a_p = b$$

יהי y וקטור ב $\mathbb{R}^n$ הבא: $y = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0, \dots, 0)$

משוואה (3) שקולה למשוואה: $A(x - \varepsilon y) = b; \; A\overset{b}{x} - \varepsilon A\overset{0}{y} = b$

ועכשיו יש למצוא את ה- ε שיקיים בדיוק את המשוואה.

נתבונן בוקטור $x' = x - \varepsilon y$, הרכיבים $x'_{p+1} = 0, \dots, x'_n = 0$

וגם ה- y ברכיבים אלה הוא אפס ולכן $x_J \geq 0$ לכל ε כאשר $J = p+1, \dots, n$.

נסתכל ברכיב $1 \leq i \leq p$ שעבורו $y_i \leq 0$ כלומר $x'_i = \underset{>0}{x_i} - \varepsilon \overset{\leq 0}{y_i}$

וזה תמיד חיובי לכל $\varepsilon \geq 0 \Leftarrow x'_i \geq 0$.

יהי i רכיב שבו $y_i \geq 0$ אזי $x'_i = x_i - \varepsilon y_i$ יהיה גדול שווה לכל ε שיקיים $\varepsilon \leq \frac{x_i}{y_i}$ לכן אם נבחר (4) $\varepsilon^* = \min \frac{x_i}{y_i} > 0$ אבל רק עבור i שעבורם $y_i > 0$ כאשר $1 \leq i \leq p$ אזי יהי k רכיב

בין 1 ל p שעבורו מתקבל המינימום ב-(4) ← $\left(\frac{x_k}{y_k}\right)$
אזי הרכיב ה-k שהוא $x'_k = x_k - \varepsilon^* y_k = 0$ וכן $x'_j \geq 0$
לכל $j \geq p$.

הוקטור החדש $x-\varepsilon^* y$ הוא אפשרי $Ax' = b$ מכיוון ש $x' \geq 0$
ויש בו רכיב אחד נוסף (על כן של ה-x המקורי) שהוא אפס.
ולכן יש לו יותר סיכוי להיות פא"ב.

אם הוא פא"ב סיימנו ואם איננו פא"ב אזי חוזרים על התהליך
ונקבל עוד רכיב עם אפס עד שנגיע למספר הרצוי של אפסים.

משפט 2

תהי (P) בע"ת ת"ל כמו במשפט הקודם ועם אותן ההנחות.
אם ל-(P) קיים פיתרון אופטימלי אזי קיים לה פיתרון אופטימלי שהוא פא"ב.

משפט זה יאפשר לנו לחפש פיתרון אופטימלי בין הפא"בים שמספרם סופי.

הוכחה:

יהי x^* פיתרון אופטימלי של (P) ויהיו רכיביו החיוביים p הרכיבים הראשונים $x_1^*>0, \dots, x_p^*>0$ והשאר אפס $x_{p+1}^*=0, \dots, x_n^*=0$.

מקרה א' - אם $a_1,\dots,a_p$ בת"ל אזי x^* בעצמו פא"ב וסיימנו.
מקרה ב' - אם העמודות $a_1,\dots,a_p$ תלויות לינארית אזי
קיימים $y_1,\dots,y_p$ לא כולם אפס כך ש- (1) $y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_p a_p = 0$
כמו כן כיוון ש-x^* בפרט אפשרי מתקיים $Ax^* = b$ ←

$$(2) \quad x_1^* a_1 + x_2^* a_2 + \dots + x_p^* a_p = b$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

נכפיל את המשוואה (1) ב-ε ונחסיר ממשוואה 2 ונקבל

$$(3) \quad (x_1^* - \varepsilon y_1) a_1 + \dots + (x_p^* - \varepsilon y_p) a_p = b$$

נרחיב את $y_1,\dots,y_p$ לוקטור ב-$\mathbb{R}^n$ בצורה הבאה

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0, \dots, 0)$$

בהוכחה של משפט 1 ראינו שאם נבחר $\varepsilon=\varepsilon^*$ כאשר

$\varepsilon^* = \min_{x_i, y_i > 0}\left\{\frac{x_i}{y_i}\right\}$ ונניח כי מתקיים $\varepsilon^* = \frac{x_k}{y_k}$ אזי הוקטור

$x' = x^* - \varepsilon^* y$ מקיים את הדברים הבאים:

$$A(x^*-\varepsilon^* y) = b$$

$$x_j^* - \varepsilon^* y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, p$$

$$x_k - \varepsilon^* y_k = 0$$

$$x_j^* - \varepsilon^* y_j = 0 \quad j = p+1, \dots, n$$

טענת עזר - $c^T y = 0$ (נוכיח בהמשך)

ערך פונקציית המטרה של הפיתרון החדש כה שקרוב להיות פאו"ב הוא: $c^T(x^*-\varepsilon^* y) = c^T x^* - \varepsilon^* c^T y = c^T x^*$

כלומר הפיתרון החדש שומר על האופטימליות.

<u>הוכחת טענת העזר:</u> $c^T y = 0$

נניח בשלילה ש- $c^T y \neq 0$.

נסתכל לכל אינדקס $j = 1, \dots, p$ על רכיב ה j של הוקטור החדש: $x_j^* - \varepsilon y_j$ עבור $|\varepsilon|$ מספיק קטן רכיבים אלו אי-שליליים

כמו כן ידוע ש $A(x_i^* - \varepsilon y_i) = b$ לכל ε.

ערך פונקציית המטרה: $c^T(x^*-\varepsilon y) = c^T x^* - \varepsilon(c^T y)$

אם $c^T y > 0$ עבור $\varepsilon > 0$ קטן $c^T(x^* - \varepsilon y) < c^T x^*$

אם $c^T y < 0$ עבור $\varepsilon < 0$ קטן $c^T(x^* - \varepsilon y) < c^T x^*$

קיבלנו שהפיתרון המינימלי שלנו גדול מפיתרון אחר וזו סתירה.

מסקנה: מספיק לחפש פיתרון אופטימלי של בע"ת תל"ג (סטנדרטית) על פני פאו"בים. - כאלה יש לכל היותר $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ אבל מספר זה יכול להיות גדול מדי:

לדוג' $m=10$ $n=20$ אזי נקבל $\binom{20}{10} = 184,756$ פאו"בים.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

פעולות אלמנטריות על מטריצה

אם נתונה מטריצה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

פעולה אלמנטרית: הכפלת שורה 2 במספר λ והוספתה לשורה 1 $\leftarrow$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{21}, & \dots & a_{1n}+\lambda a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

פעולה זו שקולה לכפל המטריצה המקורית משמאל במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1, & \lambda, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

לדוגמה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 3 & 5 & 1 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

המטריצה A אומרת:

עבור שורה ראשונה - קח שורה 1 מ-B ועוד פעמיים שורה 3 מ-B

עבור שורה שניה - קח שורה 2 מ-B

עבור שורה שלישית - קח 5 פעמים שורה 3 מ-B

* אם היינו רוצים לעשות פעולות על עמודות אז היינו כופלים ב-A מימין אך בקורס זה כמעט תמיד נעבוד עם פעולות שורה.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}}^{B} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}^{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 11 \\ 2 & 4 & 34 \end{pmatrix}$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

נניח כי נתונה מטריצה $C = [S \mid T]$

רכיבים בסיסיים ← S ; T → עמודות של רכיבים לא בסיסיים

$$AC = [AS \mid AT]$$ (תיאוריה)

לדוגמה:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

נתבונן במטריצה הבאה:

$$A = [B \mid N]$$ / נכפיל ב B^{-1}

$$B^{-1}A = [B^{-1}B \mid B^{-1}N] = [I \mid B^{-1}N]$$

זה מסביר את התהליך שביצענו בכדי למצוא את המטריצה ההפוכה ←

$$B^{-1} \cdot [B \mid I] = [I \mid B^{-1}]$$

אם נתונה מערכת $Ax = b$

$$[B \mid N]x = b$$

שקול

$$[I \mid B^{-1}N]x = B^{-1}b$$ ⇐ מערכת קנונית

$$[I \mid B^{-1}N]\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = B^{-1}b \qquad \left\{ X_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ לא בסיסי} \right\}$$

$$IX_B + B^{-1}N \cdot \underbrace{X_N}_{0} = B^{-1}b$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

$$IX_B = B^{-1}b$$

$$X_B = B^{-1}b$$

החלפת בסיס (במערכת קנונית)

בסיס	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS
X_1	1	0	0	1	1	-1	5
X_2	0	1	0	2	-3	1	3
X_3	0	0	1	-1	2	-1	-1
	I			$B^{-1}N$			$B^{-1}b$

הפב"א הנוכחי הוא:

$X_1 = 5 \quad X_4 = 0$

$X_2 = 3 \quad X_5 = 0$

$X_3 = -1 \quad X_6 = 0$

מחליפים את המשתנה הבסיסי X_1 במשתנה הלא בסיסי X_4 ע"י פעולות שורה מתאימות ומתקבלת המטריצה

בסיס	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS
X_4	1	0	0	1	1	1	5
X_2	-2	1	0	0	-5	3	-7
X_3	1	0	1	0	3	-2	4

$$\left.\begin{aligned} R_2 &= R_2 - 2R_1 \\ R_3 &= R_3 + R_1 \end{aligned}\right\} \text{מאפסים את העמודה של } X_4$$

הפב"א החדש הוא:

$X_1 = 0 \quad X_4 = 5$

$X_2 = -7 \quad X_5 = 0$

$X_3 = 4 \quad X_6 = 0$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

הערה: נתון פב"א $X_1 > 0, X_2 > 0, \dots, X_m \geq 0$

$X_{m+1} = 0, \dots, X_n = 0$

$(m+1 \leq q \leq n)$

נניח שהמשתנה הלא בסיסי X_q מועמד להיכנס לבסיס במקום משתנה בסיסי X_p כאשר $1 \leq p \leq m$

כדי לעבור למערכת קנונית חדשה עם הפב"א החדש יש לבצע פעולות שורה על המערכת כך ש- העמודה ה- q במטריצה (y_q) תהפוך לעמודה e_p כלומר וקטור שבו במקום p יש 1 ואפס בכל המקומות האחרים.

$Ax = b$

$[B \mid N]x = b$

$[I \mid B^{-1}N] = B^{-1}b$

סימונים:

נסמן $B^{-1}b = Y_0$ ו- $B^{-1}N = Y$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

המשמעות של מטריצה Y

העמודות הבסיסיות: $B=[\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_m]$

העמודות הלא בסיסיות: $N=[\alpha_{m+1},\dots,\alpha_n]$

כל עמודה לא בסיסית ניתן ע"י כק"ל של עמודות B.

למשל $\underbrace{\alpha_j}_{\text{עמודה j בחלק הלא בסיסי ב-N.}}=y_{1j}\alpha_1+\dots+y_{2j}\alpha_2+\dots+y_{mj}\alpha_m$

וכאות בדיוק המטריצה: $[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m]\begin{pmatrix}y_{1j}\\y_{2j}\\ \vdots\\ y_{mj}\end{pmatrix}=$

$=B\cdot\left(\text{עמודה j במטריצה Y}\right)$

ואם נרשום את כל העמודות הלא בסיסיות $N=BY$

נכפיל ב-B^{-1}, נקבל $B^{-1}N=Y$ (ה-Y אלו העמודות שמתארות את N כקומבינציה לינארית של B).

כיצד בוחרים איזה תכיב "יעזוב" את הבסיס

בעיה - נתון פא"ב מוכחי הבא: $\begin{bmatrix}x_1>0,\ x_2>0,\dots,x_m>0\\ x_{m+1}=0,\ \dots,\ x_n=0\end{bmatrix}$

נניח שהמשתנה הלא בסיסי x_k עומד להכנס לבסיס.

מי מהמשתנים של הבסיס עוזב את הבסיס?

המשתנה המוכחי מקיים את $Ax=b$: (1) $x_1a_1+x_2a_2+\overset{x_ia_i}{\dots}+x_ma_m=b$

(2) $y_{1k}a_1+y_{2k}a_2\underset{y_{ik}a_i}{\dots}+y_{mk}a_m=\alpha_k$

נכפיל את (2) ב-ε ונחסר מ-(1), נקבל את המשוואה הבאה: $(x_1-\varepsilon y_{1k})a_1+\dots+(x_i-\varepsilon y_{ik})\alpha_i+\dots(x_m-\varepsilon y_{mk})a_m=b-\varepsilon a_k$

טענה:

אם נבחר ε באופן הבא: $\varepsilon=\min\limits_{i:\,y_{ik}>0}\left\{\frac{x_i}{y_{ik}}\right\}=\frac{x_J}{y_{Jk}}$

אזי מתקיים:

(1) $x_i - \varepsilon y_{ik} \geq 0 \quad \forall i = 1,\dots,m$

(2) $x_j - \varepsilon y_{jk} = 0$

(3) $\varepsilon > 0$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

$$(x_1 - \varepsilon y_{1k}) a_1 + \dots + (x_i - \varepsilon y_{ik}) a_i + \dots + \overbrace{(x_J - \varepsilon y_{jk}) a_j}^{\text{יוצא מהבסיס}} +$$
$$+ \dots + (x_m - \varepsilon y_{mk}) a_m + \underbrace{\varepsilon a_k}_{\text{נכנס לבסיס}} = b$$

כלומר, אם נכנס לבסיס x_k, המשתנה שיוצא מהבסיס הוא אותו x_j שעבורו התקבל המינימום במבחן היחס, $\min\limits_{i: y_{ik} > 0} \left\{ \frac{x_i}{y_{ik}} \right\}$.

אבל אם $y_{ik} < 0$ לכל i אז ניתן למצוא x אפשרי שחלק מהרכיבים שלהם גדולים עד ∞ ואז הבעיה איננה חסומה.

דוגמא:

בסיס	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	0	0	2	4	6	4
x_2	0	1	0	1	2	3	3
x_3	0	0	1	-1	2	1	1

y_{ik}

רוצים להכניס את x_4 לבסיס.

פא"ב נוכחי: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

מבחן היחס בדוגמה זו הוא: $\min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{3}{1} \right\}$ (y_{14}, y_{24})

מסתכלים רק על ה-y החיובי"ם!

$J=1$ הוא האינדקס עליו מתקבל המינימום ולכן x_1 יוצא מהבסיס.

נקבל את המטריצה הבאה:

בסיס	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_4	1/2	0	0	1	2	3	2
x_2	-1/2	1	0	0	0	0	1
x_3	-1/2	0	1	0	4	4	3

הפא"ב החדש:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כיצד נבדוק אם הפא"ב אופטימלי ואם לא, איך נחליף אותו?

פא"ב הוא אופטימלי אם אין פא"ב אחר הנותן ערך פונקציית מטרה טוב יותר.

נניח שיש לנו בעיה (P)

$$\min C^T x$$
$$Ax = b \quad x \geq 0$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

$$[B \,\vdots\, N]\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b \qquad m < n$$

$$C^T X = (C_B^T, C_N^T)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

פיתרון כללי של המערכת -

בוחרים עבור X_N את האיברים באופן חופשי $\bar{X}_N$

ואת X_B מחשבים באופן הבא:

$$B X_B + N\bar{X}_N = b$$
$$B X_B = b - N\bar{X}_N$$
$$X_B = B^{-1}b - \underbrace{B^{-1}N}_{Y}\bar{X}_N$$

החלק הלא בסיסי במטריצה הקנונית

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\bar{X}_N \\ \bar{X}_N \end{pmatrix}$$

כמובן שעבור בעיית ת"ל צריך להתקיים ש- $\bar{X} \geq 0$

בפרט $\bar{X}_N \geq 0$.

הפא"ב הנוכחי $X^0 = \begin{pmatrix} X_B^0 \\ X_N^0 \end{pmatrix}$ <= $X_N^0 = 0 \,;\, X_B = B^{-1}b$

נשווה את פונקציית המטרה של הפא"ב הנוכחי $C^T X^0$

לפונקציית המטרה של פיתרון כלשהו $C^T\bar{X}$

$$C^T X^0 = (C_B^T, C_N^T)\underbrace{\begin{pmatrix} X_B^0 \\ X_N^0 \end{pmatrix}}_{X_N=0} = C_B^T X_B^0 = C_B^T B^{-1} b$$

$$C^T\bar{X} = (C_B^T, C_N^T)\begin{pmatrix} \bar{X}_B \\ \bar{X}_N \end{pmatrix} = C_B^T\bar{X}_B + C_N^T\bar{X}_N = C_B^T(B^{-1}b - B^{-1}N\bar{X}_N) + C_N^T\bar{X}_N$$

$$= C_B^T B^{-1} b + (C_N^T - C_B^T B^{-1}N)\bar{X}_N = C^T X_B^0 + \sum_{j \in N}\left[C_j^T - C_B^T (B^{-1}N)_j\right]\bar{X}_N$$

ערך פונקצ"ית המטרה של $\bar{X}$ אפשרי כלשהו:

$$C^T X^\circ + \sum_{j\in N} (C_j - C_B^T Y_j)\bar{X}_j$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

X° אופטימלי אם ורק אם לכל $\bar{X}_N$ אפשרי שנבחר

סכום $\sum_{j\in N}(C_j - C_B^T Y_j)X_j \geq 0$

וזה יתקיים אם ורק אם כל המקדמים $\forall j \in N$

$$r_j = C_j + C_B^T Y_j \geq 0$$

אם קיים אינדקס k לא בסיסי שעבורו r_k שלילי אזי המשתנה הלא בסיסי X_K יכול להיכנס לבסיס.

בד"כ נבחר את השלילי ביותר.

וזה מבטיח לנו שנשפר את פונקצ"ית המטרה.

נסכם את הכלים שקיבלנו בהרצאות האחרונות.

<u>הפרוצדורה הפורמלית של שיטת הסימפלקס</u>

בעיית ת"ל סטנדרטית

$$\min C^T x$$
$$Ax = b \qquad b \geq 0$$
$$x \geq 0$$

בהינתן פא"ב נתון, כלומר יודעים את החלקים B ו N של A.

מתחילים מהטבלה הראשונית הבאה:

$$\begin{bmatrix} B & N & b \\ C_B^T & C_N^T & 0 \end{bmatrix}$$

מבצעים פעולות שורה כך שהחלק $\begin{bmatrix} B \\ C_B^T \end{bmatrix}$ הופך ל $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ וזה נעשה באופן הבא:

מכפילים את החלק העליון במטריצה B^{-1} כך שיתקבל החלק החדש $[I, B^{-1}N, B^{-1}b]$ וכדי לאפס את C_B^T מכפילים את החלק העליון בוקטור $-C_B^T B^{-1}$ ומחברים לחלק התחתון.

$$-C_B^T B^{-1}\begin{bmatrix} B & N & b \\ C_B^T & C_N^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_N^T - C_B^T B^{-1}N & -C_B B^{-1}b \end{bmatrix}$$

כלומר, מתקבלת טבלה קנונית הבאה:

$$\begin{bmatrix} I & \overset{=Y}{B^{-1}N} & B^{-1}b \\ 0 & \underbrace{C_N^T - C_B^T B^{-1}N}_{\text{זה בדיוק הוקטור } r_n} & \underbrace{-C_B^T B^{-1}b}_{\text{ערך פונקציית המטרה}} \end{bmatrix}$$

אם $\forall j \in N$ $r_j \geq 0$ אזי הפב"ב הנוכחי אופטימאלי.
אחרת, מוצאים רכיב שלילי של r_n, נניח שזה r_q אזי
רכיב x_q יכנס לבסיס הבא ומהבסיס "יצא הרכיב הבסיסי
x_p כאשר p הוא האינדקס שעליו מתקבל מינימום במבחן היחס
כלומר $\min_{i: y_{iq} > 0} \left\{ \frac{x_i}{y_{iq}} \right\} = \frac{x_p}{y_{pq}}$

אם אין רכיב חיובי y_{iq} אזי הבעיה לא חסומה.
מבצעים פיבוטינג על האלמנט y_{pq} כלומר מבצעים
פעולות שורה כך ש- y_{pq} הופך לוקטור היחידה e_p
ומתקבל טבלה קנונית חדשה וכשרה שמתאימה לפב"ב
חדש וחוזרים מההתחלה על התהליך.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

פתרון:

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

$$\min(-3x_1 - x_2 - 3x_3)$$

$$\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

הבעיה אינה כתובה כבעיה סטנדרטית לכן נוסיף משתני חסר:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

* בבעיה שכל האילוצים היו מסוג קטן-שווה הוספנו משתני חוסר והם הפב"א ההתחלתי. מכיוון שנוצרת מטריצת יחידה עקב הוספתם:

בסיס	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	2	1	1	1	0	0	2
x_5	1	2	3	0	1	0	5
x_6	2	2	1	0	0	1	6
r	-3	-1	-3	0	0	0	0

נבחר את x_2 להכנס לבסיס מפני ש- r_2 שלילי

$$\min\left\{\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}\right\} = \frac{2}{1} \Rightarrow x_4 \text{ יוצא מהבסיס}$$

לכן נחליף את x_4 ב x_2 ולכן נעשה פעולות שורה

$$R_3 = R_3 - 2R_1 \quad ; \quad R_2 = R_2 - 2R_1$$

בסיס	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_2	2	1	1	1	0	0	2
x_5	-3	0	1	-2	1	0	1
x_6	-2	0	-1	-2	0	1	2
r	-1	0	-2	1	0	0	2

נכניס את x_3 לבסיס כי r_3 שלילי.

$$\min\left\{\frac{2}{1}, \frac{1}{1}\right\} = \frac{1}{1}$$

x_5 יוצא מהבסיס.

בסיס	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_2	5	1	0	3	-1	0	1
x_3	-3	0	1	-2	1	0	1
x_6	6	0	0	-4	1	1	3
r	-7	0	0	-3	2	0	4

$\Rightarrow$

בסיס	x_1	x_2	x_3	x_4 ...	RHS
x_1					1/5
x_3					8/5
x_6					4
r					$\frac{27}{5}$

$x_1^* = 1/5 \quad x_4 = 0$

$x_2^* = 0 \quad x_5 = 0$

$x_3^* = 7/5 \quad x_6 = 4$

אופטימלי

$Z^* = \frac{27}{5}$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

שיטת פאזה ראשונה למציאת פא"ב התחלתי

מתעניינים בבע"ת ת"ל סטנדרטיות:

$$\min c^T x$$
$$Ax = b \quad b \geq 0$$
$$x \geq 0$$

דוגמא לבעיה כזו:

הוספנו

$$\min \ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4$$
$$\text{s.t} \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \boxed{+y_1} = 3$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \boxed{+y_2} = 11$$
$$\underset{i=1,2,3,4}{x_i \geq 0} \quad \underbrace{y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0}_{\text{הוספנו}}$$

בונים בע"ת עזר לבעיה המקורית באופן הבא:
מוסיפים לכל אילוץ משתנה נוסף.
לאילוץ i המשתנה יסומן ב- y_i.
בדוגמא שלנו הוספנו y_1, y_2 <u>אי-שליליים</u> ונתבונן בבע"ת העזר:

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i$$
$$\text{s.t.} \quad Ax + Iy = b \quad y \in \mathbb{R}^m$$
$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$$

משתני y_i נקראים
משתני דמה - dummy

פא"ב התחלתי של בע"ת העזר הוא $\vec{y} = \vec{b}$ והמטריצה המתאימה כבר קנונית אך לא בהכרח כשרה.

טענה: לבעיית תכנות לינארית המקורית קיים פיתרון אפשרי אם ורק אם לבעיית העזר יש פיתרון אופטימלי שבו וקטור $\vec{y}$ מקיים $\vec{y}=\vec{0}$.

נרשום את הבעיה שקיבלנו בדוגמא:

$\min\ y_1+y_2$ ← בעיית פאזה I

s.t

(כמו שרשום) ...

בסיס	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	RHS
y_1	1	-2	-3	-2	1	0	3
y_2	1	-1	2	1	0	1	11
r	0	0	0	0	1	1	0

הטבלה "לא כשרה" כי מתחת למשתני הבסיס צריכים להיות אפסים

נבצע דירוג ע"י

$R_3=R_3-R_2-R_1$

נקבל:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
r	-2	3	1	1	0	0	-14

בסיס	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	RHS
x_1	1	-2	-3	-2	1	0	3
y_2	0	1	5	3	-1	1	8
r	0	-1	-5	-3	2	0	-8

בסיס	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	0	7	4	19
x_2	0	1	5	3	8
C	2	-3	1	1	0

y_1,y_2 התאפסו ולכן החלפנו את r ב C המקורי ואנחנו בפא"ב התחלות לפאזה השניה. [ולא נזקקים יותר ל y_1,y_2]

$x_1=19$

$x_2=8$

אחרי שהפכנו את ה-y פונקציית המטרה היא אפס, אזי נרשום את C המקורית שקיבלנו.

קיבלנו מטריצה קנונית אבל לא כשרה, נדרג את השורה של C

c	0	0	2	2	-14

קיבלנו את כל הערכים חיוביים ולכן במקרה הזה זהו גם פיתרון אופטימלי.

$x_1=19$

$x_2=8$

$x_3=x_4=0$

$Z=-14$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

מדוגמא זו רואים שכל בע"ה נהפוך לבע"ת עבר כאשר לאי-שוויונים נוסיף משתני חסר ולשוויונים מוסיף משתני דמה.

<u>הערות</u>

1. אם במבחן היחס כולם שליליים אזי הבעיה אינה חסומה.
2. אם מבחן היחס מתקבל על יותר מאינדקס אחד אזי יהיו שני משתנים שיצאו מהבסיס, אחד יצא והשני ישאר ויתקבל פיתרון מנוון.

(מבחינה מעשית עובדים כרגיל ומבחינה תאורטית יתכן שפונקציית מטרה לא משתנה ועלולים להיכנס ללופ ובעיות כאלה נקראות בעיות מנוונות.)

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

דואליות בתכנות לינארי

(P) $\min c^T x$

$Ax \geqslant b$

$x \geqslant 0$

$\Downarrow$

n משתנים

m אילוצים

בעיה ראשונית

(D) $\max b^T w$

$A^T w \leqslant c$

$w \geqslant 0$

$\Downarrow$

m משתנים

n אילוצים

בעיה דואלית

הגדרה: הבעיה הדואלית לבעיה P היא D.

דוגמא:

(P)

$$\begin{aligned} \min\ & 6x_1 + 8x_2 \\ s.t\ & 3x_1 + x_2 \geqslant 4 \quad w_1 \\ & 5x_1 + 2x_2 \geqslant 7 \quad w_2 \\ & x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

פונקציית המטרה של הבעיה הדואלית:

$$\begin{aligned} \max\ & 4w_1 + 7w_2 \\ s.t\ & 3w_1 + 5w_2 \leqslant 6 \\ & w_1 + 2w_2 \leqslant 8 \\ & w_1 \geqslant 0 \quad w_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

בעיה דואלית של בעיית תוכ' סטנדרטית

(P$_1$)

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{הבעיה הזו שקולה לבעיה}} \quad \begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \geqslant b \\ & -Ax \geqslant -b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

וזה בעצם כמו לכתוב:

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ s.t\ & \begin{array}{c} \bar{u} \rightarrow \\ \bar{v} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geqslant \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

סימון את m השורות הראשונות בוקטור
$\bar{u}$ ו-m השורות הבאות בוקטור $\bar{v}$

לכן הבעיה הדואלית:

(D1)
$$\max \ (b,-b)^T \binom{u}{v}$$
s.t
$$[A^T,-A^T]\binom{u}{v} \le c$$
$$\binom{u}{v} \ge 0$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

ואת זה ניתן לרשום בצורה דומה:

$$\max \ b^T(u-v)$$
s.t
$$A^T(u-v) \le c$$
$$u \ge 0 \quad v \ge 0$$

ואם נסמן $w=u-v$ נקבל

$$\max \ b^T w$$
s.t
$$A^T w \le c$$
w unrestricted

* נשים לב שכאשר היה שוויון באילוצים קיבלנו בסוף שהמשתנה w אינו מוגבל להיות חיובי, שלא כמו בצורה סטנדרטית שקיבלנו כי w חייב להיות חיובי.

דוגמא:

$$\min \ c^T x$$
$$A_1 x \ge b_1$$
$$A_2 x = b_2$$
$$A_3 x \le b_3$$
$$x \ge 0$$

$\xrightarrow{\text{הבעיה הסטנדרטית השקולה}}$

$$\min \ c^T x + 0^T x_t + 0^t x_s$$
$$A_1 x - I x_t + 0 x_s = b_1$$
$$A_2 x - 0 x_t + 0 x_s = b_2$$
$$A_3 x - 0 x_t + I x_s = b_3$$

$$\Updownarrow$$

$$\min \ c^T x + 0^T x_t + 0^T x_s$$
$$A_1 x - I x_t = b_1$$
$$A_2 x = b_2$$
$$A_3 x + I x_s = b_3$$
$$x \ge 0 \quad x_t \ge 0 \quad x_s \ge 0$$

$\Longleftarrow$

משתנה של בעיה דואלית	x	x_t	x_s	b
W_1	A_1	$-I$	0	b_1
W_2	A_2	0	0	b_2
W_3	A_3	0	I	b_3

לכן הבעיה הדואלית שמתקבלת הינה:

$$\max \; b_1^T W_1 + b_2^T W_2 + b_3^T W_3$$

$$\text{s.t} \quad A_1^T W_1 + A_2^T W_2 + A_3^T W_3 \le C$$

$$-I W_1 \le 0 \iff W_1 \ge 0$$

$$I W_3 \le 0 \iff W_3 \le 0$$

W_2 unrestricted

סכמה כללית לבעיות דואליות

	בעיית מינימום	בעיית מקסימום	
משתנים	≥ 0	$\le$	אילוצים
	≤ 0	$\ge$	
	unrestricted	$=$	
אילוצים	$\ge b$	$\le$	משתנים
	$\le b$	$\ge$	
	$=$	unrestricted	

דוגמא: בעיה פרימאלית

$$\max \; 8X_1 + 3X_2$$

$$\text{s.t} \quad X_1 - 6X_2 \ge 2 \qquad W_1$$

$$5X_1 + 7X_2 = -4 \qquad W_2$$

$$X_1 \le 0 \qquad X_2 \ge 0$$

לפי הטבלה נסיק כי $W_1 \le 0$

W_2 unrestricted

$$\min \; 2W_1 - 4W_2$$

$\text{s.t} \quad W_1 + 5W_2 \le 8$ אילוץ דואלי מספר 1 יהיה קטן שווה

$-6W_1 + 7W_2 \ge 3$ אילוץ דואלי מספר 2 יהיה גדול שווה

$W_1 \le 0$

W_2 unrestricted

משמעות הבעיה הדואלית

הדוגמה של בע"ת דיאטה: (הקצאות כמויות)

$$\min \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{m} a_{iJ} X_J \geq b_i \quad i=1\ldots m$$

$$X_J \geq 0 \quad J=1\ldots n$$

n מוצרי מזון

m אבות מזון

משתנים

X_J - כמות מוצר J בדיאטה

C_J - מחיר יחידה של מוצר J

b_i - כמות מינימלית נדרשת לדיאטה מאב מזון i

a_{iJ} - כמות אב מזון i ליחידה של מוצר J.

הבעיה הדואלית לבע"ת הדיאטה: (בע"ת הקצאות מחירים)

W_i משתנה של האילוץ ה-i

$$\max \sum_{i=1}^{m} W_i b_i$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{m} a_{iJ} W_i \leq C_j$$

$$W_i \geq 0 \quad i=1,\ldots,m$$

המשתנים W_i זה מחיר מכירה ליחידת אב-מזון i של המפעל המייצר אבות מזון.

משמעות האילוצים היא שבכל מוצר ישנה כמה אבות מזון וסה"כ המחיר של כולם יחד באותו מוצר הוא C_j ולכן כל $a_{iJ} W_i$ מייצג את מספר אבות המזון מוכפל במחיר שחייב להיות קטן ממחיר השוק C_J.

ערך פונקציית המטרה של הבעיה הדואלית יהיה שווה לערך פונקציית המטרה הפרימלית באופטימום.

תאוריה של דואליות

נעבוד עם בעיות סטנדרטיות, כלומר:

$$(P)\ \min c^Tx \qquad\qquad (D)\ \max b^Ty$$
$$Ax=b \qquad\qquad A^Ty \le c$$
$$x \ge 0 \qquad\qquad y \ge 0$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

למה - אם x פיתרון אפשרי של (P) ו- y פתרון אפשרי של (D) אזי מתקיים $c^Tx \ge b^Ty$ (*)

הוכחה

כיוון ש- y אפשרי לבעיה הדואלית הוא מקיים:

$$A^Ty \le c \iff (y^TA)_j \le c_j \quad j=1,\dots,n$$

x מקיים $x \ge 0$ לכן מותר להכפיל את שני האגפים ב x_j

ונקבל: $b^Ty = y^Tb = y^T\underbrace{Ax}_{b} = \sum x_j (y^TA)_j \le c_jx_j = c^Tx$

למה 2: אם x פיתרון אפשרי ל (P) ו- y פתרון אפשרי ל (D) אזי:

ערך אופטימלי של הפרימלית ← ; → ערך אופטימלי של הדואלית

$$\min(P) \ge \max(D) \quad (1)$$

הוכחה

(*) מלמה 1, עבור הפתרונות האופטימליים x^*, y^* מתקיים:

$$\min(P) = c^Tx^* \ge b^Ty^* = \max(D)$$ מתקיים

(2) אם x_0 אפשרי לבעיה הפרימלית ו- y_0 אפשרי לבעיה הדואלית

וכן מתקיים $c^Tx_0 = b^Ty_0$ (**)

אזי x_0 אופטימלי ל-(P) ו- y_0 אופטימלי ל-(D)

$$\Downarrow$$
$$\min(P) = \max(D)$$

הוכחה

כי x_0 הוא פיתרון אפשרי

ממסקנה 1 נובע ש $c^Tx_0 \ge \min(P) \ge \max(D) \ge by_0$

אבל מצד שני נתון לנו ששני הקצוות שווים ולכן נסיק

$$C^T X_0 = \min(P) = \max(D) = b^T y_0$$

(3) אם לאחת הבעיות (P) או (D) יש פיתרון אפשרי אזי
פונקציית המטרה של הדואלית לה - חסומה.
כלומר (P) אפשרית אזי $\max(D) < \infty$ ואם
(D) אפשרית אזי $\min(P) > -\infty$

<u>הוכחה</u>

יהי X_0 פתרון אפשרי של (P) ; מלמה 1 נובע $C^T X_0 \geq b^T y$ וזה
נכון לכל y אפשרי בבעיה (D) ולכן גם $\infty > C^T X_0 \geq \max(P)$
$C^T X_0$ כהו מספר ולכן רואים שהבעיה (D) חסומה.

<u>משפט הדואליות הכולל</u>

עבור כל זוג בעיות ה"ל דואליות מתקיים אחד ורק אחד
משלושת המצבים הבאים:

(1) לשתי הבעיות יש פתרונות אופטימליים וערכי פונקציות
המטרה באופטימום שווים.

(2) לאחת הבעיות יש פונקציית מטרה לא חסומה ואזי
לדואלית שלה אין פיתרון אפשרי (בדיוק מסקנה 3)

(3) לשתי הבעיות אין פיתרון אפשרי.

אם נחבר את שני
האילוצים נקבל $0 \geq 2$

<u>הוכחה</u>

(2) נובע ממסקנה 3

(3) נביא דוגמה כדי להראות שהמצב הוא אפשרי

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & -x_1 - x_2 \\ y_1 & s.t & x_1 - x_2 \geq 1 \\ y_2 & & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} (D) \max & y_1 + y_2 \\ s.t & \left.\begin{array}{l} y_1 - y_2 \leq -1 \\ -y_1 + y_2 \leq -1 \end{array}\right\} \\ & y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \end{array}$$

אם נחבר את
שני האילוצים
נקבל $0 \leq -2$

לכן נסיק שאין פיתרון אפשרי לשתי הבעיות.

משפט

נתבונן בזוג הבעיות הדואליות הבאות, אם ל-(P) יש פיתרון אופטימלי אזי גם ל-(D) יש פיתרון אופטימלי וערכי פונקציות המטרה שוות. $\min(P) = \max(D)$

יתרה מזאת, יהי $\bar{x}=(x_B,0)$ פאו"ב אופטימלי של (P) אזי הפיתרון האופטימלי $\bar{y}$ של (D) נתון במפורש ע"י $\bar{y}^T = C_B^T B^{-1}$ (*)

ואז מתקיים $\min(P)=C^T\bar{x}=b^T\bar{y}=\max(D)$

הוכחה: כבר הוכחנו שאם קיים פיתרון אופטימלי ב-(P) אזי קיים גם פאו"ב אופטימלי.

יהי $\bar{x}=\binom{x_B}{0}$ פאו"ב אופטימלי.

$$x_B = B^{-1}b$$

$$C^T\bar{x} = C_B^T B^{-1} b$$

לפי מסקנה (2) מלמה 2 מספיק להוכיח שיש $\bar{y}$ הנתון ב (*)

והוא (1) אפשרי לבעיה D

(2) $b^T\bar{y} = C^T\bar{x}$

הוכחה

(1) כיוון ש-$\bar{x}$ הוא פאו"ב אופטימלי, הוא מקיים את קריטריון האופטימליות - $r_j \geq 0$; $\forall j\in N$; $0\le r_N^T = C_N^T - \underbrace{C_B^T B^{-1}}_{\bar{y}^T}N$

$$0\le C_N^T - \bar{y}^T N \Rightarrow (1)\ \bar{y}^T N \le C_N^T$$

$$\bar{y}^T B = C_B^T B^{-1} B = C_B^T \quad (2)\ \bar{y}^T B \le C_B^T$$

מתוך (1),(2) נובע:

$$\bar{y}^T[B \,\vdots\, N] \le (C_B^T, C_N^T)$$

$$\bar{y}A\le C^T$$

$\boxed{A^T\bar{y}\le C}$ ובזה מוכח ש-$\bar{y}$ מקיים את האילוצים של הבעיה הדואלית.

(2) $b^T\bar{y} = \bar{y}^T b = C_B^T B^{-1} b = C^T\bar{x}$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

חוסריות משלימה
Complementary Slackness

נתבונן בזוג הבעיות הדואליות:

(P) $\min c^T x$	(D) $\max b^T y$
s.t $Ax \geq b$	s.t $A^T y \leq c$
$(Ax - It = b)$	$(A^T y + IS = c)$
$x \geq 0$	$y \geq 0$
$t \geq 0$	$S \geq 0$

t- משתני עודף

S- משתני חוסר

סימונים

a_j- עמודה j של A

a^i- שורה i של A

אילוץ פרימלי i: $(a^i)^T x \leq b_i$

אילוץ דואלי j: $(a_j)^T y \leq c_j$

משפט: עבור זוג הבעיות הדואליות (P) (D) כנ"ל יהי x^* פיתרון אופטימלי של (P) ו-y^* פיתרון אופטימלי של (D).

אזי מתקיימים היחסים הבאים:

$$\overbrace{(c_j - a_j^T y^*)}^{s^*} x_j^* = 0 \quad \forall j = 1 \ldots n$$

$$\underbrace{(a_i^T x^* - b_i)}_{t^*} y_i^* = 0 \quad \forall i = 1 \ldots m$$

בפרט מתקיים:

$$x_j^* \geq 0 \Rightarrow a_j^T y^* = c_j \Leftrightarrow s_j^* = 0$$

$$\text{או} \quad s_j^* > 0$$

$$a_j^T y^* < c_j \Rightarrow x_j^* = 0$$

$$y_i^* > 0 \Rightarrow (a^i)^T x^* = b_i \Leftrightarrow t_i^* = 0$$

$$\text{או}$$

$$(a^i)^T x^* > b_i \Rightarrow y_i^* = 0$$

$$t_i^* > 0$$

$$s_j^* x_j^* = 0$$

$$t_i^* y_i^* = 0$$

y_i^* - כמה כדאי לשלם כדי שיפחיתו אותו b_i אבל יש סימן >
ובכל מקרה לא נגיע לשוויון ל- $(a^i)^T x^* = b$ ולכן לא כדאי
לי לשלם כלום ולכן $y_i^* = 0$

<u>הוכחה</u>

ממשפט הדואליות $C^T x^* = b^T y^*$ (הנחנו ש- x^* ו- y^* אופטימליים)

$$y^{*T} A x^* \le C^T x^* = b^T y^* \le y^{*T} A x^*$$

$$y^{*T} A \le C^T \qquad\qquad b \le A x^*$$

$$x^* \ge 0 \qquad\qquad y^* \ge 0$$

$$(1)\ .\ C^T x^* = b^T y^* = y^T A x^*$$

נתבונן ב: $C^T x^* = y^{*T} A x^*$

$$(C^T - y^{*T} A) x = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(c_j - a_j y_j^*)}_{\ge 0} x_j^* = 0$$

אילוץ של (D)

סכום שני איברים אי-שליליים שווה לאפס רק אם כל האיברים הם אפס:

$$(c_j - a_j y_j^*) x_j^* = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

וזה מוכיח את החלק הראשון של המשפט.

נתבונן ב $b^T y^* = y^T A x^*$

$$y^{*T} (b^T - A x^*) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i (b_i - a^i x^*) = 0$$

ושוב קיבלנו סכום אי-שליליים ששווה לאפס ולכן

$$y_i (b_i - a_i x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots m$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

דוגמא:

$$(P)\quad \min\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$$

$$y_1\quad (1)\ x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5\geq 4$$
$$y_2\quad (2)\ 2x_1-2x_2+3x_3+x_4+x_5\geq 3$$
$$x_i\geq 0\quad i=1,\dots,5$$

$$(D)\quad \max\ 4y_1+3y_2$$
$$\text{s.t}\quad y_1+2y_2\leq 2$$
$$y_1-2y_2\leq 3$$
$$2y_1+3y_2\leq 5$$
$$y_1+y_2\leq 2$$
$$3y_1+y_2\leq 3$$
$$y_1\geq 0\quad y_2\geq 0$$

(פיתרון גרפי) פיתרון הבעיה הדואלית הוא: $y_1^*=\frac{4}{5};\ y_2^*=\frac{3}{5}$

נבדוק את קיום האילוצים ב y^*

כלומר, נבדוק מה אומר לנו

$s^*=0$ (כפי שקובע המשפט):

$$(c_j-a_j^Ty^*)x_j^*=0\quad s^*$$
$$(a_i^Tx^*-b_i)y^*=0\quad t^*$$

$$s_1^*=0\Rightarrow\Big(2-\underbrace{\Big[1\cdot\frac{4}{5}+2\cdot\frac{3}{5}\Big]}_{\frac{10}{5}=2}\Big)x_1^*=0\Rightarrow$$ אין אינפורמציה שימושית על x_1^*.

$$s_2^*=0\Rightarrow\Big(3-\underbrace{\Big[1\cdot\frac{4}{5}-2\cdot\frac{3}{5}\Big]}_{-\frac{2}{5}}\Big)x_2^*=0\Rightarrow\boxed{x_2^*=0}$$

$$s_3^*=0\Rightarrow\Big(5-\underbrace{\Big[2\cdot\frac{4}{5}+3\cdot\frac{3}{5}\Big]}_{\frac{17}{5}}\Big)x_3^*=0\Rightarrow\boxed{x_3^*=0}$$

$$s_4^*=0\Rightarrow\Big(2-\underbrace{\Big[1\cdot\frac{4}{5}+1\cdot\frac{3}{5}\Big]}_{\frac{7}{5}}\Big)x_4^*=0\Rightarrow\boxed{x_4^*=0}$$

$$s_5^*=0\Rightarrow\Big(3-\underbrace{\Big[3\cdot\frac{4}{5}+1\cdot\frac{3}{5}\Big]}_{3}\Big)x_5^*=0\Rightarrow$$ אין אינפורמציה שימושית על x_5^*

$(x_2^*=x_3^*=x_4^*=0)$

$t_1^*=0\Rightarrow y_1^*=\frac{4}{5}\neq 0\Rightarrow$ אילוץ פרימלי 1 מתקיים בשוויון $\Rightarrow\boxed{x_1^*+3x_5^*=4}$

$t_2^*=0\Rightarrow y_2^*=\frac{3}{5}\neq 0\Rightarrow$ אילוץ פרימלי 2 מתקיים בשוויון $\Rightarrow\boxed{2x_1+x_5=3}$

$\boxed{x_1^*=1\quad x_5^*=1}$

ערך פונקציית המטרה הוא 5.

אם לא היינו מקבלים את כל המשתנים, תמיד ניתן להוסיף את פונקציית המטרה כמשוואה שלישית ולקבל עוד פיתרון של משתנה נוסף

התכונות פרימלי/דואלי בטבלת הסימפלקס

$\min C^T X$ $AX = b$ $X \geq 0$		$\max C^T X$ $AX = b$ $X \geq 0$
$\begin{bmatrix} B & N & b \\ C_B & C_N & 0 \end{bmatrix}$	טבלה ראשית	$\begin{bmatrix} B & N & b \\ -C_B & -C_N & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} I & Y & B^{-1}b \\ 0 & r_N & -Z \end{bmatrix}$	טבלה סופית	$\begin{matrix} I & N & B^{-1}b \\ 0 & r_N & Z \end{matrix}$
	קריטריון האופטימליות	
$r_N \geq 0$		$R_N \geq 0$

$$R_N = -r_N = C_B^T B^{-1} N - C_N$$

<u>משפט</u>: הדואלית של הדואלית היא בעיה פרימלית

$$(P)\ \min C^T X \qquad AX = b \qquad X \geq 0$$

$$(D)\ \max b^T y \qquad A^T y \leq C$$

$$(DD)\ \min C^T Z \qquad (A^T)^T Z = b \qquad Z \geq 0$$

זה בדיוק כמו בעיה P

<u>דוגמא</u>

$$(P)\quad \min\ 12X_1 + 10X_2 + 8X_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t}\quad & 3X_1 + 3X_2 + 4X_3 - t_1 = 4 \\ & 4X_1 + 3X_2 + 2X_3 - t_2 = 3 \\ & X_i \geq 0 \quad t_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$(D)\quad \max\ 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{aligned} & 3y_1 + 4y_2 + S_1 = 12 \\ & 3y_1 + 3y_2 + S_2 = 10 \\ & 4y_1 + 2y_2 + S_3 = 8 \\ & y_i \geq 0 \quad S_i \geq 0 \end{aligned}$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

לפי פיתרון בשיטת הסימפלקס נקבל את הטבלה הסופית והאופטימלית של הבעיה הפרימלית.

בסיס	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	RHS
x_3	0	$\frac{3}{10}$	1	$-2/5$	$\frac{3}{10}$	$7/10$
x_1	1	$\frac{3}{5}$	0	$1/5$	$\frac{-2}{5}$	$2/5$
r	0	$2/5$	0	$4/5$	$\frac{12}{5}$	$-52/5$

נסמן ב r_T - תת הוקטור של r המתאים למשתני העודף t_i-ים

$$r_T = C_T - C_B^T B^{-1} N_T$$
$$r_T = \vec{0} - C_B^T B^{-1}(-I)$$
$$r_T = C_B^T B^{-1} = y^{*T}$$

$\longrightarrow$ * הפיתרון לבעיה הדואלית זה בדיוק הפיתרון שמתחת למשתני החוסר.

לכן הפיתרון לבעיה הדואלית הוא:

$y_1^* = 4/5$

$y_2^* = 12/5$

$$Z_{(D)} = Z_{(P)} = \frac{52}{5}$$

$$r_N = C_N - \underbrace{C_B^T B^{-1}}_{y^{*T}} N$$

$$\boxed{r_N = C_N - y^{*T} N}$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

ניתוח רגישות

Sensitivity Analysis/Post Optimality Analysis

חקירת השינוי/האי שינוי בפיתרון האופטימלי כתוצאה מ:

1) שינוי בוקטור המחירים C
2) שינוי ב RHS (בוקטור b)
3) הוספת פעילות (כלומר משתנה נוסף עם הפעילות שלו - עמודה במטריצה A ורכיב המחיר שלו).
4) הוספת אילוץ

min?

$$\max \; 4X_1+3X_2$$
$$\text{s.t} \quad 3X_1+4X_2 \le 12$$
$$3X_1+3X_2 \le 10$$
$$4X_1+2X_2 \le 8$$
$$X_1 \ge 0 \quad X_2 \ge 0$$

שינויים ברכיב C_i של וקטור המחירים

דוגמה: (מקרה של רכיב בסיסי)

הטבלה הראשונית

בסיס	X_1	X_2	X_3 (slack)	X_4 (slack)	X_5 (slack)	RHS
X_3	3	4	1	0	0	12
X_4	3	3	0	1	0	10
X_5	4	2	0	0	1	8
r	-4	-3	0	0	0	0

הטבלה הסופית

בסיס	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	RHS
X_2	0	1	2/5	0	-3/10	12/5
X_4	0	0	-3/5	1	-3/10	2/5
X_1	1	0	-1/5	0	2/5	4/5
r	0	0	2/5	0	7/10	52/5

שינוי ב C_2 (מקרה של המשתנה הבסיסי X_2)

נגדיר את השינוי $\hat{C}_2=C_2+q$

השינוי לא משפיע על עמודת ה- RHS מפני שהיא bB^{-1} אבל

כן משפיע על R מפני ש $R=C_B^TB^{-1}N-C_N$

נרצה לראות עבור אילו q ה- R "ישאר חיובי" לכל רכיביו.

$R = C_B^T B^{-1} N - C_N$ בדוגמה שלנו נתבונן ב- R_3 ו- R_5.

$R_3 = (C_2, C_4, C_1) Y_3 - C_3 = \frac{2}{5}$ לפני השינוי

עמודה שלישית בטבלה הסופית

$\bar{R}_3 = (C_2 + q, C_4, C_1) Y_3 - C_3 = \underbrace{(C_2, C_4, C_1) Y_3 - C_3}_{R_3} + (q, 0, 0) Y_3 = R_3 + Y_{13} \cdot q$

$= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} q$

אחרי השינוי מקבלים $\bar{R}_3 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} q \geq 0$ $\Leftarrow$ $\boxed{q \geq -1}$

$\bar{R}_5 = R_5 + (q, 0, 0) Y_5 = \frac{7}{10} + q\left(\frac{-3}{10}\right) \geq 0 \Rightarrow \boxed{q \leq \frac{7}{3}}$

מסקנה: אם השינוי ב- C_2 הוא $C_2 + q$ כאשר $-1 \leq q \leq \frac{7}{3}$
אזי הפיתרון המוכחי נשאר אופטימלי.

(?!) אם לא היה חיתוך בין שני התחומים נאמר שאין שינוי.

תוצאה כללית:

עבור שינוי $\bar{C}_i = C_i + q$ כאשר הרכיב i בסיסי
כדי שהפיתרון המוכחי "ישאר אופטימלי" q צריך לקיים את
מערכת המשוואות הבאה: $\hat{R}_j = R_j + q Y_{ij} \geq 0 \quad \forall j \text{ nonbasic}$

שינוי $\hat{C}_i = C_i + q$ i לא בסיסי

נקח $j \in N$ וגם $j \neq i$

$\hat{R}_j = C_B^T Y_j - C_j = R_j \geq 0$

לא נותן שום מגבלה על q

אבל אם $j = i$

$\hat{R}_i = \underbrace{C_B^T Y_i - (C_i}_{R_i} + q) = R_i - q \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{q \leq R_i}$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

שינויים ב- RHS וקטור b

$\max c^T x$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

דוגמה כללית שבה לפי המספרות:

בסיס	X_B	X_N	S	RHS
X_B	I	$Y = B^{-1}N$	B^{-1}	$B^{-1}b$
R	0	$R_N = C_B^T B^{-1} N - C_N$	$C_B^T B^{-1}$	$Z^* = C_B^T B^{-1} b$
		≥ 0	≥ 0	

פב"א אופטימלי נוכחי: $\begin{cases} X_B = B^{-1}b \\ X_N = 0 \end{cases}$

השינוי $\hat{b}_i = b_i + \beta$

הפיתרון אחרי השינוי יסומן $\hat{x}$

'1' במקום ה- i והשאר אפסים

$$\hat{X}_B = B^{-1}\hat{b} = B^{-1}(b + \beta e_i) = B^{-1}b + \beta B^{-1} e_i$$

$$\hat{X}_B = X_B + \beta \begin{pmatrix} \text{העמודה} \\ \text{ה-}i \\ \text{של } B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(*) \quad \boxed{X_B + \beta \begin{pmatrix} \text{העמודה} \\ \text{ה-}i \\ \text{של } B^{-1} \end{pmatrix} \geq 0}$$

הבסיס הנוכחי ישאר אופטימלי אם עבור β המקיים זאת הפב"א האופטימלי החדש: $\begin{pmatrix} \hat{X}_B \\ 0 \end{pmatrix}$.

תהי β כך ש $(*)$ מתקיים כלומר הפב"א החדש $\hat{X}_B$ הוא אופטימלי; נבדוק מה ערך פונקציית המטרה החדש:

$$\hat{Z} = C_B^T \hat{X}_B = C_B^T B^{-1} \hat{b} = C_B^T B^{-1}(b + \beta e_i)$$

$$\hat{Z} - Z = C_B^T B^{-1} \beta e_i = \beta y_i^*$$

כאשר $Z = C_B^T B^{-1} b$

$$\Downarrow$$

$$\hat{Z} - Z = \beta y_i^*$$

כאשר y_i^* רכיב של וקטור דואלי אופטימלי.

$$\frac{\hat{Z} - Z}{\beta} = y_i^* \Rightarrow \boxed{\frac{\hat{Z} - Z}{\hat{b}_i - b_i} = y_i^*}$$

השינוי בפונקציית המטרה יחסית לשינוי ב RHS זה בדיוק ה- y_i^*

דוגמה: כגון הבעיה המספרית הקודמת.

השינוי: $\hat{b}_i = b_i + \beta$

$$X_B + \beta \cdot \begin{pmatrix} \text{העמודה} \\ \text{ה-}i\text{-ית} \\ B^{-1}\delta e \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 12/5 \\ 2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2/5 \\ -3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta \geq -6 \\ \beta \leq \frac{2}{3} \\ \beta \leq 4 \end{cases} \Rightarrow -6 \leq \beta \leq \frac{2}{3}$$

מקבלים 3 תנאים

הפתרון החדש: עבור $\beta = \frac{1}{2}$ (שנמצא בתחום)

$$\hat{X}_B = X_B + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \text{עמודה } 1 \\ B^{-1}\delta e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2/5 \\ -3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/5 \\ 1/10 \\ 7/10 \end{pmatrix}$$

הוספת פעילות חדשה

נוספת בהתאם עמודה חדשה למטריצה A.

נוסף רכיב חדש לוקטור.

$$\max \; 4X_1 + 3X_2 + 5X_6$$

$$3X_1 + 4X_2 + X_3 + 2X_6 = 12$$

$$3X_1 + 3X_2 + X_4 + 3X_6 = 10$$

$$4X_1 + 2X_2 + X_5 + 4X_6 = 8$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1 \dots 6$$

העמודה שנוספה לטבלה המקורית

הטבלה הראשונה:

בסיס	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS
X_3	3	4	1	0	0	2	12
X_4	3	3	0	1	0	3	10
X_5	4	2	0	0	1	4	8
R	-4	-3	0	0	0	0	

הטבלה האחרונה:

בסיס	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS
X_2	0	1	2/5	0	-3/10	-2/5	
X_4	0	0	-3/5	1	-3/10	$-\frac{12}{5}$	
X_1	1	0	-1/5	0	2/5	$\frac{6}{5}$	
R	0	0	2/5	0	7/10	$-\frac{7}{5}$	

איך מוצאים את העמודה הזאת:

$$y_6 = B^{-1}a_6 = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & -3/10 \\ -3/5 & 1 & -3/10 \\ -1/5 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -12/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$$

$$R_6 = C_B^T B^{-1} a_6 - C_6 = C_B^T y_6 - C_6 = (3,0,4)\begin{pmatrix} -2/5 \\ -12/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} - 5 = -\frac{7}{5}$$

קיבלנו שהפיתרון הנוכחי אינו אופטימלי ואינו פא"מ ולכן יש להשתמש בשיטת הפאזות כדי להגיע לפיתרון אופטימלי.

תכנון לינארי בשלמים

ניסוח בעיות תל"ש

דוגמא 1: בע"ת סוכן נוסע (T.S.P)

סוכן יוצא מעיר מגוריו (עיר 1) וצריך לבקר בדיוק פעם אחת בכל אחת מהערים $1,2,\dots,n$.
נתונים מרחקים c_{ij} בין כל עיר i לעיר j
(זה יכול גם להיות מחיר הנסיעה) והמטרה היא למצוא מסלול אופטימלי.

ניסוח מס' 1:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{אם יש נסיעה מעיר } i \text{ מיידית לעיר } j \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פונקציית המטרה:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

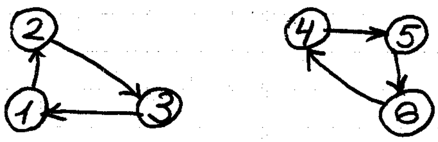
$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1\dots n$$ יציאה אחת בדיוק מעיר i

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1\dots n$$ כניסה אחת בדיוק לעיר j

דוגמה לתת מסלולים זרים ולמרות זאת מקיימים את האילוצים שכתבנו:



(המשך...)

תהי T תת קבוצה ממשית של $\{1,2,\dots,n\}$ (לא ריקה ולא כל הקבוצה)

T^c תת קבוצה משלימה

$$\sum_{i\in T}\sum_{j\in T^c} X_{ij} \ge 1 \quad \forall \, T^c, T$$

לכל תת הקב' הממשיות $\{1,\dots,n\}$

אבל יש 2^N-2 קבוצות כאלה של T ולכן הניסוח הזה לא שימושי (הוא אקספוננציאלי)

ניסוח 2

X_{ijk} משתנה בינארי - אם היתה נסיעה מ-i ל-j ביום k

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

פונקציית המטרה:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ij} X_{ijk}$$

לכל יעד j יש יציאה מ-i ביום כלשהו k.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_{ijk} = 1 \quad \forall i = 1 \dots n$$

רק כניסה אחת

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_{ijk} = 1 \quad \forall j = 1 \dots n$$

הכל יום k יש בדיוק נסיעה אחת.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} = 1 \quad \forall k = 1 \dots n$$

אילוץ המונע קיום תת מסלולים:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_{ij,k-1}}_{\text{ביום } k-1 \text{ היתה כניסה לעיר } j \text{ אם } x \text{ נותן } 1.} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} ijk}_{\text{אם היתה כניסה אז ביום למחרת חייבת להיות יציאה מהעיר } j} \qquad \forall j = 1,\dots,n \quad \forall k = 2,\dots,n$$

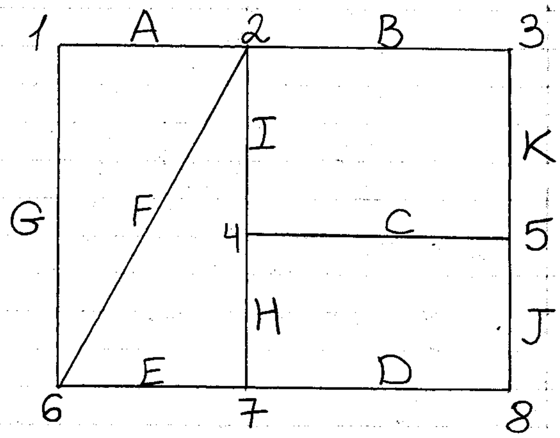
מספר האילוצים מז מתוך השוויונות הראשונים ועוד $N(N-1)$

וסה"כ $2N + N^2$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

דוגמא 2: בע"ת כיסוי (Covering Problem)

<u>המטרה</u>: להציב מס' מינימלי של טלפונים בצמתים, כך שבכל רחוב (A, B, ... K) יהיה לפחות טלפון אחד.



משתנים: $X_i = \begin{cases} 1 & \text{אם יש טלפון בצומת } i; \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

$X_i \in \{0,1\}$

מטרה:

$$\min \sum_{j=1}^{n} X_i$$

$$\sum_{j=1}^{7} X_i + X_{i+1} \geq 1$$

<u>מודל כללי של בע"ת כיסוי</u>

$$\min \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq 1$$

$$X_j \in \{0,1\}$$

בבע"ת כיסוי הנתונים a_{ij} בעצמם הם אפס או אחד.

<u>דוגמא 3: בע"ת ניתוב רכבים Vehicle Routing Problem (VRP)</u>

n רכבים אמורים להפיץ סחורה ל m יעדים מבסיס משותף.

הביקוש ביעד j הוא P_i.

כל הרכבים בעלי קיבולת מקסימלית C.

רכב אחד בדיוק יבקר כל יעד ויספק לו את כל הביקוש שלו.

כל רכב יוצא ושב לבסיס..

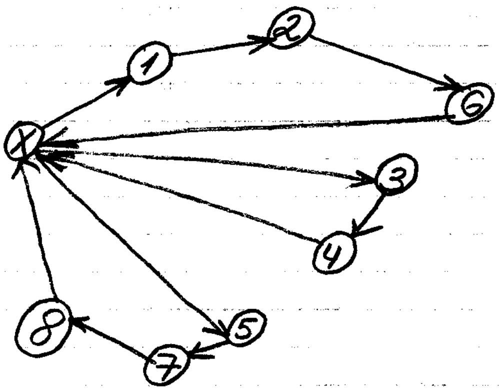
המטרה: לקבוע לכל רכב את הסבב שלו כך שסה"כ הוצאות ההובלה ימוזערו.

d_{ij} מרחק כל ההובלות.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

לדוגמא אם $m=8$, $n=3$, $C=9$

מפת הערים:



משתנים בינאריים:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

1 – אם הרכב נוסע ישירות מ- i ל j

0 – אחרת

משתנים רציפים:

y_{ijk} - הכמות המועברת בין i ל j ויעדה הסופי הוא k.

מטרה:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} d_{ij}X_{ij}$$

s.t.

$$\underbrace{\sum y_{ijk}} = \underbrace{\sum y_{jrk}} \quad \forall j,\ \forall k \neq j$$

כל הכניסות האפשריות לעיר j ויעדן הסופי הוא k ; סכום של כל היציאות מעיר j שהיא לא k ויעדה הוא k

סחורה שמגיעה ל-k ויעודה הוא k $\sum y_{ikk} = \underbrace{P_k}_{\text{ביקוש}} \quad \forall k$

נפרקת במקום זה.

$\sum_{j} X_{ij} = 1 \quad \forall j$ כניסה אחת לכל יעד j

$\sum_{r} X_{jr} = 1 \quad \forall j$ יציאה אחת מכל יעד j

$\sum_{k} y_{ijk} \le X_{ij}C \quad \forall i,\ \forall j \neq i$ בכל משאית שמגיעה ליעד סופי k - אין יותר מ- C

$y_{ijk} \ge 0 \quad \forall ijk$ הכמות היא חיובית

$\sum_{j=1}^{m} X_{0j} = n = \sum_{i=1}^{m} X_{i0}$ כל המשאיות יוצאות מהבסיס וחוזרות לבסיס.

$X_{ij} \in \{0,1\}$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

בעיית תרמיל הגב

Knapsack Problem

n-סוגי מוצרים שניתן לארוז

p_i-הערך של מוצר i

f_i - משקלו של מוצר i

C - קיבולת של התרמיל

משתנים:

x_i - מספר המוצרים מסוג i שיארזו (המשתנים שלמים)

המטרה: לארוז מוצרים בערך כולל מקסימלי.

$$\max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

S.t

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i \le C$$

x_i שלם וחיובי

מקרה פרטי - מכל מוצר יש רק אחד

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{אורז} \\ 0 & \text{לא אורז} \end{cases}$$

אילוצי או/או

either/or

דוגמא: מצא משתנים x_1, x_2 שיקיימו לפחות אחד מהאילוצים הבאים:

$$(1)\quad 2x_1 + 4x_2 \le 18$$

$$(2)\quad x_1 + 3x_2 \le 16$$

איך להפוך בעיה כזו לבעיית ת"ל בשלמים רגילה?

בוחרים מספר ענק M.

מגדירים משתנה חדש בינארי $y \in \{0,1\}$ ומנסחים את מע' האילוצים הבאה: המשתנים x_1, x_2 ו- y:

$$2x_1 + 4x_2 \le 18 + y \cdot M$$

$$x_1 + 3x_2 \le 16 + (1-y)M$$

$$y \in \{0,1\}$$

אם בפיתרון $y=0$ אזי האילוץ (1) מתקיים ו-(2) מתקיים או לא אבל מספיק שאחד יתקיים.
אם בפיתרון $y=1$ אזי אילוץ (2) מתקיים ו-(1) מתקיים או לא.
במקרה כזה יתכן ששני האילוצים יתקיימו.

קיום K מתוך N אילוצים ($K \le N$)

רוצים למצוא $x \in \mathbb{R}^n$ המקיים K מתוך N האילוצים הבאים:

$$f_1(x) \le d_1$$
$$f_2(x) \le d_2$$
$$\vdots$$
$$f_N(x) \le d_N$$

במקרה הקודם
$N=2$
$K=1$

כדי לעבור למערכת אילוצים רגילה (כלומר שצריך לקיים את כל האילוצים) מוסיפים N משתנים בינאריים $y_1, y_2, \dots, y_N$ ובונים את המערכת הבאה:

$$f_1(x) \le d_1 + y_1 M$$
$$f_2(x) \le d_2 + y_2 M$$
$$\vdots$$
$$f_N(x) \le d_N + y_N M$$

$$y \in \{0,1\} \quad j = 1,2,\dots,N$$

האילוצים בהם המשתנים הבינאריים y_i הם אפס הם אלו המקיימים את האילוצים המקוריים.
כדי לקיים בוודאות K אילוצים מקוריים נדרוש ש-K y-ים יהיו אפס.
לכן נוסיף עוד אילוץ למערכת:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = N-K$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

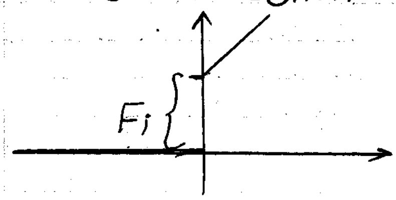
בע"ת "יצור עם הוצאות קבועות

fixed cost

מפעל חייב לייצר לפחות m יח' מוצר (בשבוע) מסוים.
ניתן לייצר אותו על-גבי כל אחת מתוך n מכונות.
הוצאות הייצור: P_i עלות לייצור יח' מוצר במכונה i
F_i הוצאה קבועה על עצם הפעלתה של מכונה i

משתנים:
x_i - כמות המוצרים שייוצרו במכונה i
מטרה: סה"כ הוצאות תפעול מינימליות.
פונקציית ההוצאות של מכונה i $\leftarrow$ $C_i(x)$

$$C_i(x) = \begin{cases} 0 & x_i = 0 \\ F_i + P_i x_i & x_i > 0 \end{cases}$$



$$\min \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i)$$

פונקציה זו אינה לינארית ואינה רציפה.

נגדיר משתנים $y_i \in \{0,1\}$ $\quad i=1,\dots,n$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{אם המכונה } i \text{ מופעלת} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

יהי U_i מספר גדול כך שבוודאות מתקיים $x_i \le U_i$ $\Leftarrow$

$$\min \sum_{i=1}^{n} (P_i x_i + F_i y_i)$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \ge m$$

$$x_i \le U_i y_i \quad \forall i = 1,\dots,n$$

$$x_i \ge 0 \qquad y_i \in \{0,1\}$$

אם מייצרים $x>0$ אז בנוסף מוסיפים F_i להוצאות.
אם לא מייצרים $x=0$ אז נבחר את $y=0$ מפני שמחפשים את המינימום (שיקולי אופטימליות)

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

בעיית תקצוב הון
Capital Budgeting

חברה יכולה להשקיע ב- n פרוייקטים פוטנציאלים.
בכל אחת מתוך m התקופות יש להשקיע הון:

f_{ij} - כמות שיש להשקיע בפרוייקט i בתקופה j.
P_i - הרווח הסופי מביצוע פרוייקט i
C_j - כמות ההון שיש לפירמה להשקעה בתקופה j.

משתנים:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{אם פרויקט } i \text{ מופעל} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} P_i X_i$$

S.t

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ij} X_i \le C_j \qquad j=1,\dots,m$$

$$X_i \in \{0,1\}$$

בעיית מיקום מפעלים
Facility Locating Problem

n - מקומות אפשריים בהם ניתן להקים מפעל $(j=1,\dots,n)$
m - לקוחות האמורים לקבל את ביקושם מהמפעלים $(i=1,\dots,m)$
C_j - מחיר הקמת מפעל במקום j
P_{ij} - מחיר השרות של לקוח i ממפעל j

מטרה: לקבוע היכן להקים מפעלים וכן איך ישורתו הלקוחות כך שביקושם יתמלא וכך שהוצאות התפעול הכוללות (הקמה, שרות) ימוזערו.

המשתנים:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{j אם מוקם מפעל במיקום} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

x_{ij} - משתנה רציף - הפרופורציה מסך הביקוש של לקוח i שסופק ע"י המפעל j.

Model A:

$$\min \left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \right)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1 \dots m$$

$$0 \le x_{ij} \le 1$$

$$(**) \quad y_j \in \{0,1\}$$

$(*)$ $x_{ij} \le y_j$ → אם לא הקמנו מפעל ב j אז הוא בוודאי אינו מספק אף לקוח. $\forall j = 1, \dots, n$

Model B:

מחליפים רק את האילוץ $(*)$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le m y_j \qquad \forall j$$

נשים לב שבמודל A יש $m \times n + m$ לפחות אילוצים

במודל B יש $n + m$ לפחות אילוצים

לכן B נראה ניסוח הרבה יותר חסכוני.

כמו כן, הקבוצה האפשרית של מודל A קטנה יותר מזו של מודל B; אם נחליש את A ו- B בעזרת שינוי האילוץ $(**)$ ל $0 \le y \le 1$.

ניסוח A עדיף על B על-אף שיש יותר אילוצים.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

שיטה לפיתרון בעיות תו"ל בשלמים

שיטת "סעף וחסם"

Branch and Bound

בעיה כללית:

$$(P) \quad \min f(x)$$
$$x \in S$$

החלשה של בעיה (P) היא הבעיה (Relaxation) הבאה:

$$(\hat{P}) \quad \min f(x)$$
$$x \in \hat{S}$$

כאשר $S \subset \hat{S}$

מהגדרה כו נובע מייד ש- $\min(\hat{P}) \le \min(P)$ ולכן פיתרון הבעיה המוחלשת מהווה חסם תחתון לבעי"ת מינימום המקורית.

חסם עליון ל $\min(P)$ הוא: $\min(P) \le f(x)$ כאשר x הוא איזשהו פיתרון אפשרי (כ"א $x \in S$) של הבעיה (P).
בשיטה כו כל הזמן נקטין את החסמים כדי שהם ילכו ויתהדקו סביב הפיתרון האופטימלי.

הבעיה $\max f(x)$, $x \in S$ הבעיה המוחלשת $\max f(x)$, $x \in \hat{S}$ כאשר $S \subset \hat{S}$

ובעיה מוחלשת כו נותנת חסם עליון לבעי"ת מקסימום המקורית.
וכל פיתרון אפשרי נותן חסם תחתון.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

דוגמאות להחלשה :

1) החלפה של אילוץ בבעיה המקורית $x_i \in \{0,1\}$ באילוץ $0 \le x \le 1$
כלומר, ויתור על דרישת שלמות (Integer) של משתנים.

2) ויתור על אילוצים - כל פעם שזורקים אילוץ אז הקבוצה הפיזיבילית גדלה.
לדוגמאה ויתור על אילוצי מסלול בבעיית סוכן נוסע נותנת
בעייה מוחלשת שהיא למעשה בעיית השמה (Assignment)

דוגמא:

$$\min Z = x_1 - 2x_2$$

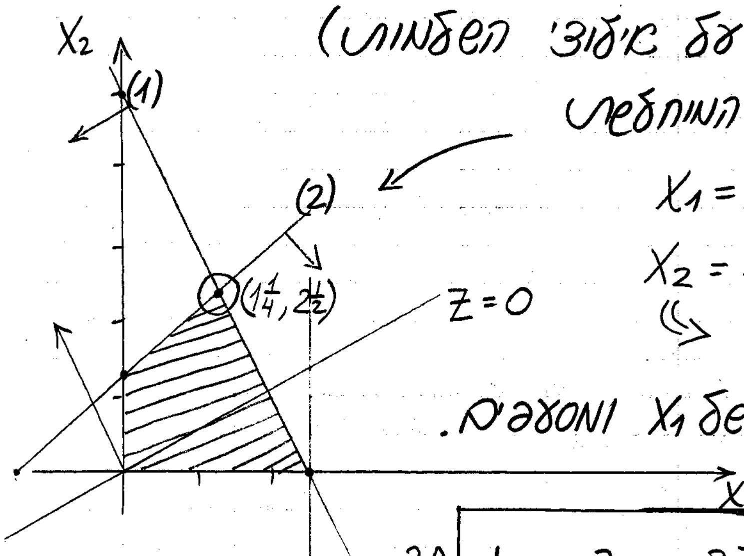
s.t

(1) $2x_1 + x_2 \le 5$

(2) $-4x_1 + 4x_2 \le 5$

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$ Integer

(נחליש את הבעיה - מוותרים על אילוצי השלמות)



התחום הפיזיבילי של הבעיה המוחלשת

הפיתרון הגרפי נותן - $x_1 = 1\frac{1}{4}$, $x_2 = 2\frac{1}{2}$

$Z = -3\frac{3}{4} = L_1$ חסם תחתון

בוחרים את אחד המשתנים שאינו שלם, למשל x_1 ומעגלים.

$Z = -3\frac{3}{4}$
$* \; x_1 = 1\frac{1}{4}$
$x_2 = 2\frac{1}{2}$

$x_1 \le 1$ — הערך התחתון של x_1

2A
$L_{2A} = Z = -3\frac{1}{2}$
$x_1 = 1$
$* \; x_2 = 2\frac{1}{4}$

$x_1 \ge 2$ — הערך העליון של x_2

2B
$Z = 0 = \hat{U}_1$
$x_1 = 2$
$x_2 = 1$
עצירה

$x_2 \le 2$

3A
$L_{3A} = Z = -3\frac{1}{4}$
$* \; x_1 = \frac{3}{4}$
$x_2 = 2$

$x_2 \ge 3$

3B
אין פיתרון אפשרי
עצירה

$x_1 = 1$

$Z = -3 = \hat{U}_2$
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
זהו הפיתרון האופטימלי.

$x_1 = 0$

4B
$L_{4B} = Z = -2\frac{1}{2}$
$x_1 = 0$
$x_2 = \frac{5}{4}$
עצירה

$$-2\frac{1}{2} = L_{4B} > U_2 = -3$$

נתונה בעיית התרמיל:

$C = 20$

הסדר הנכון	j	w_i	v_i	$\frac{v_i}{w_i}$
4	1	9	36	4
5	2	15	45	3
2	3	2	12	6
3	4	10	50	5
1	5	10	90	9

נבדוק אילו חפצים יכנסו לתרמיל:

$X_5 = 1$ ניתן להכניס אותו בשלמותו

$X_3 = 1$ גם אותו ניתן להכניס בשלמותו

ביחד $X_5 + X_3 = 12$ ולכן ניתן

להכניס רק 8 מתוך חפץ 4

כלומר $\frac{8}{10}$.

קיבלנו:

$X_5 = 1,\ X_3 = 1,\ X_4 = \frac{8}{10}$

$Z = 90 + 12 + \frac{8}{10} \cdot 50 = 142$

$X_4 = 0$

חפץ X_4 לא נכנס

134 הוא החסם העליון לענף, כלומר אם לא מכניסים את חפץ X_4 לא נקבל ערך טוב יותר.

$X_5 = 1,\ X_3 = 1,\ X_1 = \frac{8}{9}$

$Z = 90 + 12 + \frac{8}{9} \cdot 36 = 134$

נסגר משום ש- 134 שהוא החסם העליון, קטן מהחסם התחתון.

$X_4 = 1$

חפץ 4 נכנס

$X_4 = 1 \quad X_5 = 1$

$Z = 90 + 50 = 140$

הפתרון האופטימלי

פתרון בעיית השמה ע"י סעף וחסם

רה"מ רוצה לאייש שלוש משרות ע"י שלושה שרים.
בטבלה הבאה נתונים הנזקים (במיליונים) של השמה של כל שר בכל תפקיד:

שר	ביטחון	אוצר	חוץ
A	31	1	27
B	38	33	30
C	26	37	29

השמה = בחירה של 3 תאים כך שבכל שורה יש רק תא אחד שנבחר וגם בכל עמודה יש רק תא אחד שנבחר.

רלקסציה: נסתכל על הבעיה כך שהאילוץ היחיד הוא שבכל עמודה יש בחירה אחת בלבד.
הפיתרון: בכל עמודה נבחר את המינימלי.

$A \Rightarrow 1$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline A & 31 & 1 & 27 \\ B & 38 & 33 & 30 \\ C & 26 & 37 & 29 \end{array}$$

חסם עליון לבעיה

$\boxed{31+33+29=93}$

במקרה יצא שיש בדיוק בחירה אחת בכל שורה ועמודה ולכן זהו פיתרון אפשרי לבעיה המקורית

$B \Rightarrow 1$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline A & 31 & 1 & 27 \\ B & 38 & 33 & 30 \\ C & 26 & 37 & 29 \end{array}$$

$\boxed{38+1+27=66}$

נפסל כי זה חסם פחות טוב מ-57

$C \Rightarrow 1$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline A & 31 & 1 & 27 \\ B & 38 & 33 & 30 \\ C & 26 & 37 & 29 \end{array}$$

חסם תחתון לבעיה

$\boxed{26+1+27=54}$

$A \Rightarrow 2$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline A & 31 & 1 & 27 \\ B & 38 & 33 & 30 \\ C & 26 & 37 & 29 \end{array}$$

$\boxed{26+1+30=57}$

פוסלים את $(B \Rightarrow 2)$ כי קיבלנו חסם טוב יותר

$B \Rightarrow 2$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline A & 31 & 1 & 27 \\ B & 38 & 33 & 30 \\ C & 26 & 37 & 29 \end{array}$$

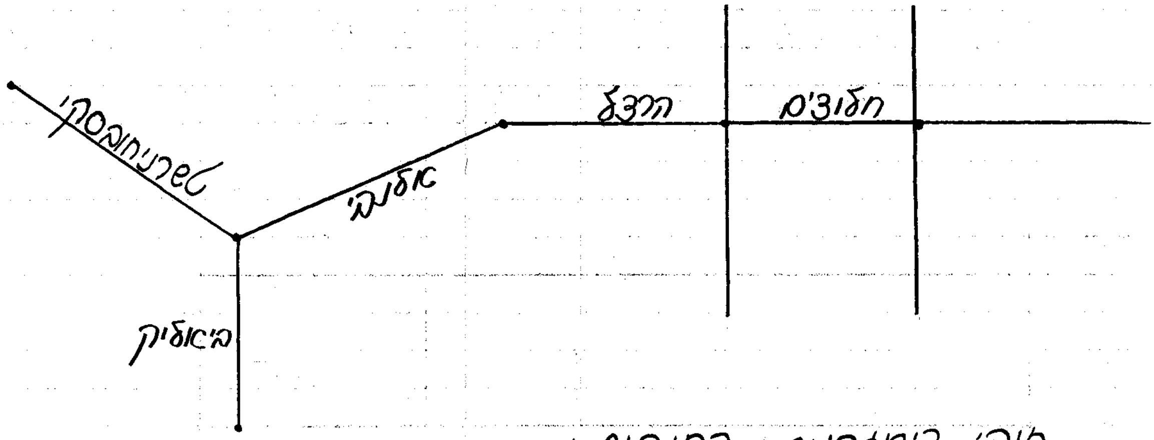
$\boxed{26+33+27=86}$

נפסל

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

תכנות דינמי



זוהי דיאגרמת רחובות.

מצב = הצומת בו נמצאים בכל שלב שצריך לפנות.

החלטה = הפעולה הנבחרת מתוך אוסף פעולות אפשריות.

כל החלטה יוצרת "תוצאה" (עלות/רווח) ומביאה למצב חדש (צומת חדש).

המצב הסופי נקרא אופק התכנון.

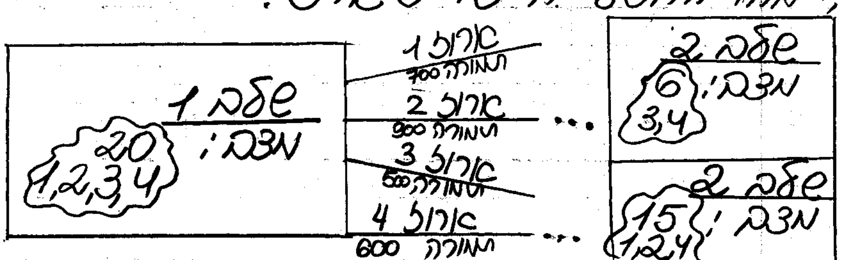
מחפשים סדרת החלטות (בכל שלב/מצב) ממצב התחלתי עד אופק התכנון, כך שסה"כ התמורה/תוצאה תהיה אופטימלית.

דוגמא: בעיית תרמיל הגב.

ערך	משקל	חפץ
700	14	1
900	8	2
500	5	3
600	4	4

$C=20$

- 4 שלבים
- מצב = הקיבולת הנותרת בתרמיל ורשימת החפצים שעדיין לא נארזו.
- שלב k: מחליטים בו, מהו החפץ ה-k שיארז.



את אותה בעיית התרמיל ניתן לראות כבעיית תכנון דינאמי
עם תיאור שונה של מצבים והחלטות.

שלב i - ההחלטה: האם לארוז או לא לארוז את החפץ מס' ה-i.
מצב: התכולה הפנויה בתרמיל.

תכנות דינמי (אופק סופי)

מספר סופי של שלבים
מספר סופי של מצבים בכל שלב
מספר סופי של החלטות בכל שלב

בעיית החלטה רב שלבית (Multi Stage Decision Process)

שלב - נקודה בה יש לבצע החלטה.
החלטה - תלויה במצב המערכת ונבחרת מתוך קבוצת ההחלטות האפשריות במצב ובשלב.
ההחלטה גורמת לתמורה/עלות מיידית ולמעבר המערכת לשלב הבא במצב חדש.

המטרה - להביא את המערכת מהמצב ההתחלתי לשלב הסופי (שנקרא אופק התכנון) כך שסה"כ התמורות/העלויות יהיה מקסימלי/מינימלי בהתאמה.

תיאור הבעיה:

* מערכת בת n שלבים המסומנים $1,\dots,n$
* בכל שלב k שבו המצב הוא x_0 ישנן t_k החלטות $i=1,2,\dots,t_k$ אפשריות.
* r_i התמורה המיידית מההחלטה ה-i
* x_i המצב שיווצר כתוצאה

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

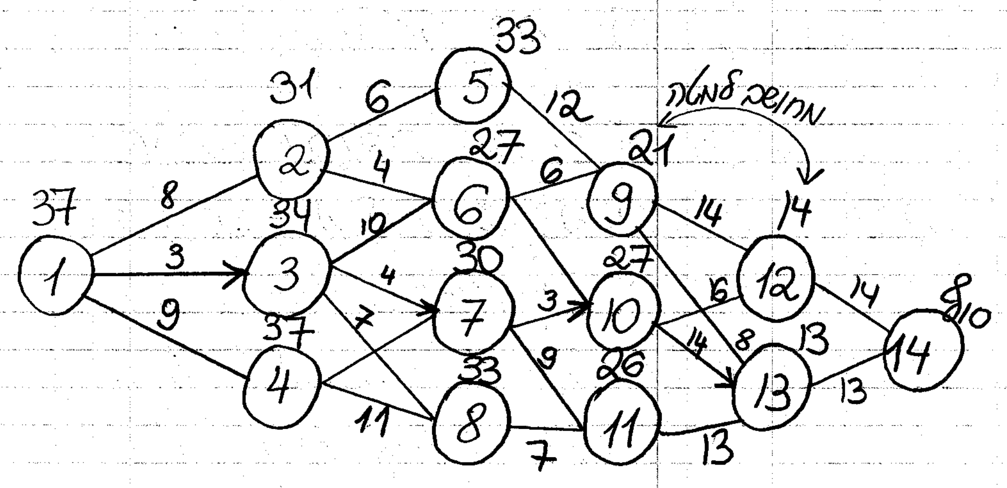
הגדרה: פונקציית הערך האופטימלי בשלב ה-K במצב $f_K(X_0) = X_0$ והתמורה הכוללת ממצב K ועד אופק התכנון (n) המתקבלת ממדיניות אופטימלית (כאשר מדיניות ה-K היא סדרת ההחלטות מ-K עד הסוף (n)).

<u>משוואות התכנות הדינמי</u>

עיקרון Bellman

$$f_K(X_0) = \max\{\underbrace{r_1 + f_{K+1}(X_1)}_{\text{החלטה מס' 1}},\ \underbrace{r_2 + f_{K+1}(X_2)}_{\text{החלטה מס' 2}},\ \dots,\ \underbrace{r_{t_K} + f_{K+1}(X_{t_K})}_{\text{החלטה } t_K}\}$$

מצב בשלב (יום) K: רשימת הערים שניתן להגיע אליהן ביום K.



שלב 1 שלב 2 שלב 3 שלב 4 שלב 5 שלב 6

מסלול האורך מינימלי משלב K ומצב j עד עיר סוף נסמן ב $f_K(j)$ ביום ה-K בעיר ה-j.

$f_6(14) = 0$ תנאי סוף

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

$$\begin{cases} f_5(12) = \min\{14 + f_6(14)\} = 14 \\ f_5(13) = \min\{13 + f_6(14)\} = 13 \end{cases}$$

$f_4(9) = \min\{14 + f_5(12),\ 8 + f_5(13)\} = 21$

$f_4(10) = \min\{16 + f_5(12),\ 14 + f_5(13)\} = 27$

$f_4(11) = \min\{13 + f_5(13)\} = 26$

מכאן ניתן לחשב בעל-פה ולרשום את הערכים האופטימליים ולפיהם לבחור את המסלול האופטימלי.

בעיית החלפת מכונות

דוגמא: למפעל יש מכונה בת 3 שנים.

רוצים לתכנן מדיניות החלפה ל-4 השנים הבאות.

מחיר מכונה חדשה 100,000 $.

מכונה בת 6 שנים חייבים למכור.

ההחלטות נעשות בתחילת השנה ומתבצעות מיד.

גיל המכונה (t)	תמורה $r(t)$	הוצ' אחזקה $C(t)$	מחיר מכירה $S(t)$
0	20,000	200	—
1	19,000	600	80,000
2	18,500	1,200	60,000
3	17,200	1,500	50,000
4	15,500	1,700	30,000
5	14,000	1,800	20,000
6	12,200	2,200	5,000

k-keep
r-replace

שלב	1	2	3	4
מצבים גילאים אפשריים של המכונה בכל שלב	3	1	1	1
		4	2	2
			5	3
				6

<u>באופן כללי</u>: תכנון לאופק של n שנים - בתחילת כל שנה ההחלטה היא בין לשמור את הציוד לשנה נוספת (k-keep) או להחליפו בחדש (r-replace).

ציוד בתחילת שנה גילו t שנים ומתן תמורה $r(t)$ כל השנה ובקודמת, הוצאות האחזקה $C(t)$.

ציוד בגיל t בתחילת השנה נמכר במחיר $S(t)$.

מחיר ציוד חדש הוא I.

אחרי השנה ה-n מוכרים את המכונה.

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

שלב i = שנה i

מצב בשלב i = גיל הציוד

החלטות = לשמור / להחליף

המטרה = תמורה נטו מקסימלית מצטברת אחרי שנים $1,2,\dots,n$

$f_i(t)$ פונקציית הערך האופטימלי.

הכנסה מצטברת נטו ממכונה שבשנה i היא בת t שנים. על פני השנים $i, i+1, \dots, n$ כתוצאה ממדיניות החלפה אופטימלית.

$$f_i(t) = \max\{\underbrace{r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1)}_{\text{keep}}, \underbrace{r(0) - c(0) - I + f_{i+1}(1) + S(t)}_{\text{replace}}\}$$

תנאי סיום $f_{n+1}(t) = S(t) \quad \forall t$

שלב 4 - שנה 4 מעכשיו

	Keep	Replace
t	$r(t) - c(t) + f_5(t+1)$	$r(0) - c(0) - I + S(t) + f_5(1)$
1	$19 - 0.6 + \overset{\text{מכירה}}{60} = 78.4$	$20 - 0.2 - 100 + 80 + 80 = \overset{R}{\boxed{79.8}}$ נבחר
2	$18.5 - 1.2 + 50 = \overset{K}{\boxed{67.3}}$	$20 - 0.2 - 100 + 60 + 80 = 59.8$
3	$17.2 - 1.5 + 30 = 45.7$	$20 - 0.2 - 100 + 50 + 80 = \overset{R}{\boxed{49.8}}$
6	$12.2 - 2.2$ מחוץ לאופק התכנון, חובה למכור	$20 - 0.2 - 100 + 5 + 80 = \overset{R}{\boxed{4.8}}$

שלב 3 - שנה 3 מעכשיו

t	$r(t) - c(t) + f_4(t+1)$	$r(0) - c(0) - I + S(t) + f_4(1)$
1	$19 - 0.6 + 67.3 = \overset{K}{\boxed{85.7}}$	$20 - 0.2 - 100 + 80 + 79.8 = 79.6$
2	$18.5 - 1.2 + 49.8 = \overset{K}{\boxed{67.1}}$	$20 - 0.2 - 100 + 60 + 79.8 = 59.6$
5	$14 - 1.8 + 4.8 = 17$	$20 - 0.2 - 100 + 20 + 79.8 = \overset{R}{\boxed{19.6}}$

שלב 2 - שנה 2 מעכשיו

t	$r(t)-c(t)+f_3(t+1)$	$r(0)-c(0)-I+S(t)+f_3(1)$
1	$19-0.6+67.1=\overset{K}{\boxed{85.5}}$	$20-0.2-100+80+85.7=\overset{R}{\boxed{85.5}}$
4	$15.5-1.7+19.6=33.4$	$20-0.2-100+30+85.7=\overset{R}{\boxed{35.5}}$

שלב 1 - עכשיו

t	$r(t)-c(t)+f_2(t+1)$	$r(0)-c(0)-I+S(t)+f_2(1)$
3	$17.2-1.5+35.5=51.2$	$20-0.2-100+50+85.5=\overset{R}{\boxed{55.3}}$

מדיניות אופטימלית:

$$\left.\begin{array}{l} I)\ R\to K\to K\to R \\ II)\ R\to R\to K\to K \end{array}\right\}$$

שתיהן נותנות את הערך האופטימלי 55.3

בעיית תרמיל הגב

(תכנות דינמי (פיתרון בשלבים

n חפצים שונים שניתן לארוז בתרמיל שתכולתו המקסימלית C

W_i = משקל חפץ i

V_i = ערך חפץ i

שלב i = השלב שבו מחליטים אם לארוז את חפץ שמספרו i

מצב = המשקל הפנוי בתרמיל בשלב i

החלטה בשלב i :
$\left\{\begin{array}{ll}\text{לארוז את החפץ שמספרו } i & (y_i=1)\\ \text{לא לארוז את החפץ שמספרו } i & (y_i=0)\end{array}\right.$

הערך המקסימלי $f_i(x)$ שניתן לארוז בתרמיל שיש בו עדיין קיבולת x ונותר עדיין לארוז חפצים $i, i+1, \dots, n$

תנאי הסוף:
$$f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le w_{n-1}\\ V_n & x\ge w_1\end{cases}$$

$$\max\{\underbrace{f_{i+1}(x)}_{\text{לא לארוז את } i},\ \underbrace{V_i+f_{i+1}(x-\omega_i)}_{\text{לארוז את } i}\}$$

Prepared by Boris Milner (Thanks to Anna Shor)

דוגמא מספרית:

מספר הפרט	משקל	ערך
1	3	12
2	4	12
3	3	9
4	3	15
5	15	90
6	13	26
7	16	112

קיבולת $C=35$

$n=7$

תנאי הסוף:

$$f_7(x) = \begin{cases} 0 & x \le 15 \\ 112 & x \ge 16 \end{cases}$$

$$f_6(x) = \max\{f_7(x),\ 26 + f_7(x-13)\}$$

טבלה למצב 6

X	$f_6(X)$	החלטה
0-12	0	$y_6=0$
13,14,15	26	$y_6=1$
16-28	112	$y_6=0$
29-35	26+112=138	$y_6=1$

$$f_5(x) = \max\{f_6(x),\ 90 + f_6(x-15)\}$$

טבלה למצב 5

X	$f_5(X)$	החלטה
0-12	0	$y_5=0$
13,14	26	$y_5=0$
15	90	$y_5=1$
16-27	112	$y_5=0$
28	116	$y_5=1$
29,30	138	$y_5=0$
31-35	202	$y_5=1$

(המשך בדפים)