דף נוסחאות בעקרונות בהנדסה כימית 1מ'

מאמץ גזירה: $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{YX} & \sigma_{YY} & \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} & \tau_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{pmatrix}$, כאשר σ מסמל מאמץ נורמלי ו- τ מסמל מאמץ משיקי ומוגדר ע"י: $\tau_{xy} = \lim_{dA_x \to 0} \frac{df_y}{dA_x}$

חוק פסקל: מאמצים נורמלים בפלואיד נייח אינם תלויים בכיוון ולכן מוגדר גודל סקלרי- **לחץ**. בפלואיד זורם ישנם גם מאמצי גזירה, ולכן לא בהכרח $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$.

נוזל ניוטוני: כל נוזל המקיים $\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$ כאשר $\underline{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$.

סטטיקה של פלואיד: $d\vec{F} = dF_s + dF_b = (\rho g - \nabla p)dV$ $\quad \rho \frac{\vec{g}}{g_c} - \nabla p = 0$ כאשר ישנה תאוצה במערכת: $\rho \frac{\vec{g} - \vec{a}}{g_c} - \nabla p = 0$.

מאינטגרציה על הנוסחה הראשונה מקבלים: $p = p_0 + \rho g h$. **כח עילוי:** $F_b = \rho v \frac{\vec{g}}{g_c}$

הגדרה של צפיפות יחסית:
$$SG = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$$

נגזרת חומרית: $$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

קינמטיקה של פלואיד: ישנן שתי שיטות לאנליזה: לה-גראנג'ית ואוילרית.

	לה-גראנג'ית	**אוילרית**
<u>שיטה</u>	אנו זורמים עם הזרם, לכן הקוארדינטות x,y,z הן תלויות בזמן.	x,y,z הם קבועים ואנו מסתכלים על אותה נק' כל הזמן.
<u>מהירות</u>	$v_{(x,t)} = a\left(x_0 + \frac{v_0}{a} + \frac{b}{a^2}\right)e^{At} - \frac{b}{a}$	$v_{(x,t)} = v_0 + ax + bt$
<u>מיקום</u>	$x_{(t)} = ce^{at} - v_0 - \frac{bt}{a} - \frac{b}{a^2}$ כדי למצוא תנאי התחלה מציבים t=0 .	קבוע

קווי מסלול- מסלול שחלקיק קטן של פלואיד מתאר במרחב לאורך זמן.

קו זרימה- קו שמשיק לשדה הזרימה המקומית הנתון בכל נק' במרחב. **אין זרימה דרך קווי זרימה.** משוואה עבור קווי זרימה: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$

אוסף של קווי זרימה נקרא נקרא **משטח זרימה.**

צינור קווי זרימה- אם קו התחלתי סגור, אוסף קווי הזרימה שעוברים דרך הקו יוצרים צינור קווי זרימה (כמו שטף שדה חשמלי)

קווי סימן- קו שמחבר את כל חלקיקי הפלואיד שעברו במקום מסויים.

במצב עמיד של זרימה קווי זרימה, קווי סימן וקווי מסלול מתאחדים לקו אחד.

מאזן מסה אינטגרלי- $$\frac{dm}{dt} = \iiint_{c.v.} \frac{\partial}{\partial t}\rho dv + \iint_{c.s.} \rho\left(\underline{v} \bullet \underline{n}\right) ds$$

מאזן מסה דיפרנציאלי- משוואת הרציפות: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\rho \underline{v}\right) = 0$ בקורדינטות קרטזיות: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho V_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho V_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho V_z\right)}{\partial z} = 0$

כאשר פלואיד לא דחיס נקבל ממשואת הרציפות: $\nabla \bullet \underline{v} = 0$ בקורדינטות גליליות: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho r V_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho V_\theta\right) + \frac{\partial\left(\rho V_z\right)}{\partial z} = 0$

סוגי זרימה:

<u>טרנסלציה</u>- הזזה.

<u>רוטציה</u>- סיבוב של החלקיק $\underline{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ $\quad \underline{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \bar{v} = \frac{1}{2}\left[\hat{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$

<u>זרימה אי רוטציונית</u>- כאשר $\underline{\omega} = 0$

<u>ערבוליות</u>- $\underline{\zeta} = 2\underline{\omega} = \nabla \times \bar{v}$

במערכת גלילית: $\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}$ $\quad \zeta_r = 2\omega_r = \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$ $\quad \zeta_\theta = 2\omega_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}$

מהירות זוויתית:
$\vec{v}=\omega r$
$a=-\omega^2 r$

<u>דפורמציה</u>- עיוות $\dot{\gamma}=\dfrac{d\gamma}{dt}$

במערכת קרטזית: $\dot{\gamma}_{ij}=\dot{\gamma}_{ji}=\dfrac{\partial V_i}{\partial j}+\dfrac{\partial Vj}{\partial i}$

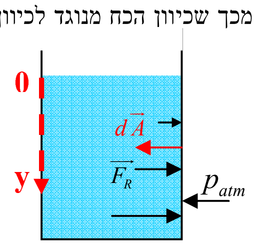
במערכת גלילית: $\dot{\gamma}_{rr}=2\dfrac{\partial v_r}{\partial r}$ $\dot{\gamma}_{\theta\theta}=2\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{v_r}{r}\right]$ $\dot{\gamma}_{zz}=2\dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

$$\dot{\gamma}_{r\theta}=\dot{\gamma}_{\theta r}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial Vr}{\partial\theta}\quad \dot{\gamma}_{\theta z}=\dot{\gamma}_{z\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+\frac{\partial V\theta}{\partial z}\quad \dot{\gamma}_{rz}=\dot{\gamma}_{zr}=\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial Vr}{\partial z}$$

במערכת כדורית: $\dot{\gamma}_{rr}=2\dfrac{\partial v_r}{\partial r}$ $\dot{\gamma}_{\theta\theta}=2\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{v_r}{r}\right]$ $\dot{\gamma}_{\phi\phi}=2\left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\dfrac{v_r}{r}+\dfrac{v_\theta\cot\theta}{r}\right]$

$$\dot{\gamma}_{r\theta}=\dot{\gamma}_{\theta r}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\quad \dot{\gamma}_{\phi\theta}=\dot{\gamma}_{\theta\phi}=\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\quad \dot{\gamma}_{\phi r}=\dot{\gamma}_{r\phi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)$$

<u>כוחות על גוף בתוך זורם:</u> הכח המופעל על הדופן תלוי בלחץ המים בנק' כלומר : $dF=-pdA$ סימן המינוס נובע מכך שכיוון הכח מנוגד לכיוון המשטח.



סכום הכוחות על הדופן הוא: $F_R=-\iint\limits_A pdA=-\iint\limits_A\left(p_0+\rho gy\right)dA=-p_0A-\rho g\boxed{\iint\limits_A ydA}$

האינטגרל המוקף בריבוע הוא מומנט ראשון של שטח. נגדיר צנטרואיד: $y_c=\dfrac{\iint ydA}{\iint dA}$ $\iint ydA=y_cA$

מכיוון שהלחץ עולה ככל שיורדים יותר, הלחץ על הדופן לא שווה בכל נק'. y_c היא נק' על ציר y, אשר הכח הפועל בה שווה לכח הממוצע הפועל על דופן הכלי. הנק' היא למעשה מרכז המסה של הנוזל, אם היא ידועה, נכפול את הכוח בנקודה זאת בשטח הדופן ונקבל את סכום הכח על הדופן F_R

<u>קו פעולה/ מרכז לחץ:</u> לאחר שהגענו לכמה כח עלינו להפעיל על הדופן כדי שהדופן לא תיפרץ, אנו צריכים למצוא את הנק' שבה יש להפעיל את הכח השקול. אם הוא לא יהיה במקום, יווצר מומנט סיבוב (כן, זה ממש ממש מגעיל...). נק' זו היא נק' מרכז הלחץ. נסמן אותה כוקטור: $\vec{r}'=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

כדי שלא יווצר מומנט סיבוב נדרוש: $r'\times F_R\vec{k}=\int\vec{r}\times d\vec{F}=-\int\limits_A\vec{r}\times pd\vec{A}$. הוקטור r הוא $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$, כלומר האינטגרל הוא הסכום של מומנט הסיבוב בכל נק'. הכח F_R הוא בכיוון $\vec{k}$, מכיוון שיש מכפלה וקטורית היינו צריכים לקבוע את כיוונו. לאחר כמה שלבים של המשוואה מקבלים:

מומנט בכיוון y: $F_Rx'=\iint\limits_A xpdA$ (1) מומנט בכיוון x: $F_Ry'=\iint\limits_A ypdA$ (2) להזכירכם: (x',y') הם הקורדינאטות של מרכז הלחץ. מכיוון שבחוץ ישנו לחץ אטמוספרי הפועל גם על הדופן, נתייחס רק ללחץ p_{gage}, כלומר $F_R=\rho\dfrac{g}{g_c}y_cA$ (האינטגרל הכפול הוחלף בצנטרואיד)

נציב את הכוח שקיבלנו במשוואות 1-2: $y'\rho\dfrac{g}{g_c}y_cA=\iint\limits_A ypdA=\iint\limits_A y\rho\dfrac{g}{g_c}ydA=\rho\dfrac{g}{g_c}\iint\limits_A y^2dA$ (הבאתי רק את משוואה 2, אני בטוח שתצליחו להסתדר עם 1). הביטוי שמקבלים: $y'=\dfrac{\iint y^2dA}{y_cA}=\dfrac{I_{xx}}{y_cA}$. I_{xx} הוא מומנט האינרציה של הגוף (מומנט שני של כח).

<u>הגדרות מתמטיות:</u>

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{du}}=\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{du}}\hat{\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}}\hat{\mathrm{j}}+\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{du}}\hat{\mathrm{k}}\qquad \underline{A}\times\underline{B}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\A_1&A_2&A_3\\B_1&B_2&B_3\end{vmatrix}=\left(A_2B_3-A_3B_2\right)\hat{i}-\left(A_1B_3-A_3B_1\right)\hat{j}+\left(A_1B_2-A_2B_1\right)\hat{k}$$

$$\nabla\cdot\underline{\mathrm{V}}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}}\hat{\mathrm{i}}+\frac{\partial}{\partial\mathrm{y}}\hat{\mathrm{j}}+\frac{\partial}{\partial\mathrm{z}}\hat{\mathrm{k}}\right)\left(\mathrm{V_1}\hat{\mathrm{i}}+\mathrm{V_2}\hat{\mathrm{j}}+\mathrm{V_3}\hat{\mathrm{k}}\right)=\left(\frac{\partial\mathrm{V_1}}{\partial\mathrm{x}}+\frac{\partial\mathrm{V_2}}{\partial\mathrm{y}}+\frac{\partial\mathrm{V_3}}{\partial\mathrm{z}}\right)\qquad \nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}}\hat{\mathrm{i}}+\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{y}}\hat{\mathrm{j}}+\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{z}}\hat{\mathrm{k}}\right)$$

התמרה למערכת כדורית:
$\mathrm{x}=\mathrm{r}\sin\theta\cos\phi\quad \mathrm{y}=\mathrm{r}\sin\theta\sin\phi\quad \mathrm{z}=\mathrm{r}\cos\theta$

התמרה למערכת גלילית:
$\mathrm{x}=\mathrm{r}\cos\theta\quad \mathrm{y}=\mathrm{r}\sin\theta\quad \mathrm{z}=\mathrm{z}$

התמרה למערכת קרטזית:
$e_r=\cos\theta e_x+\sin\theta e_y=\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{r}}\mathrm{e_x}+\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{r}}\mathrm{e_y}$ $\qquad e_\theta=-\sin\theta e_x+\cos\theta e_y=\dfrac{-y}{r}e_x+\dfrac{x}{r}e_y$