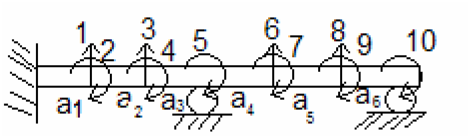
דף נוסחאות לאנליזת מבנים

אלמנטים סופיים

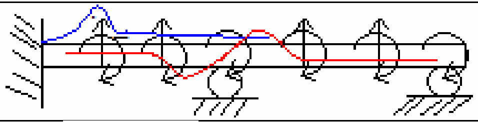


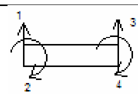
$\Phi_I(x)$ - פונקצית צורה (I- מס' ד"ח גלובליות) תמיד גזירה (חלקה).

Φ_I - של תזוזה/כוח - מקבלת 1 בנק' ד"ח I, ו- 0 בכל ד"ח אחרת.

Φ_I - של זוית/סיבוב/מומנט – 1 בנגזרת בנק' ד"ח, 0 בערך הפונקציה בנק'.

a_i - אורך אלמנט i.

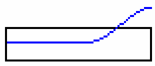
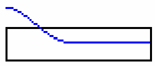
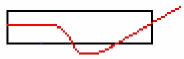
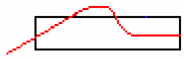
כחול – פונקצית תזוזה של ד"ח 1. אדום – פונקצית סיבוב של ד"ח 5.	



ברמת האלמנט

$$u^e \cong u^{e*} = \sum_i d_i \phi_i^e(x); i = 1,2,3,4$$

$$\phi_1^e(x_1^e) = 1 \quad \phi_{i\neq 1}^e(x_1^e) = 0$$

Φ_3^e 	Φ_1^e 
Φ_4^e 	Φ_2^e 

פונקציות הרמיט (Hermite)

$$\boxed{\phi_1^e(x) = -\left(x - x_2^e\right)^2 \frac{-h^e + 2\left(x_1^e - x\right)}{\left(h^e\right)^2}}$$

$$\boxed{\phi_3^e(x) = \frac{\left(x - x_1^e\right)\left(x - x_2^e\right)^2}{\left(h^e\right)^2}}$$

$$\boxed{\phi_2^e(x) = \left(x - x_1^e\right)^2 \frac{h^e + 2\left(x_2^e - x\right)}{\left(h^e\right)^2}}$$

$$\boxed{\phi_4^e(x) = \frac{\left(x - x_1^e\right)^2\left(x - x_2^e\right)}{\left(h^e\right)^2}}$$

ריילי ריץ

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_{.0}^{L} EI\left(u''\right)^2 dx - \left[\int_0^L fu dx + \sum_{n=1}^{N_P} u\left(x_p^{(n)}\right)P^{(n)} + \sum_{m=1}^{N_M} u'\left(x_M^{(m)}\right)M^{(m)}\right]$$

$$\Pi(u) = \Pi(d_1,\dots,d_N) \rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial d_I} = 0 \quad (\text{N eq. in N var.})$$

$$F_I = \int_0^L f\phi_I(x)dx + \sum_{n=1}^{N_P}\phi_I\left(x_p^{(n)}\right) + \sum_{m=1}^{N_M}\phi_I'\left(x_M^{(m)}\right)M^{(m)}$$

$$K_{IJ} = \int_0^L \phi_I''(x) EI(x)\phi_J''(x)dx$$

$\bar{\bar{K}}\bar{d} = \bar{F}$. כאשר:

$\bar{\bar{K}}$ - מטריצת קשיחויות גלובלית. $\bar{d}$ - וקטור נעלמים. $\bar{F}$ - וקטור כוחות גלובלי.

עבור EI קבוע, פונקצית הקשיחות הלוקלית (עבור אלמנט):

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{EI}{\left(h^e\right)^3}\begin{pmatrix} 12 & 6h^e & -12 & 6h^e \\ & 4\left(h^e\right)^2 & -6h^e & 2\left(h^e\right)^2 \\ & & 12 & -6h^e \\ & & & 4\left(h^e\right)^2 \end{pmatrix}_{Sym.} \qquad \underline{f}^e = \frac{\hat{f}^e h^e}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ h^e/6 \\ 1 \\ -h^e/6 \end{pmatrix}$$

ממכאניקת מוצקים:

$$M = EIu'' \qquad V = -M'$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{M(x)y}{I} \qquad \tau = \frac{V(x)Q}{I \cdot b}$$

תנודות אורכיות

בעיית התגובה בתדר

$$\boxed{\left(AE\hat{u}'\right)' + \Omega^2 \rho \hat{u}' - \hat{f} = 0 \quad 0 < x < L}$$

1) מצב מתמיד. 2) כל העומסים וגם התגובה הם בתדר Ω נתון.

בעיית התגובה בזמן של תנודות אורכיות של מוט

$$\boxed{-\left(AEu'\right)' + f = \rho \ddot{u} \quad 0 < x < L}$$

$$u(0,t) = 0 \quad AEu'(L,t) = p(t)$$

$$u(x,0) = 0 \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x)$$

תנודות עצמיות- פתרון בהפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית.

$$\frac{\left(AE\phi'\right)'}{\rho\phi} = \frac{\ddot{T}}{T} = -\lambda \Rightarrow T = A\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right) \Rightarrow \boxed{\lambda = \omega^2}$$

מציאת $\lambda_n = \omega_n^2$:

$$\boxed{\left(AE\phi_n'\right)' + \lambda\rho\phi_n = 0}$$

אופני תנודה: ω_n- תדרים עצמיים. ϕ_n - פונקציות עצמיות.

תנודות רוחביות

תדרים עצמיים – פתרון בהפרדת משנים

$$\boxed{EIu^{IV} + \rho\ddot{u} = 0} \qquad \beta^4 \triangleq \frac{\omega^2\rho}{EI}$$

$$\phi(x) = a_1\sin(\beta x) + a_2\cos(\beta x) + a_3\sinh(\beta x) + a_4\cosh(\beta x)$$

בעיית המצב המתמיד (תגובה בתדר)

$$\boxed{EIu^{IV}+\rho\ddot{u}=f}\Rightarrow\left(c\triangleq\sqrt{\frac{EI}{\rho}}\right)\Rightarrow c^2\hat{u}^{IV}-\Omega^2\hat{u}=\frac{f}{\rho}$$

$$u_{ss}(x,t)=\hat{u}(x)\sin(\Omega t)\quad\text{or}\quad\hat{u}(x)\cos(\Omega t)$$

$$\hat{u}=\hat{u}_H+\hat{u}_P\qquad\qquad \hat{u}_P=-\frac{f}{\Omega^2\rho}\qquad\qquad (f=const)$$

תגובה בזמן

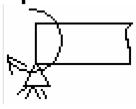
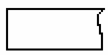
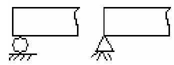
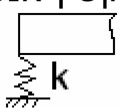
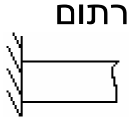
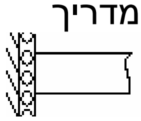
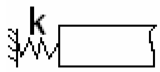
$$\boxed{EIu^{IV}+\rho\ddot{u}=f(x,t)}$$

תנודות זויתיות

אורכיות	$u(x,t)$	f	P	A	E
זוויתיות	$\theta(x,t)$	M	T	$J_O=\frac{\pi R^4}{2}$ כאשר לא מעגל: $J=2\int\psi dA$	$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$

אורכיות	ρ	$c=\sqrt{\frac{EA}{\rho}}$	$(EAu')'+f=\rho\ddot{u}$
זוויתיות	$I_\rho=\frac{I_P\rho}{A}$ $I_P=\int_A r^2dA$	$c=\sqrt{\frac{GJA}{I_P\rho}}=\sqrt{\frac{GA}{\rho}}$	$\boxed{(GJu')'+M=I_\rho\ddot{\theta}}$

קטלוג ת. שפה

מומנט קצה  $u=0$ $EIu''=M_0$	חופשית  $u''=0$ $u'''=0$	סמך פשוט  $u=0$ $u''=0$
קפיץ אנכי  $u''=0$ $EIu'''=-ku$	רתום  $u=0$ $u'=0$	מדריך  $u'=0$ $u'''=0$
	קפיץ אופקי  $EAu'=-ku$	

אנליזה מודלית

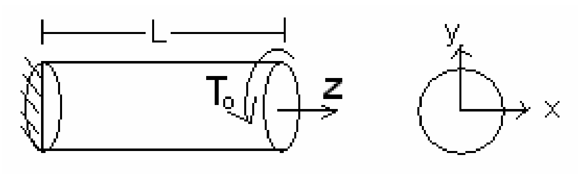
פונקציות ϕ_n אורתוגונאליות: $\int \phi_n \rho \phi_m \underset{n\neq m}{=} 0 = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$

נרמול: $A = \dfrac{1}{\sqrt{\int_0^L \phi_n^*(x)\rho(x)dx}}$. בד"כ: $A = \sqrt{\dfrac{2}{\rho L}}, \quad \phi_n^*(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$

$$g(x) = \sum g_n \phi_n(x), \qquad g_n = \int_0^L g(x)\rho(x)\phi_n(x)dx$$

$$u(x,t) = \sum_n \phi_n(x) T_n(t)$$

פיתול



$$\tau = \frac{Tr}{J} \qquad \tau = \sigma_{z\theta} = G\cdot\alpha\cdot r$$

$$\alpha = \frac{T}{GJ} \qquad \theta(L) = \alpha \cdot L$$

J – הקשיחות הגיאומטרית לפיתול (מומנט אינרציה פולארי).
G – קשיחות החומר (מודול הגזירה)

עבור חתך טבעית: $J = \dfrac{1}{2}\pi\left(R_o^4 - R_i^4\right)$

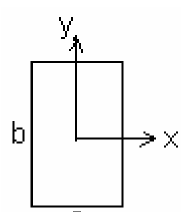
שדה התזוזות בפיתול: $u_r = 0 \quad u_\theta = \alpha \cdot z \quad u_z = 0$

<u>עיקוש</u> – היווצרות בליטות או שקעים בחתך עקב פיתול. מתרחש בחתכים שאינם עגולים.

<u>תיאורית סאן-ונאן</u>

$$\begin{bmatrix} u_{z,x} = \alpha\left(\psi_{,y} + y\right) \\ u_{z,y} = -\alpha\left(\psi_{,x} + x\right) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \nabla^2\psi = -2 \quad \text{in } A \\ \psi = 0 \quad \text{on } c \end{matrix}$$

דוגמא עבור חתך מלבני:



$$\sigma_{zx} = -\frac{8G\alpha a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \sinh(\lambda_n y)\cos(\lambda_n x)}{(2n+1)^2\cosh\left(\lambda_n \frac{b}{2}\right)},$$

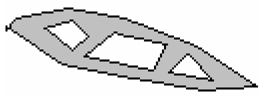
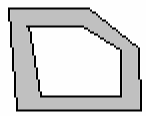
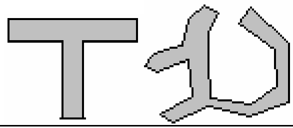
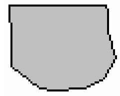
$$\sigma_{zy} = G\alpha\left[2x - \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cosh(\lambda_n y)\sin(\lambda_n x)}{(2n+1)^2\cosh\left(\lambda_n \frac{b}{2}\right)}\right] \qquad J = \frac{ba^3}{3}\left(1 - \frac{192}{\pi^5}\frac{a}{b} + \ldots\right)$$

$$\tau_{\max} = \beta G\alpha a \qquad J = \beta_1 \alpha^3 b$$

$\frac{b}{a}$	1	2	4	10	∞
β	0.675	0.93	0.997	1.000	1
β_1	0.141	0.229	0.281	0.312	0.333…
הערות	ריבוע – יותר איברים		דק דופן – איבר 1 או 2 לדיוק		

אם יחס המימדים $\frac{b}{a}\gtrsim 4$ אפשר להסתפק באיבר המוביל $J=\frac{bt^3}{3}$ $\quad \tau_{\max}=2G\alpha t$

סוגי חתכים

חתך סגור רב-תאי	חתך סגור חד תאי	חתך פתוח דק דופן	חתך מלא
			

<u>חתך דק דופן פתוח</u>

בקצוות: $\tau_{\max}=G\alpha t=\frac{T\cdot t}{J}$.

קשיחות של חתך טבעתי סגור לעומת פתוח היא הרבה יותר גדולה!

$$\left(GJ\right)_{opened}=G\alpha\pi R\frac{t^3}{3}\qquad \left(GJ\right)_{closed}\cong 2G\alpha\pi R^3 t$$

$$\frac{\left(GJ\right)_{closed}}{\left(GJ\right)_{opened}}=3\left(\frac{R}{t}\right)^2>>1$$

בחתך דק דופן המורכב ממספר חלקים (כגון, חתך T המורכב מ2 מלבנים), הקשיחות הגיאומטרית היא סכום הקשיחויות:

$$J_i=\frac{b_i t_i^3}{3},\quad J_{tot}=\sum_1^N J_i,\quad \tau_{\max}=\frac{T\cdot t_i}{J_{tot}},\quad \alpha=\frac{T}{GJ_{tot}}$$

<u>חתך סגור חד תאי</u>

s- קואורדינאטת מסלול.

שטף הגזירה $q\left(s\right)=\tau\left(s\right)t\left(s\right)$. לאורך היקף חתך, שטף הגזירה קבוע.

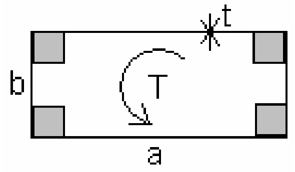
$\hat{A}$ – השטח הכלוא בחתך.

$$\boxed{T=2q\hat{A}}\rightarrow\boxed{q=\frac{T}{2\hat{A}}}\rightarrow\boxed{\tau\left(s\right)=\frac{q}{t\left(s\right)}=\frac{T}{2\hat{A}\cdot t\left(s\right)}}$$

$$W=\frac{1}{2}T\alpha L,\quad U=\frac{L}{2G}\int_C\tau^2 t\,ds\qquad J=\frac{4\hat{A}^2}{\int_C\frac{ds}{t\left(s\right)}}\underset{\text{made from parts}}{=}\frac{4\hat{A}^2}{\sum\frac{s_i}{t_i}}\underset{t=const}{=}\frac{4\hat{A}^2 t}{S}$$

<u>מניעת עיקוש</u>

מניחים שכל המאמצים הולכים על חיזוקים שהוספו בקצוות



$$u_{z,corners} = u_0\left(1-e^{-\frac{z}{\delta}}\right);\quad u_0 = \frac{(a-b)T}{8Gabt}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_0 e^{-\frac{z}{\delta}};\quad \sigma_0 = \frac{F}{A_S};\quad \delta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_S}{G}\frac{a+b}{t}A_S};\quad \sigma_0 \simeq \frac{E_S u_0}{\delta}$$

A_S - שטח חתך של חיזוק. E_S - מודול יאנג של החיזוק

<u>סוגי כפיפה</u>

- <u>כפיפה פשוטה</u>:
  - 1) כל העמיסה (כוחות/מומנטים) פועלים במישור אחד XZ.
  - 2) לחתך יש לפחות ציר סימטריה אחד: X או Y.
- <u>כפיפה "חצי כללית"</u>: ציר X או Y הוא ציר סימטריה
- <u>כפיפה כללית</u>: אין הגבלות

$Q_y = \int_\Omega x dA = \bar{x}_\Omega A_\Omega$. $\bar{x}_\Omega$ - מרחק מרכז השטח של התחום Ω (התחום שחותכים בו מחפשים את המאמץ) ממרכז שטח החתך. בגלל שהמאמץ בחתכון אחיד פחות או יותר: $q \equiv \tau \cdot t = \frac{V_X Q_y}{I_{yy}}$.

$$\tau_{tot} = \tau_{d.s.} + \tau_T$$
$$M_V = V \cdot e_V = M_{d.s.} + T$$
$$q = \tau t = \frac{\dots \cdot V_X + \dots V_y}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}$$

e_V - המרחק מהכוח לנק' היחוס.

אין פיתול כאשר $\alpha = 0 \to T = 0$, ומכאן מוצאים את e_V עבור מרכז הגזירה.

אלגוריתם לטיפול בגזירה של חתך פתוח

1. חישוב $\tau_{d.s.}$ מתוך כפיפה פשוטה: $\tau = \frac{VQ}{I \cdot t}$ (או חצי כללית או כללית)
2. לבדוק: האם המיקום של הקואו' הרלוונטית של מרכז הגזירה נתונה? אם כן, חישוב T מידי. אם לא, חישוב T מורכב.

<u>גזירה ופיתול של מוט חד תאי דק דופן</u>

$$q_{tot} = q_{d.s.} + q_T = \frac{VQ}{I} = \int_{-z/2}^{z/2} \tau dz$$

$$q(s) = q_{open}(s) + q^*;\quad q^* = \frac{M^*}{2\hat{A}} = \frac{V \cdot e_V - M_{open}}{2\hat{A}}$$

$$\alpha = \frac{\int \tau_T ds}{2G\hat{A}} = \frac{\int (\tau - \tau_{d.s}) ds}{2G\hat{A}} = \frac{\int_C \frac{q}{t} ds}{2G\hat{A}} = \beta_x (e_{vx}) V_X + \beta_y (e_{vy}) V_Y$$

$$e_{s.c.x} = e_{vx}\big|_{\beta x=0} ; \quad e_{s.c.y} = e_{vy}\big|_{\beta y=0}$$

<u>חתך סגור רב תאי</u>

<u>א)</u> מבצעים חתכוני ייחוס בכל N התאים כך שייוצר חתך פתוח (פיקטיבית). מקבלים N קבועים לא ידועים q_j^*.

<u>ב)</u> מוצאים את q_{open} בעזרת הנוסחא המתאימה. למשל בכפיפה פשוטה, $q = q_{open} + q^*$. כאשר $q^* = const$ בכל דופן בנפרד.

<u>ג)</u> נבחר נק' יחוס O.

<u>ד)</u> נחשב מ- q_{open} את המומנט שהוא יוצר M_{open} סביב O.

<u>ה)</u> נחשב את המומנט "החיצוני": $M_V = V_x e_{Vx} + V_y e_{Vy}$

<u>ו)</u> נכתוב משוואות של מאזן מומנטים: $M_V = M_{open} + 2\sum_j \hat{A}_j q_j^*$

<u>ז)</u> זווית הפיתול של תא j:

$$\alpha = \alpha_j = \frac{\int_{Cj} \frac{q}{t} ds}{2G\hat{A}_j} = \frac{\int_{Cj} (q_{open} + q^*) ds}{2G\hat{A}_j t_j}; \qquad \begin{matrix} j = 1 \ldots N \\ \alpha_j = \alpha_{j+1} \end{matrix}$$

נקבל עוד N-1 משוואות ב-N נעלמים (בנוסף לסעיף הקודם)

<u>ח)</u> פותרים את המע' עד N מש' ו-N נעלמים ומוצאים את כל q^*.

<u>השפעת חיזוקים</u>

מיקום הציר הניטרלי: $\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$. מומנט אינרציה: $I = \sum A_i d_i^2$.

ללא חיזוקים: $Q = A_\Omega \bar{x}_\Omega$. החיזוקים: $Q = \sum A_i x_i$

<u>פיגור גזירה</u>