מבוא:

מאמץ: $\sigma = \frac{F}{A}\left[{}^{Kgf}\!/\!{}_{m^2}\right]$ מעוות: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ (חסר יחידות)

טנזור המאמצים: $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$. מתקיים: $\begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \end{cases}$ לכן טנזור המאמצים הינו מטריצה סימטרית.

חוק הוק המוכלל:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{yy} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{xx} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{xx} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{yy} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}, \varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}, \varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} \end{cases}$$

(υ - מקדם פואסון, מקבל ערך של 0.3 עבור רוב המתכות)

(E- מודול יאנג, תכונה של החומר ואינה קשורה לעמיסה ו/או גיאומטריה של הבעיה)

מרכז השטח: עבור גוף רציף:

$$\begin{cases} \overline{X} = \frac{1}{A}\int_A xdA \\ \overline{Y} = \frac{1}{A}\int_A ydA \\ \overline{X} = \frac{1}{A}\int_A zdA \end{cases}$$

עבור גוף המורכב מצורות משנה:

$$\begin{cases} \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i} \\ \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \overline{y}_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i} \\ \overline{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \overline{z}_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i} \end{cases}$$

כפיפה פשוטה של קורות:

-החתך בעל סימטריה סביב ציר Y
- כל העומסים והדפורמציות במישור xy
-החתך עשוי מחומר אחיד

<u>רדיוס העקמומיות:</u> $\rho=\rho(x)$ <u>עקמומיות</u>: $K=\dfrac{1}{\rho}$

<u>הנחת ברנולי-אוילר</u>: חתך מישורי וניצב לציר הקורה <u>לפני</u> הדפורמציה
נשאר מישורי וניצב לציר הקורה <u>אחרי</u> הדפורמציה.

<u>מאמץ צירי כתוצאה מכפיפה פשוטה</u>: $\sigma_{xx}=-\dfrac{E\cdot y}{\rho}$

<u>רדיוס העקמומיות</u>: $\rho=\dfrac{E\cdot I}{M}$ לכן המאמץ הצירי יהיה: $\sigma_{xx}=-\dfrac{M\cdot y}{I}$

<u>מומנט האינרציה</u>: $\bar{I}=\int_A y^2 dA\left[m^4\right]$ (סביב הציר הניטראלי)

<u>משפט שטיינר</u>: $I=\bar{I}+A\cdot d^2$

חתך העשוי משני חומרים:

<u>מאמץ</u>: $\sigma_{xx}^{(1)}=-\dfrac{M\cdot y}{I_1+\dfrac{E_2}{E_1}\cdot I_2}$ $\sigma_{xx}^{(2)}=-\dfrac{M\cdot y}{I_2+\dfrac{E_2}{E_2}\cdot I_1}$ ונגדיר: $\eta=\dfrac{E_2}{E_1}$

כפיפה כללית:

<u>מרכז השטח</u>: $\dfrac{\bar{Y}}{\rho_z}=\dfrac{\bar{Z}}{\rho_y}\Leftarrow$ מרכז השטח נמצא על הציר הניטראלי.

<u>מאמץ כללי</u>:

$$\sigma_{xx}=\frac{(M_y\cdot I_{zz}+M_z\cdot I_{yz})\cdot Y-(M_z\cdot I_{yy}+M_y\cdot I_{yz})\cdot Z}{I_{yy}\cdot I_{zz}-I_{yz}^2}$$

<u>שיפוע הציר הניטראלי</u>: $\tan(\alpha)=\dfrac{y}{z}=\dfrac{M_y\cdot I_{zz}+M_z\cdot I_{yz}}{M_z\cdot I_{yy}+M_y\cdot I_{yz}}$ כאשר δ הינו כיוון שקיעת החתך, והוא תמיד בניצב לציר הניטראלי.

<u>הערה</u>:
אם לחתך יש ציר סימטריה (ציר Y ו\או ציר Z) אזי $I_{zy}=I_{yz}=0$.
ואז המאמץ הוא: $\sigma_{xx}=\dfrac{M_y\cdot I_{zz}\cdot Y-M_z\cdot I_{yy}\cdot Z}{I_{yy}\cdot I_{zz}}$

מאמצי גזירה עקב כפיפה:

<u>מאמץ הגזירה</u>: עבור חתך בו מאמץ **הגזירה** הוא V: $\tau=\dfrac{V_{(x)}\cdot Q_{(x,y)}}{I_{(x)}\cdot b_{(x,y)}}\left[N/m^2\right]$

$Q_{(x,y)}=\hat{A}\cdot\hat{\bar{Y}}\left[m^3\right]$

<u>כלל הסימן</u>: אם $\tau>0$ אזי כיוונו "נכנס" לתוך השטח $\hat{A}$.
אם $\tau>0$ אזי כיוונו "יוצא" מתוך השטח $\hat{A}$.

<u>משפט</u>: מאמץ הגזירה בחתך τ בנקודה הנמצאת על שפת החתך חייב להיות משיק לשפה.

מרכז הגזירה:

תכונות:

- מרכז הגזירה הינה הנקודה במישור החתך (לא בהכרח בחתך) כך שאם כל כוחות הגזירה עוברים דרכה, החתך יתכופף ללא פיתול.
- אם כוח הגזירה P פועל במרחק d ממרכז הגזירה, אזי מומנט הפיתול שהוא יפעיל יהיה $M_T = P \cdot d$.
- מרכז הגזירה הינו תכונה גיאומטרית של החתך ואיננו תלוי בערכו של כח הגזירה V.
- מרכז הגזירה עשוי להימצא מחוץ לחתך.
- במקרה וכוח הגזירה נטוי – אם קו הפעולה של הכוח עובר דרך מרכז הגזירה, אזי הכוח לא יגרום לפיתול.
- במידה והחתך מתפתל, הסיבוב יהיה סביב מרכז הגזירה.
- אם החתך בעל ציר סימטריה, אז מרכז הגזירה ימצא על ציר הסימטריה.
- אם בחתך ישנה נקודה בה "עוברים" כל מאמצי הגזירה, אז זהו מרכז הגזירה.

מציאת מרכז הגזירה:

- הוספת כוח גזירה כלשהו V במרחק e_{sc} מנקודת ייחוס כלשהיא.
- מציאת פילוג מאמצי הגזירה τ עקב הכפיפה בחתך.
- מציאת הכוחות השקולים של מאמצי הגזירה בחלקי החתך השונים.
- חישוב $\sum M_o$ בשתי צורות, פנימית וחיצונית ולהשוות ביניהן:

$$e_{sc} = \frac{F_D \cdot h}{V}[m]$$

שקיעה (תזוזה) של קורה:

עבור מקרים מסוימים סטטית: $M_{(x)} = E \cdot I \cdot W''_{(x)}$

- יש למצוא 2 תנאי שפה

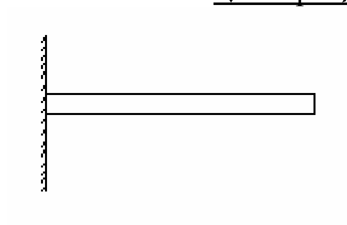
(נכון עבור דפורמציות קטנות בהן מתקיים $\frac{1}{\rho} = W''_{(x)}$)

משוואת ברנולי- אוילר לתזוזת קורה: $F_{(x)} = (E \cdot I \cdot W''_{(x)})''$

- יש למצוא 4 תנאי שפה

תנאי שפה שכיחים:

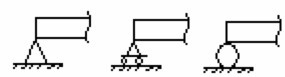
- <u>שפה רתומה (clamped)</u>:



$W = 0$

$W' = 0$

- <u>שפה עם סמך פשוט (simple support)</u>:



$W = 0$

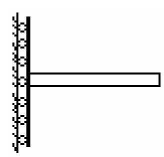
$W'' = 0$

- <u>שפה חופשית (free)</u>:

$W'' = 0$

$W''' = 0$

- <u>מדריך (guide)</u>:



$W' = 0$

$W''' = 0$

בעיית כפיפה עם קפיץ:

יש לפרק את הבעיה לשני גורמים:

- הכפיפה הרגילה של הקורה ללא התחשבות בקפיץ (נוכחות של עיגונים/ריתומים וכוחות בלבד)
- הכוח אותו יפעיל הקפיץ כתוצאה מהכפיפה: $F_k = -k \cdot \delta_{\max}$. יש לחשב את הכפיפה לה יגרום הקפיץ

לאחר מכן יש לחשב את הכפיפה האמיתית עפ"י: $\delta = \delta_q - \delta_{F_k} = \frac{F_k}{k}[m]$

<u>מאמצים וכיוונים ראשיים:</u>

<u>טרנספורמציית מאמצים (לפי זווית θ)</u> :

$$\begin{cases} \sigma'_{x'x'} = \dfrac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \dfrac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos(2\theta) + \sigma_{xy}\sin(2\theta) \\ \sigma'_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin(2\theta) + \sigma_{xy}\cos(2\theta) \\ \sigma'_{x'x'} = \dfrac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \dfrac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos(2\theta) - \sigma_{xy}\sin(2\theta) \end{cases}$$

<u>תכונה חשובה :</u> העקבה של כל מטריצת מאמצים תמיד זהה :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'}$$

<u>מאמצים ראשיים :</u> (ללא כיוונם)

$$\sigma_{P_{1/2}} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^{\ 2}}$$

<u>זווית המאמצים הראשיים</u> :

$$\tan(2\theta_p) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$$

<u>בשדה מאמצים ראשי :</u> מטריצת המאמצים אלכסונית :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$$

<u>מצב 2D מוכלל</u> :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

<u>זווית מאמץ הגזירה הראשי :</u>

$$\tan(2\theta_s) = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_{xy}}$$

$\Leftarrow$מאמצי הגזירה הראשיים תמיד יהיו ב- 45° למאמצים הראשיים. (מאמצי הגזירה מתאפסים במערכת הראשית, ולהיפך)

<u>מאמצי הגזירה הראשיים :</u>

$$\tau_{1/2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}{}^2}$$

<u>או בתלות במאמצים הנורמליים :</u>

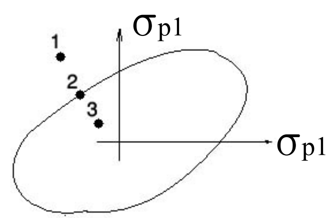
$$\tau_{1/2} = \pm\left(\sigma_{p1} - \sigma_{p2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

<u>קריטריוני כשל:</u>

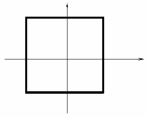
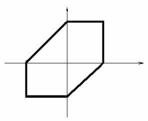
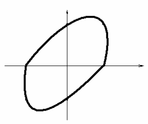
<u>מקדם ביטחון :</u> (חסר יחידות)

$$S.F. = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{\sigma_{\text{e}}}$$

<u>מעטפת הכשל (2D) :</u>



1. יש כשל
2. סף הכשל
3. אין כשל

שם	**תיאור**	**חומרים**	$3D, \sigma_e$	$2D, \sigma_e$	**צורת מעטפת הכשל**
רנקין	קריטריון "המאמץ הראשי המקסימלי"	פריכים (זכוכית, ברזל יציקה) מתנהגים זהה עבור מתיחה ולחיצה.	$\sigma_e = \max\left\{\left\|\sigma_{p1}\right\|, \left\|\sigma_{p2}\right\|, \left\|\sigma_{p3}\right\|\right\}$	$\sigma_e = \max\left\{\left\|\sigma_{p1}\right\|, \left\|\sigma_{p2}\right\|\right\}$	
טרסקה	כניעה מתרחשת בנקודה בחומר כאשר מאמץ הגזירה המקסימלי בנקודה מגיע לערך קריטי	משיכים	$\sigma_e = \max\left\{\begin{matrix}\left\|\sigma_{p1}-\sigma_{p2}\right\|, \left\|\sigma_{p2}-\sigma_{p3}\right\| \\ , \left\|\sigma_{p2}-\sigma_{p3}\right\|\end{matrix}\right\}$	$\sigma_e = \max\left\{\begin{matrix}\left\|\sigma_{p1}-\sigma_{p2}\right\|, \left\|\sigma_{p1}\right\| \\ , \left\|\sigma_{p2}\right\|\end{matrix}\right\}$	
וון-מיסס	נקודה בחומר תגיע לכניעה כאשר אנרגיית העיוות שלה תגיע לערך קריטי	משיכים	$\sigma_e = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{p1}-\sigma_{p2}\right)^2 + \left(\sigma_{p2}-\sigma_{p3}\right)^2 + \left(\sigma_{p3}-\sigma_{p1}\right)^2}{2}}$	$\sigma_e = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{p1}-\sigma_{p2}\right)^2 + {\sigma_{p1}}^2 + {\sigma_{p2}}^2}{2}}$	

<u>הערה:</u>

קריטריוני הכשל של טרסקה וון –מיסס דומים ביותר, אך הקריטריון של טרסקה הוא המחמיר מבין השניים. לעומת זאת נעדיף להיעזר בקריטריון של וון מיסס, כיוון שהוא נוח יותר לחישוב מתמטי (אין נק' לא גזירות) .

<u>קריטריוני כשל:</u>

<u>משוואת הקריסה</u>:

$$\left(E\cdot I\cdot W''\right)''+P\cdot W''=q$$

$$\lambda=\sqrt{\frac{P}{E\cdot I}}$$

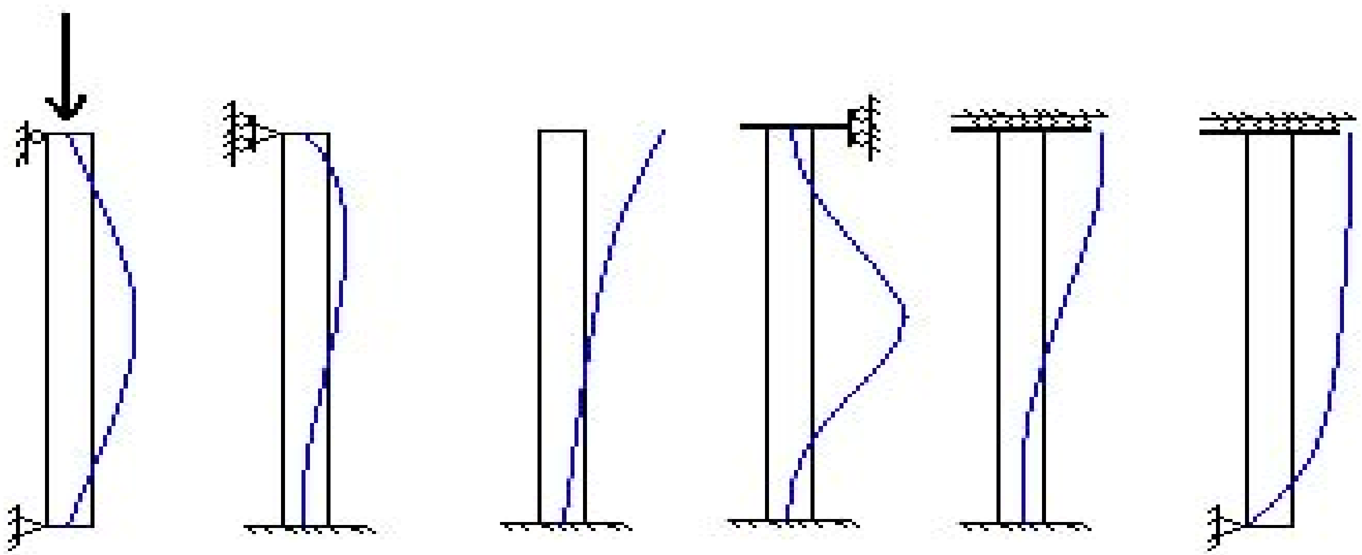
<u>לחיצה קריטית</u>:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2\cdot E\cdot I}{\left(c\cdot L\right)^2}$$

כאשר

$$c\cdot L=c_{eff}$$

<u>קריסת אויילר בתנאי שפה שונים</u>:



סמך פשוט- מדריך **(F)** **C=2**	ריתום-מדריך **(E)** **C=1**	ריתום- ריתום **(D)** **C=0.5**	ריתום-חופשי **(B)** **C=2**	ריתום- סמך פשוט **(B)** **C=0.7**	סמך פשוט- סמך פשוט **(A)** **C=1**

<u>הערה</u>:

עבור שילוב של כוח צירי ופילוג כוחות ניתן לבצע סופרפוזיציה אך ורק אם מתקיים $p\ll p_{cr}$

<u>בהצלחה!!</u>