דף נוסחאות – מבלא"א

חובר ע"י אסף צידון ויאן מכלבסקי

מטריצת קוווריאנס:

1. איבריה הינם $r(k)$.
2. $r(k)$ יכול להיות שלילי.
3. אי-שוויון קושי שוורץ: $r(0) \geq |r(k)|$.
4. כל האלכסונים שווים (מטריצת טופליץ).
5. מטריצת הקווריאנס היא אי-שלילית מוגדרת, עבור וקטור α, $\alpha^T R_k \alpha \geq 0$.

צה"ס

6. תכונות: ממשית, סימטרית ב-w, מחזורית 2π ותמיד אי-שלילית.
7. משפט: אם סדרת אוטוקורלציה סכימה בהחלט (כלומר הסכום של הערכים המוחלטים מתכנס), אזי הצה"ס רציף.
8. משפט סגו-קולמוגורוב: מציאת הוריאנס של תהליך החידוש $\sigma_u^2 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log S_X(\omega)\, d\omega\right)$
9. עבור ת"א רגולריים נוסחת סגו-קולמוגורוב אומרת ששגיאת החיזוי היא הממוצע הגאומטרי של $S_X(\omega)$ על פני האינטרבל $[-\pi, \pi]$, מכאן ששגיאת החיזוי תמיד קטנה או שווה לוריאנס של התהליך. כלומר עבור ת"א רגולרי X מתקיים $\sigma_u^2 \leq \sigma_X^2$.

ארגודיות מסדר ראשון:

10. תהליך WSS יקרא ארגודי בממוצע ריבועי במומנט ראשון, אמ"מ: $\lim_{N\to\infty} E\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x[n] - \mu\right]^2 = 0$.
11. משפט Slutsky: תהליך WSS הוא ארגודי מסדר ראשון אמ"מ: $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M} r[k] = 0$.
12. מתוך משפט Slutsky, מתקבל שת"א WSS הוא ארגודי מסדר ראשון, אם: $r[0] < \infty$ וגם $\lim_{k\to\infty} r[k] = 0$.
13. תהליך WSS הוא ארגודי בסדר ראשון אמ"מ לספקטרום שלו אין קוטב בתדר 0.
14. תהליך אקראי WSS הוא ארגודי במומנט ראשון אמ"מ לצה"ס שלו אין דלתא בתדר 0. (המשפט הוכח באמצעות אי-התאפסות הקונבולוציה של גרעין דיריכלה עם הצה"ס כאשר ישנה דלתא ב-0, תרגול מס' 2).
15. תהליך רגולארי במובן החלש $\Leftarrow$ ארגודי מסדר ראשון (הוכחה: ת"א רגולרי נוצר ממעבר ר"ל דרך מסנן סיבתי ויציב ומהיציבות נובעת חסימות $|H(\omega)|$ ולכן אין בספקטרום קטבים על מעגל היחידה).
16. ארגודי מסדר ראשון $\not\Rightarrow$ תהליך רגולארי במובן החלש (דוגמא נגדית - $Y_n = A\cos(\omega n + \varphi)$, A, ω קבועים, $\varphi \sim U[0, 2\pi]$, הוא ארגודי מסדר ראשון אבל מכיל דלתא בספקטרום ולכן לא רגולארי חלש).
17. לסיכום: ארגודיות מסדר ראשון אומרת שהממוצע מתכנס לתוחלת. לפעמים יש תהליכים, כמו $Y_n = A\sin(\omega n + \varphi)$, כאשר A מ"א, שלמרות שמכילים בתוכם מ"א ולא ת"א, הם עדיין ארגודיים בגלל שהממוצע מתכנס לתוחלת בגלל החלק הסינוסי).

ארגודיות מסדר שני

18. תהליך WSS יקרא ארגודי מסדר שני אמ"מ:
$$\lim_{N\to\infty} E\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} \left(x[n]-\mu\right)\left(x[n-k]-\mu\right) - r_x[k]\right]^2 = 0.$$
19. עבור ת"א גאוסי WSS, הוא יהיה ארגודי מסדר שני אמ"מ: $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} r^2[k] = 0$.

דוגמאות לארגודיות

20. ת"א בינארי, תוחלת 0 – ארגודי מסדר ראשון ושני.
21. מ"א בינארי, תוחלת 0 – לא ארגודי מסדר ראשון, כן ארגודי מסדר שני.

22. $Ae^{j\omega n+j\phi}$ כאשר A מא"ג עם תוחלת 0, $\phi, \omega \neq 2\pi k$ הם קבועים. תהליך זה ארגודי במומנט הראשון ואינו ארגודי במומנט השני. נשים לב שתהליך זה גם אינו רגולארי, הוא נלח"ם חזק.

23. $A\cos(\omega_0 n)+B\sin(\omega_0 n)+U(n)$, כאשר U רל"ג, A,B מא"ג וכולם בת"ס. אם $\omega_0 \neq 2\pi k$, נקבל שהביטוי ארגודי מסדר ראשון אבל לא מסדר שני. אם $\omega_0 = 2\pi k$, אז הביטוי אינו ארגודי מסדר ראשון וגם אינו ארגודי מסדר שני.

AR

24. AR(P) הוא תהליך מהצורה (שים לב לסימן השלילי של המקדמים): $X_n = U_n - a_1 X_{n-1} - \ldots - a_p X_{n-p}$.

25. צה"ס של AR(P) היא: $S_x(\omega) = \dfrac{\sigma^2}{\left|1+a_1 e^{-j\omega}+\ldots+a_p e^{-j\omega p}\right|^2}$.

26. אוטוקורלציה של AR(1): $r_x[k] = \dfrac{(-a)^{|k|}\sigma^2}{1-a^2}$.

MA

27. MA(P) הוא תהליך מהצורה (שים לב שהפעם המקדמים עם סימן חיובי): $Z_n = U_n + b_1 U_{n-1} + \ldots + b_p U_{n-p}$.

28. אוטוקורלציה של MA(1): $r[k] = \begin{cases} (1+b^2)\sigma^2 & k=0 \\ b\cdot\sigma^2 & k=\pm 1 \\ 0 & else \end{cases}$.

תהליכים רגולריים

29. הגדרה: תהליך WSS נקרא רגולרי אם את הספקטרום שלו ניתן להציג בצורה חח"ע ע"י: $S(z) = \sigma_u^2 H(z) H(z^{-1})$
כאשר H(z) מערכת מינימום פאזה (כל הקטבים והאפסים בתוך מעגל היחידה) ובנוסף, $h(0) = \lim_{|z|\to\infty} H(z) = 1$.

30. הגדרה: תהליך רגולרי במובן החלש: ל-H(z) ייתכנו אפסים על מעגל היחידה.

31. עבור ת"א רגולרי החזאי הלינארי האופטימלי נתון ע"י $P(z) = 1 - \dfrac{1}{H(z)}$.

32. תנאי **Paley-Wiener**: הספק סופי ($\int_{-\pi}^{\pi} \left|\ln S(\omega)\right| d\omega < \infty$) הוא תנאי מספיק והכרחי לפירוק רגולרי.
כלומר: אם בצה"ס יש קטע רציף שמתאפס, הסיגנל לא רגולרי. אבל מותר להתאפס מספר בן-מניה של פעמים ובלבד שלא יהיה קטע רציף. כמובן שאותות מוגבלי סרט אינם ניתנים לפירוק רגולרי.

33. פירוק רגולארי – שתי שיטות:
    - אם יש לנו $S_x(\omega)$, עם מונה\מכנה מהצורה: $5-4\cos\omega = 5-2e^{j\omega}-2e^{-j\omega}$, אז קודם הופכים אותו לייצוג של z. לאחר מכן משווים אותו צורה הכללית הבאה: $5-2z^{-1}-2z = \sigma^2(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)$. מוצאים את σ^2, α, וכך מקבלים את הפירוק הרגולארי.
    - אם יש לנו מונה\מכנה מהצורה של: $(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha^* z^{-1})(1-\alpha z)(1-\alpha^* z)$, כאשר $\alpha, |\alpha|>1$ קומפלקסי, אז בשביל לקבל את הפירוק הרגולארי, צריך להוציא מכל מכפלה את הביטוי של z^{-1}, כלומר: $(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha^* z^{-1}) = \alpha z^{-1}\left(1-\dfrac{z}{\alpha}\right)\alpha^* z^{-1}\left(1-\dfrac{z}{\alpha^*}\right)$.

דוגמאות לתהליכים רגולריים

34. תהליכי ARMA הם רגולריים.

דגימה ושחזור

35. **תהליך מוגבל סרט** הוא תהליך בעל הספק סופי ($r(0)<\infty$). כלומר שהספקטרום שלו מתאפס לכל $|\omega|>B$. הערך הקטן ביותר של B שעבורו זה נכון נקרא רוחב הסרט של התהליך.
36. ניתן לשחזר את הקורלציה (מתוך דגימות של הקורלציה) של תהליך שאינו מוגבל סרט (אם הספקטרום שלו מוגבל סרט אז האוטוקורלציה חייבת להיות מוגבלת). לפי משפט Shannon.
37. משפט הדגימה:
לכל תהליך $x(t)$ בעל רוחב סרט B:

$T=\frac{\pi}{B}$ $\qquad$ $x(t_0+\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_0+nT)\frac{\sin B(\tau-nT)}{B(\tau-nT)}$. **השוויון הוא במובן שר"מ**.

38. משפט: בהינתן תהליך מוגבל סרט $x(t)$ בעל רוחב סרט B ו- $T_0<\frac{\pi}{B}$ ו- $\varepsilon>0$ קיים סט מקדמים $\{a_k\}$ כך שעבור N מספיק גדול $E\left[x(t)-\sum_{k=1}^{n}a_k x(t-kT_0)\right]^2<\varepsilon$.

שערוך לינארי אופטימאלי

39. שערוך ע"פ וקטור סופי של מדידות (שערוך וינר הוא על סמך וקטור אינסופי של מדידות).

$$\hat{x}=Hy+g$$

$$\hat{X}_n=\mu_{X,1*1}+\Gamma_{XY,1*N}\Gamma_{YY,N*N}^{-1}\left(Y_{N*1}-\mu_{Y,N*1}\right)$$

40.
$$M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

41. **משפט Cholesky:** כל מטריצה חיובית M ניתנת לפירוק יחיד כ: $M=LL^T$ כאשר L משולשת תחתונה ואיברי האלכסון של L חיוביים.
42. אם מאלצים את H להיות משולשת תחתונה (על מנת לקבל שערוך סיבתי): $x=Hy$ ומתוך עקרון האורתוגונליות מקבלים $\Gamma_{XY}-H\Gamma_{YY}=F$ כאשר F משולשת עליונה (אפסים באלכסון הראשי). אם נעביר אגף ונבצע פירוק Cholesky על Γ נקבל

$$H\Gamma_{yy}=\Gamma_{XY}-F$$

$$H\Gamma_{YY}^{+}\Gamma_{YY}^{-}=\Gamma_{XY}-F$$

נפעיל את אופרטור $\{\cdot\}_+$ ונקבל

$$H=\left\{\Gamma_{xy}\left(\Gamma_{yy}^{-}\right)^{-1}\right\}_+\left(\Gamma_{yy}^{+}\right)^{-1}$$

סינון וינר

43. מציאת מסנן לינארי אופטימלי ע"ס מספר אינסופי של מדידות עבור Y_n רגולרי.
44. מסנן וינר לא סיבתי: $H(z)=\frac{S_{YX}(z)}{S_{YY}(z)}$
45. מסנן וינר סיבתי: $H(z)=\frac{1}{S_Y^{+}(z)}\left\{\frac{S_{YX}(z)}{S_Y^{-}(z)}\right\}_+$
46. שגיאת השיערוך הינה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_\varepsilon(\omega)d\omega$
47. אם $Y(n)=X(n)+V(n)$, וגם $X(n),V(n)$ בת"ס, אזי מסנן וינר לשיערוך X מתוך Y הינו:
$\frac{S_X(\omega)}{S_X(\omega)+S_V(\omega)}$, וספקטרום שגיאת השיערוך הינו: $S_\varepsilon(\omega)=\frac{S_X(\omega)S_V(\omega)}{S_X(\omega)+S_V(\omega)}$

עקרון האורתוגונליות

48. משערך הוא אופטימלי לינארי אמ"מ הוא מקיים את שתי התכונות הבאות:
חוסר הטיה - $E[\hat{x}]=E[x]$ וניצבות לכל המדידות - $E\left[\left(x-\hat{x}\right)y_{1xN}^{T}\right]=0_{1xN}$

49. תכונה של כל סוג של משערך אופטימלי (לינארי, פרבולי וכו'): $E[x-\hat{x}]^2=E[x]^2-E[\hat{x}]^2$

50. נתון משערך אופטימלי (לאו דוקא לינארי) $\hat{x}$ ומשערך אחר (לא אופטימלי) x' אזי $E|x'-x|^2=E|\hat{x}-x|^2+E|x'-\hat{x}|^2$. (נובע מעקרון האורתוגונליות המוכלל).

חיזוי לינארי

51. **משוואות וינר-הופף:** מחפשים מקדמים שפותרים את $\hat{X}(n|n-1)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i X(n-i)$. הפתרון נתון ע"י

משוואות וינר-הופף $r_x(m)-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i r_x(m-i)=0$

52. שגיאת החיזוי היא רעש לבן – נכון לכל חזאי לינארי, לא רק לחזאי שאינו רגולארי.

53. עבור **ת"א רגולרי**: החזאי הלינארי נתון ע"י $P(z)=1-\dfrac{1}{H(z)}$. מסנן הרעש הוא $\varepsilon(z)=1-P(z)$.

54. שגיאת החיזוי להתהליך רגולרי היא σ_u^2. שגיאת החיזוי לתהליך רגולרי חלש היא $\sigma_u^2+\varepsilon$.

55. ל- $\varepsilon(z)$ אין אפסים מחוץ למעגל היחידה (שיעורי בית 3, שאלה 2). תכונה זו נשמרת תמיד (לא רק לתהליכים רגולאריים).

56. אם תהליך אקראי רגולארי מקיים $r_x(2k+1)=0$, אזי החזאי הלינארי שלו יהיה מהצורה -
$\hat{x}(n|n-1)=a_2(n-2)+a_4(n-4)+\ldots$.

57. אם נתון A מ"א ו-X ת"א WSS (לאו דווקא רגולארי), שגיאת החיזוי של החזאי הלינארי תהיה גבוהה פי var(A) משגיאת החיזוי של חיזוי X בלבד. הוכחה באמצעות סגו-קולמוגורוב (ש.ב. 4 שאלה 4).

נלחם חלש

58. תהליך נלח"ם במובן החלש הוא תהליך WSS X_n עבורו קיימת סדרת חזאים $\left\{\hat{X}_n^k=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^k X_{n-i}\right\}_{k=1}^{\infty}$ כך שהשגיאה שואפת ל-0 ככל ש-k גדל.

59. זה לא אומר שקיים חיזוי עם שגיאה 0.

60. לכל ε קיים חזאי עם שגיאה ε.

61. תכונה: עבור ת"א WSS ממשי וחסום תדר b מתקיים $E\left[x(t)-x(t+\tau)\right]^2\le b^2\tau^2\cdot Var(x)$

62. משפט: ת"א WSS נלח"ם במובן החלש אמ"מ הצה"ס מתאפס על פני קטע רציף. σ_u^2 מנוסחת סגו-קולמוגורוב מתאפס.

63. משפט: ת"א WSS הוא נלח"ם במובן החלש אמ"מ $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log S_X(\omega)\right|d\omega=\infty$ (תנאי Paley-Wiener).

64. תהליך מוגבל-סרט ← נלח"ם חלש. היפך אינו בהכרח נכון.

65. רעש לבן **אינו** תהליך נלח"ם חלש.

66. כאשר $Y(n)=X(n)+Z(n)$, X רגולארי, Z נלח"ם חלש, לאו דווקא נקבל חזאי לינארי שייתן לנו שגיאה של σ_u^2, כאשר u הרעש היוצר של X. ניתן להוכיח זאת בשלילה באמצעות סגו-קולמוגורוב (שיעורי בית 4, שאלה 3).

נלח"ם חזק

67. הגדרה: ת"א נקרא נלח"ם במובן החזק אם $\left\{\hat{X}_n^k=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^k X_{n-i}\right\}_{k=1}^{\infty}$ בהסתברות 1.

68. ת"א WSS הוא נלח"ם חזק אמ"מ הוא נתון ע"י $X_n=\sum A_i e^{j\omega_i n}$. כלומר אמ"ם הוא סכום בן-מניה של סינוסים עם עוצמות ופאזות אקראיות.

משפט וולד

69. כל ת"א WSS שאינו נלה"ם (אפילו לא במובן החלש) ניתן לרישום כ: $X_n = R_n + P_n$ (סכום של רגולרי חלש ונלה"ם חזק).
70. **מתכון לחיזוי:**
   - לזהות את פירוק וולד.
   - לבנות חזאי לחלק הנלה"ם ע"פ העבר שלו.
   - לבנות אינסוף חזאים שונים ל-P(n) ע"ס עברו.
   - מיצוע של כל החזאים האלו כאשר מופעל על X(n) יאפס את החלק הרגולרי.
   - נחשב את החזאי לחלק הרגולרי ע"פ $\forall k: \hat{R}_{n-k} = X_{n-k} - \hat{P}_{n-k}$.
   - נשתמש בחזאי האופטימלי לחלק הרגולרי $P(z) = 1 - \dfrac{1}{H(z)}$.
   - $\hat{X}(n \mid n-1) = \hat{R}(n \mid n-1) + \hat{P}(n \mid n-1)$
71. מסקנה: שגיאת החיזוי של כל תהליך היא השגיאה של החלק הרגולרי או שונות הר"ל של התהליך היוצר שלו.

מדד שגיאה hit-or-miss

72. $$f(x-\hat{x}) = \begin{cases} 0 & \|x-\hat{x}\| < \delta \\ 1 & \|x-\hat{x}\| \ge \delta \end{cases}$$
73. המשערך האופטימלי הוא $\hat{x}(y) = \arg\max_x \int_{\hat{x}-\delta}^{\hat{x}+\delta} p(x \mid y)\,dx$.
74. כאשר $\delta \to 0$ (המקרה הבדיד) המשערך הופך ל: $\hat{x} = \arg\max_x p(x \mid y)$

דף נוסחאות – מבלא"א – חלק ב'

שערוך פרמטרים דטרמיניסטיים

75. משערך נקרא קביל אם אין אף משערך אחר ששולט עליו.
76. משערך יעיל הינו חסר הטיה.
77. **סדרת משערכים עקבית:** $\forall \theta: \lim_{N\to\infty} E\left[\left(\hat{\theta}_N - \theta\right)\left(\hat{\theta}_N - \theta\right)^T\right] = 0$.
78. משערך יעיל אסימפטוטית הנו גם עקבי.
79. משערך עקבי הנו חסר הטיה אסימפטוטית.
80. MSE ניתן לכתיבה כסכום של הטיה ושונות $MSE = \left|b(\theta)\right|^2 + Var(\theta)$,
$$b(\theta) = E\left(\hat{\theta} - \theta\right)$$
$$Var(\theta) = E\left(\left|\hat{\theta} - E\left(\hat{\theta}\right)\right|^2\right)$$
81. משערך חסר הטיה: $b(\theta) = 0$, $MSE = Var(\theta)$.
82. UMVU – Uniformly Minimum Variance Unbiased

אינפורמציית פישר

83. האינפורמציה אדיטיבית עבור מ"א בת"ס. לא רגישה לסימן השינוי ב-θ. גודל דטרמיניסטי.
84. האינפורמציה של פישר: $I(\theta) = E\left[\dfrac{\partial \ln f(y;\theta)}{\partial \theta}\right]^2 = -E\left[\dfrac{\partial^2 \ln f(y;\theta)}{\partial \theta^2}\right]$ השוויון מתקיים בתנאי שניתן להחליף את סדר האינטגרל והניגזרת – תנאי רגולריות. אם גבולות האינטגרל היו תלויים ב-θ (למשל בפילוג אחיד) השוויון לא היה נכון.
85. האינפורמציה תלויה ביחידות של θ.

חסם קרמר-ראו (CR)

86. לכל משערך בלתי-מוטה $E\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 \ge \dfrac{1}{I(\theta)}$. לא אומר שזה ה-MSE הכי טוב, אם משתמשים במשערך מוטה ייתכן ואפשר לקבל MSE יותר טוב. משערך שמשיג חסם זה (כלומר זה ה-MSE שלו) נקרא "יעיל".

87. אם משערך משיג את חסם קרמר-ראו והוא חסר הטיה אזי הוא UMVU.
88. זה לא אומר שמשערך UMVU משיג את חסם קרמר-ראו.
89. מתקיים שוויון בחסם CR אמ"מ $\forall\theta:\frac{\partial\ln f(y;\theta)}{\partial\theta}=I(\theta)\left(\hat{\theta}-\theta\right)=I(\theta)\left(h(y)-\theta\right)$
90. חסם CR עבור משערך מוטה: החסם הוא רק על הווריאנס $Var\hat{\theta}\geq\frac{\left(1+\frac{\partial b(\theta)}{\partial\theta}\right)^2}{I(\theta)}$,

$$E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\geq\frac{\left[1+\frac{\partial b(\theta)}{\partial\theta}\right]^2}{I(\theta)}+b^2(\theta)$$

חסם קרמר-ראו ווקטורי

91. במקרה הווקטורי: $I_{i,j}(\theta)=E\left[\frac{\partial\ln f(y;\theta)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial\ln f(y;\theta)}{\partial\theta_j}\right]=-E\left[\frac{\partial^2\ln f(y;\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]$
92. נוסחא למקרה הגאוסי $y\sim N\left(\mu(\theta),C(\theta)\right)$:

$$I_{i,j}=\left[\frac{\partial\mu}{\partial\theta_i}\right]^T C^{-1}(\theta)\left[\frac{\partial\mu}{\partial\theta_j}\right]+\frac{1}{2}tr\left[C^{-1}(\theta)\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_i}C^{-1}(\theta)\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_j}\right]$$

Maximum Likelihood

93. $E\left(\hat{\theta}_{ML}\right)\to\theta$, $Var\left(\hat{\theta}_{ML}\right)\to CRLB$ בדר"כ משיג אסימפטוטית את חסם קרמר-ראו
94. עבור המקרה $y=H\cdot\theta+w,w\sim N(0,C)$ משערך ML הוא $\hat{\theta}_{ML}=\left(H^TC^{-1}H\right)^{-1}H^TC^{-1}y$
95. משפט: אם קיים משערך יעיל אז הוא אופטימלי במובן ML.

ריבועים פחותים – Least-Squares

96. **משפט גאוס-מרקוב:** במודל לינארי, מבין כל המשערכים חסרי ההטיה, המשערך שמביא למינימום את ה-MSE הינו משערך ה-WLS עם $W=C^{-1}$. במקרה של רעש גאוסי המשערך הוא UMVU מבין כל המשערכים (לא רק הלינאריים).

Best Linear Unbiased Estimator – BLUE

97. BLUE הוא המשערך שמביא למינימום את ה-MSE מבין כל המשערכים הלינאריים חסרי ההטיה.
98. משערך BLUE: $\hat{\theta}_{BLUE}=\left(H^*C^{-1}H\right)^{-1}H^*C^{-1}\vec{x}$
99. שגיאת MSE של משערך BLUE: $MSE\left(\hat{\theta}_{BLUE}\right)=Trace\left\{\left(H^*C^{-1}H\right)^{-1}\right\}$
100. BLUE עם רעש לבן: $\hat{\theta}_{BLUE}=\left(H^TH\right)^{-1}H^Ty$

שיטת המומנטים

101. כאשר $M_k=g(\theta)$ פונק' חלקה והפיכה אזי משערך המומנטים הנו חסר הטיה אסימפטוטית, עקבי, אך **לא בהכרח** יעיל.
102. מומנט מסדר 1: $\hat{M}_1=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$
103. מומנט מסדר שני: $\hat{M}_2=\hat{r}(k)=\frac{1}{N}\sum_{i=k+1}^{N}y_iy_{i-k}$
104. דוגמא: MA $y_i=w_i+\theta w_{i-1}$. W ר"ל גאוסי עם תוחלת 0 ושונות 1.

$$r(0)=1+\theta^2,r(1)=\theta\Rightarrow\hat{\theta}=\hat{r}(1)$$

$$\hat{\theta}_0=\pm\sqrt{\hat{r}(0)-1}$$

סטטיסטי מספיק

105.נתונות מדידות $y \sim f\left(\vec{y};\theta\right)$ T סטטיסטי משספיק אם $f(\vec{y} \mid T=t;\theta)$ לא תלוי ב- θ.

106.משפט Rao-Blackwell: נתון $y \sim f\left(y;\theta\right)$ ונתון $T=T\left(y\right)$ סטטיסטי מספיק. נתון משערך $\hat{\theta}_1\left(y\right)$.
נגדיר את המשערך $\hat{\theta}_2\left(t\right)=E\left[\hat{\theta}_1\left(y\right) \mid T=t\right]$ אזי $\forall\theta: MSE\left(\hat{\theta}_2\left(t\right)\right)<MSE\left(\hat{\theta}_1\left(y\right)\right)$ אלא אם $\hat{\theta}_2\left(t\right)=\hat{\theta}_1\left(y\right)$ בהסתברות 1.

כללי

107.תוחלת μ ושונות σ: $f\left(y\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\mu\right)^2}$

108.צפיפות גאוסית: (תוחלת 0) $f\left(y\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{N/2}\left|C\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}y^T C^{-1} y}$