אותות אקראיים

044202

סיכום הקורס

עדכון אחרון : 12/10/2009

תוכן עניינים

חזרה על הסתברות

חוקי דה-מורגן :

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^C \qquad \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^C = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^C$$

<u>הגדרה – הסתברות מותנית</u>

$$\mathbb{P}\{A \mid B\} \triangleq \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}}$$

נוסחת בייס ($Bayes$) :

$$\mathbb{P}\{A \mid B\} = \mathbb{P}\{B \mid A\}\frac{\mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{B\}}$$

נוסחת ההסתברות הכוללת :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \Omega \ \Rightarrow \ \mathbb{P}\{A\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{A \mid B_n\}\mathbb{P}\{B_n\}$$

<u>הגדרה – חוסר תלות סטטיסטית</u>

מאורעות A, B יקראו בת״ס (בלתי-תלויים סטטיסטית) כאשר :

$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}$$

משתנים אקראיים בדידים מוכרים :

כינוי ; הסבר	סימון	פונקצית הסתברות	תוחלת (μ)	שונות (σ^2)	הערות
ברנולי ; הצלחה בניסוי	$Bern(p)$	$\begin{cases} p, & n=1 \\ q, & n=0 \end{cases}$	p	pq	$q \triangleq 1-p$
בינומי ; k הצלחות מתוך n ניסויים	$Bin(n,p)$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $k = 0,1,2,\ldots,n$	np	npq	כאשר n גדול, ו p קטן אזי ניתן לקרב $Bin(n,p) \approx Pois(np)$
גיאומטרית ; k כשלונות עד הצלחה ראשונה בניסויים	$Geom(p)$	pq^{k-1} $k = 1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	
פואסונית	$Pois(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $k = 0,1,2,\ldots$	λ	λ	$Pois(\lambda_1) + Pois(\lambda_2)$ $= Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$
מולטי-נומית	$Mult(n,\vec{p})$	$\frac{n!}{x_1!\cdots x_n!}\prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i}$	$\mu_{X_i} = np_i$		

משתנים אקראיים רציפים מוכרים:

כינוי	סימון	פונקצית צפיפות	תוחלת (μ)	שונות (σ^2)	הערות
מעריכית	$Exp(\lambda)$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $\lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$m_k=\frac{k!}{\lambda^k}$
גאוסיאנית (נורמאלית) סטנדרטית	$N(0,1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$	0	1	$m_{2k}=(2k-1)!!$ $m_{2k+1}=0$
גאוסיאנית (נורמאלית) כללית	$N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ^2	עבור $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ו $Z\sim N(0,1)$ מתקיים: $P(X\le b)=P\left(Z\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$
אחידה	$U[a,b]$	$\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
גאמה	$Gamma(r,\lambda)$ $\Gamma(r,\lambda)$	$\frac{\lambda^r}{(r-1)!}x^{r-1}e^{-\lambda x}$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	r פעמים קונבולוציה של $Exp(\lambda)$ עם עצמו

משתנים אקראיים

פונקצית התפלגות:

$$F_X(x)\triangleq P(X\le x),\quad f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)$$

צפיפות של סכום משתנים אקראיים היא קונבולוציה בין הצפיפויות שלהם:

$$f_{X=U+V}(x)=f_U(u)*f_V(v)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f_U(u)f_V(x-u)\,du$$

תכונות:

$$\Gamma(r,\lambda)+\Gamma(s,\lambda)=\Gamma(r+s,\lambda)$$

$$Pois(\lambda_1)+Pois(\lambda_2)=Pois(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$Bin(n,p)+Bin(m,p)=Bin(n+m,p)$$

תכונת חוסר הזיכרון:

$$X\sim Geom(p)\ \Rightarrow\ P(X>n+k\mid X>n)=P(X>k)$$

$$X\sim Exp(\lambda)\ \Rightarrow\ P(X>s+t\mid X>t)=P(X>s)$$

התוחלת

<u>הגדרה – תוחלת</u>

תוחלת של משתנה אקראי בדיד

$$E[N]\triangleq\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\cdot p_N(n)$$

תוחלת של משתנה אקראי רציף

$$E[X]\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)\,dx$$

הרחבת המושג: תוחלת של פונקציה של משתנה:

עבור משתנה אקראי בדיד ופונקציה $f(x)$:

$$E\left[f(N)\right] \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot p_N(n)$$

עבור משתנה אקראי רציף ופונקציה $h(x)$:

$$E[h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_X(x)\,dx$$

<u>תכונות התוחלת ותוצאות נוספות</u>

1. ליניאריות: עבור a,b קבועים דטרמיניסטים:

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

2. נוסחת התוחלת הכוללת:

$$E[A] = E[A \mid B]P(B) + E\left[A \mid B^C\right]P\left(B^C\right)$$

3. משפט ההחלקה:

$$E[X] = E\left[E[X \mid Y]\right]$$

4. אם X,Y בלתי תלויים (או אפילו רק חסרי קורלציה), אז

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$$

5. לכל מ״א X:

$$E[X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{X < x\}\,dx = \int_0^{\infty} \left(1 - F_X(x)\right)dx$$

<u>הגדרה – מומנט</u>

$$m_k \triangleq E\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\,dx$$

מומנטים של $Z \sim N\left(0,\sigma^2\right)$:

$$E[Z^n] = \begin{cases} \sigma^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1), & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} = \begin{cases} \sigma^n \cdot n!!, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

<u>הגדרה – שונות</u>

$$\operatorname{var} X = \sigma_X^2 \triangleq E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right] = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2$$

תכונות השונות, כאשר c קבוע דטרמיניסטי (לא אקראי):

$$\operatorname{var}(c) = 0$$

$$\operatorname{var}(cX) = c^2 \operatorname{var} X$$

$$\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var} X + 2\operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{var} Y = \sigma_X^2 + 2\sigma_{XY} + \sigma_Y^2$$

<u>הגדרה – סטיית התקן</u>

$$\sigma_X \triangleq \sqrt{\operatorname{var} X}$$

<u>הגדרה – פונקציה יוצרת מומנטים (פונקציה אופיינית)</u>

$$M_X(s) \triangleq Ee^{sX} \quad \Rightarrow \quad M_X^{(k)}(0) = EX^k = m_k$$

אי שוויון צ׳בישב:

$$\mathbb{P}\left\{\left|X - \mu\right| > b\right\} \le \frac{\sigma^2}{b^2}, \qquad \mathbb{P}\left\{\left|X - \mu\right| > a\sigma\right\} \le \frac{1}{a^2}$$

אי שוויון ינסן:

$$E\left[h(X)\right] \ge h\left(E[X]\right)$$

וקטור אקראי

הגדרה – וקטור אקראי

וקטור אקראי ממימד n הוא וקטור אשר כל n רכיביו הם משתנים אקראיים, ומסומן:

$$\vec{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$$

מצפיפות משותפת של שני משתנים, ניתן לחשב את פונקצית הצפיפות השולית (של אחד המשתנים):

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

אי תלות קיימת אס"ם

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

אי תלות בין רכיבי וקטור (X,Y) לא יכולה להתקיים אם התמך של $f_{XY}(x,y)$ לא מלבני.

התפלגות מותנית:

$$f_{X|Y}(x \mid y) \triangleq \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \underset{Bayes}{=} f_{Y|X}(y \mid x)\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$$

נוסחת הצפיפות הכוללת:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y)\,dy$$

שונות בין שני משתנים אקראיים (קו-וריאנס):

$$\sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) \triangleq E\big[(X - E[X])(Y - E[Y])\big] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

תכונות הקווריאנס, עבור a,b קבועים דטרמיניסטים:

$$\operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{var} X = \sigma_X^2$$

$$\operatorname{cov}(X+a,Y) = \operatorname{cov}(X,Y)$$

$$\operatorname{cov}(aX+b,Y) = a\operatorname{cov}(X,Y)$$

קורלציה (מקדם המתאם):

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y},\ \left|\rho_{XY}\right| \le 1$$

תכונות:

$$\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$$

$$\rho_{aX,Y} = sign(a)\,\rho_{X,Y}$$

$$\rho_{X+c,Y} = \rho_{X,Y}$$

וקטור אקראי גאוסי

עבור וקטור אקראי גאוסי כללי $\vec{X}$, הצפיפות המשותפת היא

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = C\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big((\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^{T}\Big)\right\}$$

כאשר $\vec{\mu}$ הוא וקטור התוחלות, ו Σ מטריצת הקווריאנס (תמיד סימטרית).
ועבור מקרה פרטי של שלושה משתנים:

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = C\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-\mu_X & y-\mu_Y & z-\mu_Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ}\\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ}\\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_Z^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x-\mu_X\\ y-\mu_Y\\ z-\mu_Z\end{pmatrix}\right\}$$

בהינתן k מימד הוקטור $\vec{X}$, הקבוע C הוא

$$C = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k}|\Sigma|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{\mu}\Sigma^{-1}\mu^{T}\right\}$$

חזאים

החזאי (משערך) האופטמלי של Y בעזרת X (פונקציה של X):

$$\hat{Y}_{opt} = E[Y\mid X]$$

החזאי (משערך) הליניארי האופטמלי של Y בעזרת X (פונקציה ליניארית של X):

$$\hat{Y}_{opt}^{lin} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}(X-EX)+EY$$

במשפחה הגאוסית, משתנים בלתי מתואמים הם גם בלתי תלויים.
במשפחה הגאוסית, החזאי האופטמלי הוא החזאי הליניארי האופטמלי.

החוק החלש של המספרים הגדולים ($WLLN - Weak\ Law\ of\ Large\ Numbers$):

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_N$ משתנים אקראיים מפולגים באופן זהה ובת"ל ($IID - Independent\ Indentically\ Distributed$), בעלי תוחלת μ. נסמן $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, אזי לכל $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right\}=0$$

בעצם, חוק זה אומר כי אם נגדיר $X=\frac{S_n}{n}$, אזי $\lim_{n\to\infty} f_X(x) = \delta(x-\mu)$

משפט הגבול המרכזי ($CLT - Central\ Limit\ Theorem$):

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_N$ משתנים אקראיים מפולגים באופן זהה ובת"ל ($IID - Independent\ Indentically\ Distributed$), בעלי תוחלת μ ושונות σ^2. נסמן $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, אזי

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\le a\right\}=\Phi(a)$$

כאשר Φ פונקצית ההתפלגות של $N(0,1)$.

משתנים אקראיים ווקטורים אקראיים

הגדרות בסיסיות

ההגדרה הכללית של קווריאנס, בין שני וקטורים (אולי מנוונים, כלומר אחד מהם או שניהם אולי סקלר):

$$\operatorname{cov}(\underline{X},\underline{Y}) \triangleq E\left[(\underline{X}-E\underline{X})(\underline{Y}-E\underline{Y})^T\right]$$

קווריאנס בין משתנה אקראי X ווקטור אקראי $\underline{Y}=\left(Y_1,Y_2,...,Y_n\right)^T$:

$$\operatorname{cov}(X,\underline{Y}) \triangleq E\left[(X-EX)(\underline{Y}-E\underline{Y})^T\right] = E\left[(X-EX)\begin{pmatrix}Y_1-EY_1 & Y_2-EY_2 & \cdots & Y_n-EY_n\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname{cov}(Y_1,X) & \operatorname{cov}(Y_2,X) & \cdots & \operatorname{cov}(Y_n,X)\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cov}(\underline{Y},X) \triangleq E\left[(\underline{Y}-E\underline{Y})(X-EX)^T\right] = E\left[\begin{pmatrix}Y_1-EY_1\\ Y_2-EY_2\\ \vdots\\ Y_n-EY_n\end{pmatrix}(X-EX)\right] = \begin{pmatrix}\operatorname{cov}(Y_1,X)\\ \operatorname{cov}(Y_2,X)\\ \vdots\\ \operatorname{cov}(Y_n,X)\end{pmatrix}$$

קווריאנס בין וקטור אקראי $\underline{X}=\left(X_1,X_2,...,X_m\right)^T$ ווקטור אקראי $\underline{Y}=\left(Y_1,Y_2,...,Y_n\right)^T$:

$$\operatorname{cov}(\underline{X},\underline{Y}) \triangleq E\left[(\underline{X}-E\underline{X})(\underline{Y}-E\underline{Y})^T\right] = E\left[\begin{pmatrix}X_1-EX_1\\ X_2-EX_2\\ \vdots\\ X_m-EX_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_1-EY_1 & Y_2-EY_2 & \cdots & Y_n-EY_n\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}(X_1-EX_1)(Y_1-EY_1) & & \\ & & \\ & & (X_m-EX_m)(Y_n-EY_n)\end{pmatrix}_{m\times n}$$

מקדם קורלציה (מקדם מתאם) בין שני משתנים אקראיים X,Y :

$$\rho_{X,Y} \triangleq \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}X\operatorname{var}Y}}, \qquad |\rho|\le 1$$

מטריצת המומנטים מסדר שני של וקטור אקראי $\underline{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)^T$:

$$E\left[\underline{X}\cdot\underline{X}^T\right] = E\left[\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & \cdots & X_n\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}E\left[X_1^2\right] & E\left[X_1X_2\right] & \cdots & E\left[X_1X_n\right]\\ E\left[X_2X_1\right] & E\left[X_2^2\right] & \ddots & E\left[X_2X_n\right]\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ E\left[X_nX_1\right] & \cdots & \cdots & E\left[X_n^2\right]\end{pmatrix}$$

מטריצת הקוווריאנס $\underline{\underline{\Lambda}}_{\underline{X}}$ של וקטור אקראי $\underline{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)^T$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\underline{X},\underline{X}) &= \operatorname{var}\underline{X} \triangleq E\left[(\underline{X}-E\underline{X})(\underline{X}-E\underline{X})^T\right] \\
&= E\left[\begin{pmatrix} X_1-EX_1 \\ X_2-EX_2 \\ \vdots \\ X_n-EX_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_1-EX_1 & X_2-EX_2 & \cdots & X_n-EX_n \end{pmatrix}\right] \\
&= E\left[\begin{pmatrix} (X_1-EX_1)^2 & (X_1-EX_1)(X_2-EX_2) & \cdots & (X_1-EX_1)(X_n-EX_n) \\ (X_2-EX_2)(X_1-EX_1) & (X_2-EX_2)^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (X_n-EX_n)(X_1-EX_1) & \cdots & \cdots & (X_n-EX_n)^2 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} E\left[(X_1-EX_1)^2\right] & E\left[(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)\right] & \cdots & E\left[(X_1-EX_1)(X_n-EX_n)\right] \\ E\left[(X_2-EX_2)(X_1-EX_1)\right] & E\left[(X_2-EX_2)^2\right] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ E\left[(X_n-EX_n)(X_1-EX_1)\right] & \cdots & \cdots & E\left[(X_n-EX_n)^2\right] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \operatorname{var}X_1 & \operatorname{cov}(X_1,X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_n,X_n) \\ \operatorname{cov}(X_2,X_1) & \operatorname{var}X_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(X_n,X_1) & \cdots & \cdots & \operatorname{var}X_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

<u>הגדרה – אי תלות סטטיסטית</u>

משתנים אקראיים X,Y יקראו בת״ס (בלתי תלויים סטטיסטית) אס״ם אחד מהתנאים הבאים מתקיימים :

1. לכל α,β מתקיים $F_{X,Y}(\alpha,\beta)=F_X(\alpha)\cdot F_Y(\beta)$;
2. לכל $A,B\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}\{X\in A,Y\in B\}=\mathbb{P}\{X\in A\}\cdot\mathbb{P}\{Y\in B\}$;
3. לכל שתי פונקציות f,g מתקיים $E\left[f(X)\cdot g(Y)\right]=E\left[f(X)\cdot Eg(Y)\right]$.

<u>הגדרה – אי תלות ליניארית</u>

משתנים אקראיים X,Y יקראו בת״ל (בלתי תלויים ליניארית), או חסרי קורלציה כאשר :

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0$$

במקרה זה, גם מקדם הקורלציה יתאפס, כלומר $\rho_{X,Y}=0$.

<u>הגדרה – הסתברות מותנית</u>

הסתברות מותנית של מאורע A במאורע B , כאשר $\mathbb{P}\{B\}\neq 0$:

$$\mathbb{P}\{A\mid B\}\triangleq\frac{\mathbb{P}\{A\cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}}$$

נוסחת בייס (Bayes)

$$\mathbb{P}\{A \mid B\} = \mathbb{P}\{B \mid A\}\frac{\mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{B\}}$$

X	Y	נוסחת בייס המתאימה
רציף	רציף	$f_{X\mid Y}(x \mid y) = \frac{f_X(x)}{f_Y(y)} f_{Y\mid X}(y \mid x)$
בדיד	בדיד	$\mathbb{P}\{X = x \mid Y = y\} = \frac{\mathbb{P}\{X = x\}}{\mathbb{P}\{Y = y\}}\mathbb{P}\{Y = y \mid X = x\}$
בדיד	רציף	$\mathbb{P}\{X = x \mid Y = y\} = \frac{f_{Y\mid X}(y \mid x)}{f_Y(y)}\mathbb{P}\{X = x\}$

<u>הגדרה – התפלגות מותנית</u>

ההתפלגות המותנית של משתנה אקראי X בהנתן משתנה אקראי Y :

עבור Y בדיד:

$$F_{X\mid Y}(x \mid y) \triangleq \mathbb{P}\{X \le x \mid Y = y\} = \frac{\mathbb{P}\{X \le x, Y = y\}}{\mathbb{P}\{Y = y\}}$$

עבור Y רציף:

$$F_{X\mid Y}(x \mid y) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0^+}\mathbb{P}\{X \le x \mid y \le Y \le y + \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\frac{\mathbb{P}\{X \le x, y \le Y \le y + \varepsilon\}}{\mathbb{P}\{y \le Y \le y + \varepsilon\}}$$

<u>הגדרה – צפיפות מותנית</u>

אם קיימת פונקציה $f_{Y\mid X}(y \mid x) = \frac{\partial F}{\partial y}$ כך ש

$$F_{Y\mid X}(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y\mid X}(\theta \mid x)\,d\theta$$

אומרים ש- $f_{Y\mid X}(y \mid x)$ הינה הצפיפות המותנית של Y בהינתן X.

כמו כן, הפונקציה $f_{Y\mid X}(y \mid x)$ מקיימת את חוק בייס:

$$f_{Y\mid X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

<u>הגדרה – תוחלת מותנית</u>

אם קיים פילוג סגולי מותנה $f_{Y\mid X}(y \mid x)$ אזי באופן דומה להגדרת התוחלת:

$$E[Y \mid X = x] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y\mid X}(y \mid x)\,dy$$

<u>הגדרה – פונקצית האינדיקטור</u>

עבור המאורע A נגדיר

$$1_A \triangleq \begin{cases} 1, & \mathbb{P}\{A\} \\ 0, & 1 - \mathbb{P}\{A\} \end{cases}$$

ואז $E[1_A] = \mathbb{P}\{A\}$

<u>טענות</u>

1. לכל מאורע A ולכל מ"א X, מתקיים $E\left[1_A \mid X\right] = P\left\{A \mid X\right\}$
2. אם $Y = c$ (c קבוע דטרמיניסטי (לא אקראי)) אז $E\left[Y \mid X\right] = c,\ E\left[X \mid Y\right] = E\left[X\right]$.
3. לינאריות: אם a,b דטרמיניסטים אזי $E\left[aY + bZ \mid X\right] = aE\left[Y \mid X\right] + bE\left[Z \mid X\right]$.
4. אם Y,Z מ"א המקיימים $Z \geq Y$ אזי $E\left[Y \mid X = \beta\right] \geq E\left[Z \mid X = \beta\right]$.
5. $E\left[h(X) \mid X\right] = h(X)$.
6. אם g,h פונקציות כלשהן אזי $E\left[g(X)h(X,Y) \mid X\right] = g(X)E\left[h(X,Y) \mid X\right]$.
7. אם X,Y מ"א בת"ס אזי $E\left[Y \mid X\right] = E\left[Y\right]$.
8. משפט ההחלקה: $E\left[Y\right] = E\left[E\left[Y \mid X\right]\right]$.
9. משפט ההחלקה המוכלל: $E\left[X \mid Y\right] = E\left[E\left[X \mid Y,Z\right] \mid Y\right]$
10. $E\left[g(X)h(X,Y)\right] = E\left[E\left[g(X)h(X,Y) \mid X\right]\right] = E\left[g(X)E\left[h(X,Y) \mid X\right]\right]$
11. אם $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{n}$ מ"א iid, אזי

$$E\left[X_i \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = s\right] = \frac{s}{n}$$

<u>טרנספורמציה של משתנה אקראי</u>

יהי X מ"א עם פונקצית צפיפות $f_X(x)$ ופונקציה $g(t)$. אם $Y = g(X)$ אזי

$$f_Y(y) = \sum_{x:g(x)=y} \left.\frac{f_X(x)}{\left|g'(x)\right|}\right|_{x=g^{-1}(y)}$$

כאשר הסכימה היא על כל x המקיימים $g(x) = y$.

<u>טרנספורמציה של וקטור אקראי</u>

יהי וקטור אקראי (X,Y) ותהי הטרנספורמציה

$$(w,z) = \left(h(x,y), g(x,y)\right)$$

אזי מתקיים:

$$f_{Z,W}(z,w) = \sum_{(x,y):\begin{cases} z=g(x,y) \\ w=h(x,y)\end{cases}} \left.\frac{f_{X,Y}(x,y)}{|J|}\right|_{\substack{x=s(z,w) \\ y=t(z,w)}}$$

כאשר

1. קיימת הטרנספורמציה ההפוכה $(x,y) = \left(s(z,w), t(z,w)\right)$.
2. היעקוביאן הוא: $J(x,y) \triangleq \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial X} & \frac{\partial Z}{\partial Y} \\ \frac{\partial W}{\partial X} & \frac{\partial W}{\partial Y} \end{vmatrix}$

<u>הגדרה – פונקציה אופיינית של משתנה אקראי (פונקציה יוצרת מומנטים)</u>

יהי משתנה אקראי X, אזי הפונקציה האופיינית שלו היא

$$\varphi_X(t) \triangleq E\left[e^{jXt}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxt} f_X(x)\,dx$$

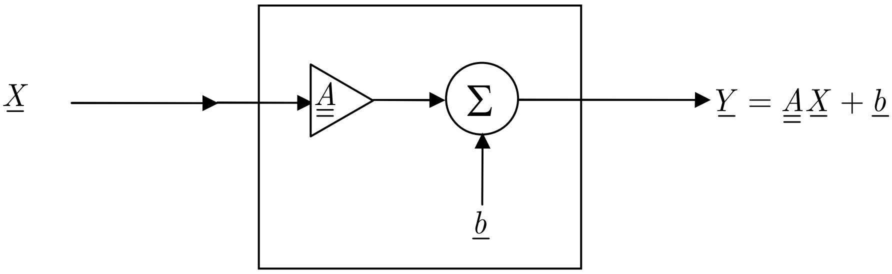
כאשר $j \triangleq \sqrt{-1}$.

נשים לב שהפונקציה האופיינית אינה אלא התמרת פורייה של פונקצית הצפיפות $f_X(x)$.

משתנה אקראי	פונקציה אופיינית
$X \sim Pois(\lambda)$	$\varphi_X(t) = e^{-\lambda\left(1-e^{jt}\right)}$
$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$	$\varphi_X(t) = e^{j\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

העתקות ליניאריות של ו"א

נביט במערכת הפשוטה הבאה:



התכונות המתקבלות של אות המוצא

תכונה	יציאה	כניסה
תוחלת	$E\underline{Y}=\underline{\underline{A}}E\underline{X}+\underline{b}$	$E\underline{X}$
שונות	$\underline{\underline{\Lambda}}_{Y}=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\Lambda}}_{X}\underline{\underline{A}}^{T}$	$\underline{\underline{\Lambda}}_{X}$
מומנט שני	$E\left[\underline{Y}\,\underline{Y}^{T}\right]=\underline{\underline{A}}E\left[\underline{X}\,\underline{X}^{T}\right]\underline{\underline{A}}^{T}+\underline{\underline{A}}(E\underline{X})\,\underline{b}^{T}+\underline{b}\left(E\underline{X}^{T}\right)\underline{\underline{A}}^{T}+\underline{b}\,\underline{b}^{T}$	$E\left[\underline{X}\,\underline{X}^{T}\right]$
פונקציה אופיינית	$\underline{b}=0 \;\Rightarrow\; \varphi_{\underline{Y}}(\nu)=\varphi_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{A}}^{T}\underline{\nu}\right)$	$\varphi_{\underline{X}}(\underline{\nu})$

<u>טענות</u>

1. מטריצה סימטרית $\underline{\underline{C}}$ תקרא אי-שלילית מוגדרת אם לכל $\underline{x}$ מתקיים $\underline{x}^{T}\underline{\underline{C}}\,\underline{x}\geq 0$.
2. למטריצה $\underline{\underline{C}}\geq 0$ יש פירוק לע"ע לפי: $\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{U}}^{T}$, כאשר $\underline{\underline{\Lambda}}$ מטריצת הע"ע האלכסונית ו $\underline{\underline{U}}$ המטריצה היוניטרית המלכסת, המקיימת $\underline{\underline{U}}^{-1}=\underline{\underline{U}}^{T}$.

הלבנה (De-correlation)

יהי וקטור אקראי $\underline{Y}$ בעל מטריצת קווריאנס $\underline{\underline{\Lambda}}_{\underline{Y}}$. נחפש מטריצה דטרמיניסטית $\underline{\underline{A}}$ כך שאברי $\underline{X}=\underline{\underline{A}}\,\underline{Y}$ יהיו חסרי קורלציה, כלומר מטריצת הקוריאנס של $\underline{X}$ תקיים $\underline{\underline{\Lambda}}_{\underline{X}}=I$.

הפתרון המתקבל הוא

$$\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{U}}^{T}$$

כאשר $\underline{\underline{U}}$ המטריצה היוניטרית המלכסנת את $\underline{\underline{\Lambda}}_{\underline{Y}}$.

וקטורים אקראיים גאוסיים

ראשית, כמה תוצאות מעניינות עבור מ״א גאוסים.

אם $X \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ אזי

$$E\left[X^n\right]=\begin{cases}\sigma^n\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1), & n=2k\\ 0, & n=2k+1\end{cases}=\begin{cases}\sigma^n\cdot n!!, & n=2k\\ 0, & n=2k+1\end{cases}$$

אם $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ אזי

$$EX^4=3\left(EX^2\right)^2$$

עבור 4 משתנים גאוסים X,Y,Z,W בעלי תוחלת 0 :

$$E[XYZW]=E[XY]E[ZW]+E[XZ]E[YW]+E[XW]E[YZ]$$

<u>הגדרה – וקטור אקראי גאוסי (וא״ג)</u>

וקטור אקראי $\underline{X}=\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)^T$ שהפונקציה האופיינית שלו היא מהצורה

$$\varphi_{\underline{X}}\left(\underline{\nu}\right)=e^{j\underline{\mu}^T\underline{\nu}-\frac{1}{2}\underline{\nu}^T\underline{\underline{\Lambda}}\underline{\nu}}$$

ייקרא וקטור אקראי גאוסי, כאשר $\underline{\underline{\Lambda}}=\operatorname{var}\underline{X}_{n\times n}$, $\underline{\mu}=E\underline{X}_{n\times 1}$.

נאמר כי $X_1,X_2,\ldots,X_n$ הם גאוסים במשותף.

אם $\underline{\underline{\Lambda}}$ לא סינגולרית ממימד $n\times n$ אז

$$f_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\left|\underline{\underline{\Lambda}}\right|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)^T\underline{\underline{\Lambda}}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)\right\}$$

נסמן את הוקטור האקראי הגאוסי כך :

$$\underline{X}\sim N\left(\underline{\mu},\underline{\underline{\Lambda}}\right)$$

<u>טענות</u>

1. ו״א $\underline{X}=\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)^T$ הוא וא״ג אמ״ם כל צירוף של איבריו הוא משתנה אקראי גאוסי.
2. כל צירוף ליניארי של רכיבי וא״ג הוא משתנה אקראי גאוסי.
3. אם $\underline{Y}=\begin{pmatrix}\underline{X}_1\\ \underline{X}_2\end{pmatrix}$ וא״ג, אזי חוק הפילוג המותנה של $\underline{X}_1$ בהינתן $\underline{X}_2$ הוא בעצמו גאוסי.
4. כל צירוף ליניארי של וא״ג הוא גם וא״ג. כלומר אם $\underline{X}$ וא״ג אזי גם $\underline{Y}=\underline{\underline{A}}\underline{X}+\underline{b}$ וא״ג, כאשר $\underline{\underline{A}},\underline{b}$ דטרמיניסטים.
5. נניח ש- $\underline{X}$ וא״ג שרכיביו בת״ל בזוגות.
   לפיכך מתקיים $\forall n\neq k:\quad Cov(X_n,X_k)=0$ ולכן המטריצה $\underline{\underline{\Lambda}}$ תהיה אלכסונית. ונקבל
   $$\varphi_{\underline{X}}(\underline{\nu})=\exp\left\{j\sum_{n=1}^{N}m_n\nu_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\nu_n\lambda_{nk}\nu_k\right\}=\exp\left\{j\sum_{n=1}^{N}m_n\nu_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\nu_n^2\lambda_{nn}\right\}=$$
   $$=\prod_{n=1}^{N}\exp\left\{jm_n\nu_n-\frac{1}{2}\nu_n^2\lambda_{nn}\right\}=\prod_{n=1}^{N}\varphi_{X_n}\left(\nu_n\right)$$
   מסקנה : עבור משתנים גאוסים במשותף, אי תלות לינארית שקולה לאי תלות סטטיסטית.
6. אם $\underline{X}$ וא״ג ו- $\underline{Y}=\underline{\underline{A}}\underline{X}$ ניתן לקבל ע״י העתקה לינארית $\underline{Z}=\underline{\underline{D}}\underline{Y}$, וא״ג שרכיביו ב״ת (הלבנה).
   המטריצה $\underline{\underline{D}}$ היא מטריצה מלכסנת של $\underline{\underline{\Lambda}}_Y$ כלומר, $\underline{\underline{\Lambda}}_z=\underline{\underline{D}}\underline{\underline{\Lambda}}_Y\underline{\underline{D}}^t$ אלכסונית.
7. אם X,Y גאוסים במשותף, אזי $Var\left(X\mid Y\right)=c$, כלומר קבוע.
8. צירוף ליניארי של משתנים אקראיים גאוסיים הינה משתנה אקראי גאוסי רק כאשר המשתנים בת״ס
9. אם רכיביו של ו״א הינם כולם מ״א גאוסים והם בת״ס, אזי זהו וא״ג. כלומר, n מ״א גאוסים בת״ס הם גאוסים במשותף. נזכיר כי מ״א גאוסים במשותף אינם חייבים להיות בת״ס.

שערוך

שערוך אופטימלי

יהי Y משתנה אקראי. נבצע n מדידות אקראיות ונשים תוצאות אלו בוקטור אקראי $\underline{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)^T$.
ממדידות אלו נשערך את Y.

אם משערך כללי כלשהו הוא $\varphi\left(\underline{X}\right)$, אזי שגיאת השערוך היא

$$\varepsilon = Y-\varphi\left(\underline{X}\right)$$

והשגיאה הריבועית הממוצעת היא

$$E\left[\varepsilon^2\right]=E\left[\left(Y-\varphi\left(\underline{X}\right)\right)^2\right]$$

אנו נחפש משערך אופטימלי כזה שיביא למינימום את השגיאה הריבועית הממוצעת.

מסתבר שלא מסובך למצוא משערך כזה, נסמן אותו $\hat{Y}$ או $\hat{Y}_{opt}$, והוא נתון ע"י הביטוי:

$$\hat{Y}=\hat{Y}_{opt}=E\left[Y\mid\underline{X}\right]$$

שערוך ליניארי

בד"כ קשה לחשב את המשערך האופטימלי, ולכן אנו מסתפקים בחישוב משערך ליניארי (אנו עדיין מעוניינים לשערך את המשתנה האקראי Y מתוך n מדידות הנמצאות בוקטור האקראי $\underline{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)^T$). המערך הליניארי האופטימלי הוא המשערך הליניארי, כלומר מהצורה $b+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$ המביא למינימום את שגיאת השערוך הריבועית

$$E\left[\varepsilon^2\right]=E\left[\left(Y-\varphi_{opt}^{lin}\left(\underline{X}\right)\right)^2\right]$$

המשערך הליניארי האופטימלי נתון ע"י:

$$\hat{Y}_{opt}^{lin}=EY+\operatorname{cov}\left(Y,\underline{X}\right)_{1\times n}\cdot\underline{\underline{\Lambda}}_{\underline{X}}^{-1}\cdot\left(\underline{X}-E\underline{X}\right)_{n\times 1}$$

כאשר

$$\operatorname{cov}\left(Y,\underline{X}\right)=\begin{pmatrix}\operatorname{cov}\left(Y,X_1\right) & \cdots & \cdots & \operatorname{cov}\left(Y,X_n\right)\end{pmatrix}_{1\times n}$$

ומטריצת הקוואריאנס של וקטור $\underline{X}$ היא:

$$\underline{\underline{\Lambda}}_{\underline{X}}=\operatorname{var}\left(\underline{X}\right)\triangleq\begin{pmatrix}\sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1,X_2} & \cdots & \sigma_{X_1,X_n}\\ \sigma_{X_2,X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{X_n,X_1} & \cdots & \cdots & \sigma_{X_n}^2\end{pmatrix}_{n\times n}$$

אם מתקבלת מטריצה $\underline{\underline{\Lambda}}_{\underline{X}}$ סינגולרית, אזי ישנה תלות בין המדידות ולכן ניתן לשערך ללא המדידות התלויות במדידות אחרות.

נזכיר כי במקרה הסקלרי, המשערך האופטימלי של המשתנה האקראי Y בהינתן המשתנה האקראי X הינו

$$\hat{Y}_{opt}=E\left[Y\mid X\right]$$

והמשערך הלינארי האופטימלי נתון ע"י הנוסחה הפשוטה:

$$\hat{Y}_{opt}^{lin}=EY+\frac{\operatorname{cov}\left(Y,X\right)}{\operatorname{var}X}\left(X-EX\right)$$

המקרה הגאוסי

אנו מאוד אוהבים משתנים אקראיים גאוסים. בנושא השערוך אנו מגלים כי המשערך הליניארי האופטימלי שווה למשערך האופטימלי. לכן כל הטיפול הקודם בשיערוך ליניארי של מ"א Y בהינתן מ"א X ייתן את השיערוך האופטימלי של Y על סמך X, כאשר X,Y **גאוסים במשותף** (כלומר $\left(X,Y\right)$ וקטור אקראי גאוסי).

עבור המקרה הכללי יותר, כלומר שערוך אופטימלי של מ"א Y בהנתן וקטור $\underline{X}$ ממימד n, נקבל כי כאשר $\left(Y,\underline{X}\right)$ וקטור אקראי גאוסי, אזי המשערך האופימלי של Y על סמך $\underline{X}$ הוא

$$\hat{Y}_{opt}=\hat{Y}_{opt}^{lin}=EY+\operatorname{cov}\left(Y,\underline{X}\right)_{1\times n}\cdot\left(\operatorname{var}\left(\underline{X}\right)\right)_{n\times n}^{-1}\cdot\left(\underline{X}-E\underline{X}\right)_{n\times 1}$$

עיקרון ההשלכה

אם $\hat{Y}_{opt}$ הוא המשערך האופטימלי של Y בהינתן הוקטור $\underline{X}$ אזי שגיאת השערוך $\varepsilon \triangleq Y-\hat{Y}_{opt}$ ניצבת לכל פונקציה של המדידות, כלומר

$$E\left[\varepsilon g\left(\underline{X}\right)\right]=E\left[\left(Y-\hat{Y}_{opt}\right)g\left(\underline{X}\right)\right]=0$$

לכל פונקציה חסומה g.

מעקרון ההשלכה (כאשר בוחרים $g\left(\underline{X}\right)=\hat{Y}_{opt}$), ניתן לקבל כי

$$MMSE=\min\left\{E\left[\varepsilon^2\right]\right\}=\min\left\{E\left[\left(Y-\hat{Y}_{opt}\right)^2\right]\right\}=EY^2-E\hat{Y}_{opt}^2$$

עבור המשערך הליניארי, נוכל לומר כי אם $\hat{Y}_{opt}^{lin}$ הוא המשערך הליניארי האופטימלי של Y בהינתן הוקטור $\underline{X}$ אזי שגיאת השערוך $\varepsilon \triangleq Y-\hat{Y}_{opt}^{lin}$ ניצבת לכל פונקציה ליניארית של המדידות, כלומר

$$E\left[\varepsilon g_{lin}\left(\underline{X}\right)\right]=E\left[\left(\hat{Y}_{opt}^{lin}-\hat{Y}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i X_i\right)+b\right)\right]=0$$

אם $\left(X,Y\right)$ גאוסים במשותף, אזי $Z=X\mid Y$ גם גאוסי, כלומר

$$f_{X|Y}\left(\alpha,\beta\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

כאשר

$$\mu=E\left[X\mid Y\right]=EX+\frac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\operatorname{var}Y}\left(Y-EY\right)$$

$$\sigma^2=\operatorname{var}X\left(1-\frac{\left(\operatorname{cov}\left(X,Y\right)\right)^2}{\operatorname{var}X\operatorname{var}Y}\right)$$

תהליכים אקראיים בזמן בדיד

הגדרה – תהליך אקראי בזמן בדיד

תהליך אקראי בזמן בדיד $X[n]$, $N_1 \le n \le N_2$ הינו סדרה (סופית או אינסופית) של מ"א.

נסמן: $X[n,\omega]$ או X_n או $X(n)$.

הגדרות

1. פונקציה של הזמן, n, המתקבלת כאשר מקפיאים את "גורם המזל" $\omega = \omega_0$ ומקבלים $X[n,\omega_0]$, כלומר מסתכלים על ארוע מסוים בכל ציר הזמן.
2. $X[n,\omega_0]$ - הערך של הפונקציה האקראית בנקודה ω_0.
3. $X[n_0,\omega]$ - המשתנה האקראי בזמן n_0.

הגדרה – חוק הפילוג של תהליך אקראי

חוק הפילוג של תהליך אקראי הינו אוסף כל פונקציות הפילוג המוגדרות עבור סדרות זמנים סופיות מהצורה $n_1, n_2, \ldots, n_N$:

$$F_{n_1,n_2,\ldots,n_N}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N) = P\left\{X[n_1] \le \alpha_1, X[n_2] \le \alpha_2, \ldots, X[n_N] \le \alpha_N\right\}$$

לכל N ולכל סדרה $\{n_i\}_{i=1}^N$ ולכל סדרה $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$.

הגדרה – סטציונריות

תהליך $X[n]$ נקרא תהליך סטציונרי אם לכל k שלמים ולכל סדרה $\{n_i\}_{i=1}^N$ ולכל סדרה $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$, מתקיים

$$F_{n_1,n_2,\ldots,n_N}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N) = F_{n_1+k,n_2+k,\ldots,n_N+k}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N)$$

הגדרות נוספות

- תוחלת של תהליך אקראי:

$$\mu_X(n) \triangleq E[X[n]]$$

- פונקצית האוטוקורלציה:

$$R_X(n_1,n_2) \triangleq E\left[X[n_1]X[n_2]\right]$$

- פונקצית הקווריאנס:

$$\begin{aligned}K_X(n_1,n_2) &\triangleq E\left[\left(X[n_1]-EX[n_1]\right)\left(X[n_2]-EX[n_2]\right)\right]\\ &= R_X(n_1,n_2) - \mu_X(n_1)\mu_X(n_2)\end{aligned}$$

תהליכים אקראיים שימושיים

רעש לבן בזמן בדיד

רעש לבן הוא סדרה של מ"א $X[n]$ שהם iid.

הילוך שיכור (הילוך אקראי)

אם $X[n]$ הוא רעש לבן, אזי הילוך אקראי מוגדר כלהלן:

$$\begin{cases} Y[0] = 0 \\ Y[n] = Y[n-1] + X[n] = \sum_{i=1}^{n} X[i] \end{cases}$$

תהליך אקראי גאוסי

תהליך $X[n]$ יקרא גאוסי אם לכל סדרת זמנים $\{n_i\}_{i=1}^k$, הוקטור $\left(X[n_1], X[n_2], \ldots X[n_k]\right)$ הוא וקטור אקראי גאוסי.

הגדרה – ארגודיות

יהי $X[n]$ תהליך סטציונרי. אם לכל פונקציה חסומה g ב $k+1$ משתנים ולכל $k>0$ מתקיים:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} g\left(X[n],X[n+1],...,X[n+k]\right)=E\left[g\left(X[0],X[1],...,X[k]\right)\right]$$

אז נאמר כי $X[n]$ הוא תהליך ארגודי.

אינטאיטיבית, אם הממוצע האמפירי מתכנס לתוחלת אז אומרים ש X תהליך ארגודי.

עבור המקרה החד ממדי, תהליך סטציונרי X הוא ארגודי אם מתקיים:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} g\left(X[n]\right)=E\left[g\left(X[n]\right)\right]$$

דוגמאות לתהליכים ארגודיים: $X[n]\equiv c$, $X[n]$ תהליך iid.

דוגמא לתהליך לא ארגודי: $X[n]=Y$, כאשר Y משתנה אקראי כלשהו.

שרשראות מרקוב

הגדרה – תהליך מרקוב (שרשרת מרקוב)

יהי $X[n]$ תהליך אקראי. אם לכל $n>k$ ו $\{i,j_n,j_{n-1},...,j_{n-k}\}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left\{X[n+1]=i \mid X[n]=j_n, X[n-1]=j_{n-1},...,X[n-k]=j_{n-k}\right\}$$
$$=\mathbb{P}\left\{X[n+1]=j \mid X[n]=j_n\right\}$$

אז נקרא לתהליך שרשרת מרקוב.

הגדרה – הסתברות המעבר

להסתברות

$$p_{ji}\triangleq\mathbb{P}\left\{X[n+1]=i \mid X[n]=j\right\}$$

נקרא הסתברות המעבר (בצעד יחיד) ממצב j למצב i, כאשר ל $X[n]$ קראנו מצב התהליך ברגע n.

נשים לב שהסתברות זו יכולה להיות גם תלויה בזמן, n.

ניתן להרחיב את ההגדרה להסתברות מעבר ב k צעדים:

$$p_{ji}^{(k)}\triangleq\mathbb{P}\left\{X[n+k]=i \mid X[n]=j\right\}$$

הגדרה – שרשרת מרקוב הומוגנית

לשרשרת מרקוב המקיימת כי הסתברות המעבר ממצב i למצב j, כלומר

$$p_{ij}\triangleq\mathbb{P}\left\{X[n+1]=j \mid X[n]=i\right\}$$

אינה תלויה בזמן, נקרא שרשרת הומוגנית.

הערה – לעיתים נראה בספרות את המונח "שרשרת סטציונרית" כדי לתאר שרשרת מרקוב הומוגנית, אך מונח זה מטעה מכיוון ששרשרת מרקוב הומוגנית אינה חייבת להיות תהליך אקראי סטציונרי.

הגדרה – מטריצה הסתברויות המעבר

עבור תהליך מרקוב הומוגני, מטריצה המכילה באיבר (i,j) את הסתברות המעבר ממצב i למצב j:

$$\underline{\underline{P}}=\left\{p_{ij}\right\}_{i,j}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}$$

כמו הסתברויות המעבר, ניתן להרחיב את הגדרת המטריצה להיות מטריצת המעבר ב k צעדים:

$$\underline{\underline{P}}^{(k)}=\left\{p_{ij}^{(k)}\right\}_{i,j}=\begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \cdots & p_{1n}^{(k)}\\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ p_{n1}^{(k)} & \cdots & \cdots & p_{nn}^{(k)}\end{pmatrix}$$

שימו לב, $p_{ij}^{(k)}$ אינו העלאה בחזקה, אלא סימון של מעבר ב k צעדים.

<u>הגדרה – מרחב המצבים של שרשרת מרקוב</u>

זוהי הקבוצה שאיבריה הם כל המצבים האפשריים של השרשרת, ומסומנת S. קבוצה זו יכולה להיות סופית, או אינסופית ובת ומניה.

<u>הגדרה – וקטור הסתברויות בזמן (וקטור פילוג)</u>

עבור תהליך מרקוב הומוגני, עבור סדרת המצבים $\left\{i_k\right\}_{k=1}^{N}$ נגדיר את וקטור ההסתברויות הרב מימדי הבא:

$$\begin{aligned}\underline{\nu}(n) &= \left(\nu_{i_1}(n),\nu_{i_2}(n),...,\nu_{i_k}(n)\right)\\ &\triangleq \left(\mathbb{P}\left\{X(n)=i_1\right\},\mathbb{P}\left\{X(n)=i_2\right\},...,\mathbb{P}\left\{X(n)=i_k\right\}\right)\end{aligned}$$

וקטור שורה זה נקרא גם וקטור הפילוג של השרשרת, בזמן n.
נדגיש שזהו וקטור שורה.
הערה: ערכי i,j (מצבי התהליך) לאו דווקא שלמים.

<u>טענות</u>

1. תהליך מרקובי נשאר מרקובי גם אם הופכים את ציר הזמן.
2. מטריצת הסתברויות המעבר הינה מטריצה סטוכסטית, כלומר הוקטור $(1,1,...,1)^T$ הוא וקטור עצמי שלה, מצד ימין, עם ערך עצמי 1. או במילים אחרות, סכום איברי כל שורה הוא 1. (אינטואיטיבית, סכום כל שורה i הוא סכום ההסתברויות להגיע ממצב i למצב כלשהוא)
3. שרשרת מרקוב הומוגנית יכולה להיות מוגדרת ע״י מטריצת הסתברויות המעבר, או ע״י דיאגרמת מעברים.
4. נוסחת צ׳פמן-(אנדרי) קולמוגורוב: $p_{ij}^{(n+m)}=\sum_k p_{ik}^{(n)}p_{kj}^{(m)}$ (k עובר על כל המצבים בין i ל j, כולל). באופן מטריצי, הנוסחה היא $\underline{\underline{P}}^{(n+m)}=\underline{\underline{P}}^{(n)}\underline{\underline{P}}^{(m)}=\underline{\underline{P}}^{n}\underline{\underline{P}}^{m}$.
5. פונקצית ההסתברות של תהליך מרקוב ברגע n ניתנת ע״י $\underline{\nu}(n)=\underline{\nu}(n-1)\underline{\underline{P}}=\underline{\nu}(0)\underline{\underline{P}}^{n}$. נשים לב שזהו וקטור שורה.
מכאן ניתן להסיק כי חוק הפילוג של שרשרת מרקובית הומוגנית נקבע חד משמעית ע״י הפילוג $\nu(0)$ וע״י מטריצת המעברים $\underline{\underline{P}}$.

קצת על מרחב המצבים של שרשרת מרקוב

נאמר שמצב i מוביל למצב j אם קיים n כך ש $p_{ij}^{(n)}>0$. נסמן $i\to j$.
אם i מוביל ל j וגם j מוביל ל i, הצבים i,j ייקראו מקושרים, ונסמן $i\leftrightarrow j$.
כל מצב i מקושר לעצמו, גם אם אין קשת מעבר עצמית.
יחס שקילות הוא יחס שמקיים:

1. רפלקסיביות: $i\leftrightarrow i$
2. סימטריות: $i\leftrightarrow j \;\Rightarrow\; j\leftrightarrow i$
3. טרנזיטיביות: $i\leftrightarrow j,\; j\leftrightarrow k \;\Rightarrow\; i\leftrightarrow k$

קבוצת קשירות של מצב i: כל המצבים המקושרים למצב i.

<u>הגדרה – קבוצה סגורה</u>

אם כל מצב בקבוצה A מוביל רק למצבים בקבוצה A, אזי נקרא לקבוצה A קבוצה סגורה.
לכן, בדיאגראמאת המצבים, לא נראה חצים יוצאים מקבוצה סגורה.

<u>הגדרה – מצב נשנה</u>

מצב i נקרא נשנה כאשר אם מתחילים ממצב i, מובטח שנחזור אליו מתי-שהוא, כלומר ישנה הסתברות ששווה 1 להגיע אליו שוב בזמן כלשהוא לפחות פעם אחת.

<u>הגדרה – מצב חולף</u>

מצב שאינו נשנה נקרא חולף.
הגדרה שקולה: נגדיר N_i כמספר הפעמים שתהליך מבקר במצב i (זהו מ״א). מצב i חולף אס״ם לכל j,

$$E\left[N_i\middle|X(0)=j\right]<\infty$$

<u>הגדרה – שרשרת חולפת</u>

שרשרת מרקוב שבא כל המצבים חולפים תקרא שרשרת חולפת

<u>הגדרה – שרשרת פריקה</u>

שרשרת מרקוב שלה יותר מקבוצה סגורה אחת נקראת שרשרת פריקה. אחרת, שרשרת זו נקראת אי-פריקה.

<u>הגדרה – פילוג סטציונרי</u>
עבור שרשרת מרקובית, פילוג $\underline{\nu}$ נקרא פילוג סטציונרי (או פילוג אינווריאנטי) אם

$$\underline{\nu}(0)=\underline{\nu} \quad\Rightarrow\quad \underline{\nu}(n)=\underline{\nu}$$

טענות

1. בקבוצת קשירות, כל המצבים הם נשנים או כולם חולפים. בקבוצת קשירות סגורה, כל המצבים נשנים. בקבוצת קשירות לא סגורה, כל המצבים חולפים.
2. מצב i הוא נשנה אס״ם $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty$
3. עבור שרשרת מרקובית הומוגנית, פילוג $\underline{\nu}$ סטציונרי אס״ם $\underline{\nu}=\underline{\nu}\underline{\underline{P}}$ (שוב נזכיר כי וקטור הפילוג הוא וקטור שורה, ואכן כדי לחשב את הפילוג של המצב הבא, יש לכפול משמאל ($\underline{\nu}(n+1)=\underline{\nu}(n)\underline{\underline{P}}$) את הפילוג הנוכחי במטריצת המעברים).
4. אם הפילוג ההתחלתי $\nu(0)$ הוא פילוג סטציונרי, אזי השרשרת ההומוגנית היא תהליך אקראי סטציונרי.
5. לכל שרשרת מרקוב הומוגנית סופית ישנו פילוג סטציונרי. אם השרשרת היא אי-פריקה (indecomposable), אזי פילוג זה הוא יחיד. ערכי פילוג סטציונרי זה שונים מאפס רק עבור מצבים נשנים.
6. שרשרת מרקובית בעלת מספר סופי של מצבים אינה חולפת, כלומר יש בה לפחות מצב נשנה אחד.
7. כל שרשרת סופית ניתנת לפירוק למספר סופי של קבוצות סגורות, וקבוצה נוספת (אולי ריקה) של מצבים חולפים. בשרשרת עם מספר בר-מניה של מצבים, מספר קבוצות הקשירות לא בהכרח סופי, יתכן שאין אף קבוצת קשירות בעלת יותר ממצב אחד ויתכן שאין אף מצב נשנה.

תהליכים אקראיים בזמן רציף

<u>הגדרה – תהליך אקראי בזמן רציף</u>

תהליך אקראי בקטע זמן $a \le t \le b$ יסומן $\{X_t, a \le t \le b\}$ או $\{X(t,\omega), a \le t \le b\}$. כפונקציה של פרמטר ה"מזל" ω, התהליך הוא משתנה אקראי, כלומר עבור זמן קבוע $t = t_0$ נקבל מ"א $X(t_0,\omega)$.

עבור פרמטר מזל נתון $\omega = \omega_0$, בקטע זמן $a \le t \le b$, נקבל פונקציה דטרמיניסטית של הזמן $X(t,\omega_0)$.

פונקציה זו לא חייבת להיות רציפה. פונקציה זו תקרא פונקצית מדגם.

כאן a,b יכולים להיות גם אינסופיים.

<u>הגדרה – חוק הפילוג של תהליך אקראי בזמן רציף</u>

חוק הפילוג של תהליך אקראי בזמן רציף, $X(t)$, הוא אוסף כל הפונקציות

$$F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \mathbb{P}\left\{X(t_1) \le \alpha_1,\dots,X(t_n) \le \alpha_n\right\}$$

לכל n ולכל $t_1,\dots,t_n$ ו $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

<u>מומנטים של תהליך אקראי</u>

התוחלת

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

פונקצית האוטוקורלציה

$$R_X(t_1,t_2) = E\left[X(t_1)X(t_2)\right]$$

פונקצית הקווריאנס

$$K_X(t_1,t_2) = \operatorname{cov}\left(X(t_1),X(t_2)\right) = R_X(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

<u>הגדרה – תהליך מנייה</u>

תהליך מניה $N(t)$ הוא תהליך אקראי המקבל ערכים שלמים, ואינו יורד.

אם נניח כי $N(0)=0$ אז $N(t)$ מונה מספר אירועים שקרו בקטע $[0,t]$.

<u>תכונות תהליך מנייה פשוט:</u>

1. $N(t) \ge 0$.
2. $N(t) \in \mathbb{N}$.
3. אם $s > t$ אז $N(s) \ge N(t)$.
4. אם $s > t$ אז $N(s) - N(t)$ מונה את מספר האירועים בקטע $[s,t]$.

<u>הגדרה – תהליך פואסון</u>

תהליך מנייה יקרא תהליך פואסון עם פרמטר קצב λ אם:

1. $N(0)=0$.
2. תוספות בקטעי זמן זרים בלתי תלויות.
3. $\mathbb{P}\left\{N(t+\Delta t) - N(t) = 1\right\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$.
4. $\mathbb{P}\left\{N(t+\Delta t) - N(t) \ge 2\right\} = o(\Delta t)$

כאשר $f(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ פירושו $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$

הגדרה שקולה:

תהליך מנייה יקרא תהליך פואסון עם פרמטר קצב λ אם:

1. $N(0)=0$
2. תוספות בקטעי זמן זרים בלתי תלויות.
3. מספר הארועים בכל אינטרוול באורך s מפולג פואסונית עם פרמטר λs, כלומר

$$\mathbb{P}\{N(t+s) - N(t) = n\} = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

<u>מומנטים של תהליך פואסון</u>

תוחלת:

$$\mu_N(t) = \lambda t$$

מומנט שני:

$$E\left[N^2(t)\right] = \lambda t + (\lambda t)^2$$

אוטוקורלציה:

$$R_N(t_1,t_2) = \lambda \min\left\{t_1,t_2\right\} + \lambda^2 t_1 t_2$$

תכונה של תהליך פואסון:

$$\mathbb{P}\left\{\left(\left[N(t+\tau) - N(t)\right] \bmod 2\right) = 0\right\} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda|\tau|}\right)$$

<u>תהליך טלגרף</u>

תהליך $X(t)$ ייקרא תהליך טלגרף עם פרמטר λ אם הוא מקיים את שלושת התכונות הבאות:

- בכל רגע נתון $X(t)$ מקבל את הערכים $+1$ או -1 בהסתברות שווה.
- מספר חילופי הסימן בקטע זמן באורך τ נתון ע"י

$$\mathbb{P}\left\{X(t) - X(s) = k\right\} = \begin{cases} e^{-\lambda(t-s)} \dfrac{\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

- מספר חילופי הסימן בקטעים זרים בלתי תלוי סטטיסטית.

תכונה של תהליך טלגרף:

$$\mathbb{P}\left\{X(t) = X(t+\tau)\right\} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda|\tau|}\right)$$

<u>הגדרה – מרקוביות של ת"א בזמן רציף</u>

ת"א $X(t)$ מרקובי אם לכל t, ולכל n, ולכל סדרת זמנים $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$

$$\mathbb{P}\left\{X(t) \leq \alpha \middle| X(t_n) = \alpha_n, X(t_{n-1}) = \alpha_{n-1}, \ldots, X(t_1) = \alpha_1\right\} = \mathbb{P}\left\{X(t) \leq \alpha \mid X(t_n) = \alpha_n\right\}$$

לכל $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha$ ולכל סדרת זמנים $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

<u>טענות</u>

1. אם $N_1(t)$ ו $N_2(t)$ ת"א פואסונים אם קצבים λ_1 ו λ_2 בהתאמה, אזי $N_3(t) = N_1(t) + N_2(t)$ ת"א פואסוני עם פרמטר $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. תהליך פואסון הוא מרקובי.
3. הפרש זמני הקפיצות של תהליך פואסון בקצב λ הוא משתנה אקראי המפולג מעריכית עם פרמטר λ.

<u>מומנטים של תהליך אקראי</u>

1. אוטו-קורלציה של ת"א $X(t)$

$$R_X(t_1,t_2) \triangleq E\left[X(t_1)X(t_2)\right]$$

2. קרוס-קורלציה בין ת"א $X(t)$ לת"א $Y(t)$

$$R_{XY}(t_1,t_2) \triangleq E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]$$

3. קווריאנס:

$$K_X(t_1,t_2) \triangleq E\left[\left(X(t_1) - EX(t_1)\right)\left(X(t_2) - EX(t_2)\right)\right] = R_X(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

<u>הגדרה – סטציונריות</u>

ת"א $X(t)$ יקרא סטציונרי אם לכל $t_1, \ldots, t_n, \tau, n$ חוק הפילוג של הו"א $\left(X(t_1+\tau), \ldots, X(t_n+\tau)\right)$ לא תלוי ב τ. כלומר,

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = F_{X(t_1+\tau),\ldots,X(t_n+\tau)}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

נאמר שהת"א סטציונרי במובן הצר ($SSS - Strict\ Sense\ Stationary$)

<u>הגדרה – סטציונריות במובן הרחב</u>

ת״א $X(t)$ יקרא סטציונרי במובן הרחב (סמ״ר) אם

- תוחלתו לא תלויה בזמן : $\mu_X(t) = const$.
- פונקצית האוטוקורלציה שלו תלוייה רק בערך המוחלט של הפרש הזמנים : $R_X(t_2, t_1) = R_X(|t_2 - t_1|)$ (כלומר זוהי פונקציה זוגית).

כעת נאמר שהת״א סטציונרי במובן הרחב ($WSS - Wide\,Sense\,Stationary$)

תכונות פונקצית אוטוקורלציה של תהליך סמ״ר :

1. $E\left[X^2(t)\right] = R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$
2. $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

<u>הגדרה – סטציונריות במובן הרחב במשותף</u>

שני תהליכים אקראיים $X(t)$ ו $Y(t)$ יקראו סמ״ר במשותף אם כל אחד מהם הוא סמ״ר ובנוסף

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_2 - t_1)$$

ואז

$$R_{XY}(t, t+\tau) = R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$$

נדגיש את ההבדל בין פונקצית אוטוקורלציה של ת״א סמ״ר – התלות אינה בערכו המוחלט של הפרש הזמנים τ , כלומר R_{XY} איזה פונקציה זוגית.

<u>הגדרה – סטציונריות במשותף</u>

ת״א $X(t), Y(t)$ יקראו תהליכים סטציונרים במשותף אם לכל n ולכל $t_1, ..., t_n$ החוק של הוקטור ממימד $2n$,

$$\left(X(t_1+\tau), ..., X(t_n+\tau), Y(t_1+\tau), ..., Y(t_n+\tau)\right)$$

לא תלוי ב- τ .

תכונות ת״א סטציונרים במשותף :

1. $\mu_X(t) \equiv \mu_X,\ \mu_Y(t) \equiv \mu_Y$.
2. הפילוג הדו-מימדי $\left(X(t_1+\tau), Y(t_2+\tau)\right)$ לא תלוי ב- τ .
3. $R_{X,Y}(t_1+\tau, t_2+\tau) = R_{X,Y}(t_1, t_2) = R_{X,Y}(t_1 - t_2, 0) = R_{X,Y}(t_1 - t_2)$

<u>הגדרה – תהליך אקראי גאוסי</u>

תהליך $X(t)$ יקרא גאוסי אם לכל סדרת זמנים $\{t_i\}_{i=1}^{k}$, הוקטור $\left(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_k)\right)$ הוא וקטור אקראי גאוסי.

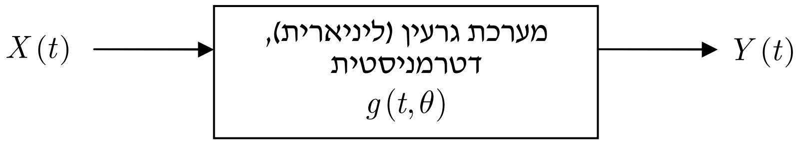
<u>טענות</u>

1. אם $X(t)$ תהליך סטציונרי (והמומנטים מסדר ראשון ושני סופי) אזי הוא תהליך סטציונרי במובן הרחב.
2. אם X_t ת״א גאוסי, אזי חוק ההסתברות שלו נקבע ע״י פונקצית התוחלת ופונקצית האוטוקורלציה.
3. ת״א גאוסי סמ״ר הינו סטציונרי.
4. פעולות לינאריות על תהליכים גאוסיים מייצרות תהליכים גאוסיים, לדוגמא

$$g(t)X_t,\ g(t)X_t + h(t)X_{t+\alpha}, \quad \sum_i g(t_i)X_{t_i}(t_{i+1} - t_i),\ \int g(t)X_t dt, \quad \frac{d}{dt}X_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{X_{t+\varepsilon} - X_t}{\varepsilon}$$

מעבר תהליכים אקראיים במערכות לינאריות

מעבר ת״א כללי במערכת גרעין



כאשר $g(t,\theta)$ התגובה בזמן t לכניסת הלם בזמן θ.
ולכן

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\theta)g(t,\theta)d\theta$$

ואז

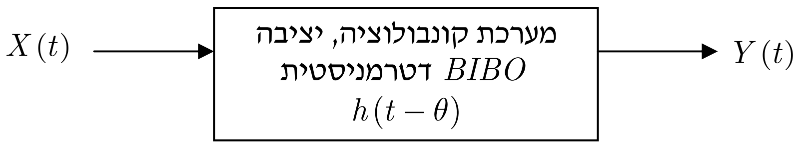
$$E[Y(t)]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(\theta)g(t,\theta)d\theta\right]=\int_{-\infty}^{\infty}E[X(\theta)g(t,\theta)]d\theta=\int_{-\infty}^{\infty}\mu_X(\theta)g(t,\theta)d\theta$$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=E\left[X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty}X(\theta)g(t_2,\theta)d\theta\right]=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(t_1,\theta)g(t_2,\theta)d\theta$$

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(\theta)g(t,\theta)d\theta\int_{-\infty}^{\infty}X(\eta)g(t,\eta)d\eta\right]=$$

$$=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X(\theta)X(\eta)g(t_1,\theta)g(t_2,\eta)d\theta d\eta\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\theta,\eta)g(t_1,\theta)g(t_2,\eta)d\theta d\eta$$

מעבר ת״א סמ״ר דרך מערכת ליניארית קבועה בזמן



כאשר $h(t-\theta)$ התגובה בזמן t לכניסת הלם בזמן θ.
ולכן

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\theta)h(t-\theta)d\theta$$

ואז

$$E\left[Y(t)\right]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(\theta)h(t-\theta)\,d\theta\right]=\int_{-\infty}^{\infty}E\left[X(\theta)h(t-\theta)\right]d\theta=\mu_X\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\theta)\,d\theta=\mu_X H(0)$$

$$\begin{aligned}R_{XY}(t,t+\tau)&=E\left[X(t)Y(t+\tau)\right]=E\left[X(t)\int_{-\infty}^{\infty}X(\theta)h(t+\tau-\theta)\,d\theta\right]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(t-\theta)h(t+\tau-\theta)\,d\theta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\theta)h(\tau-\theta)\,d\theta=\left(R_X*h\right)(t)\Big|_{t=\tau}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_Y(t,t+\tau)&=E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(\theta)h(t-\theta)\,d\theta\int_{-\infty}^{\infty}X(\eta)h(t+\tau-\eta)\,d\eta\right]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E\left[X(\theta)X(\eta)\right]h(t-\theta)h(t+\tau-\eta)\,d\eta d\theta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\eta-\theta)h(t-\theta)h(t+\tau-\eta)\,d\eta d\theta\\R_Y(0)&=\int_{-\infty}^{\infty}S_X(f)\left|H(f)^2\right|df\end{aligned}$$

תכונות

1. תהליך הכניסה $X(t)$ והמוצא $Y(t)$ הם תהליכים סמ"ר במשותף.
2. הספק ממוצע ביציאה: $P_{out}=E\left[\left|Y(t)\right|^2\right]=R_Y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_X(f)\left|H(f)^2\right|df$

<u>תזכורת – התמרת פוריה</u>

תהי $X(t)$ פונקציה דטרמניסטית. אם $\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(t)\right|dt<\infty$, אזי נגדיר את התמרת פורייה של האות:

$$\hat{X}(f)=\mathcal{F}\left\{X(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$X(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{X}(f)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{X}(f)e^{j2\pi ft}df$$

תכונות

1. אם $X(t)$ ממשי אזי $\mathcal{F}\left\{X(-t)\right\}=\hat{X}^*(f)$
2. התמרה של קונבולוציה: $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}X(t-\theta)h(\theta)d\theta\right\}=\hat{X}(f)\hat{h}(f)$
3. הזזה בזמן: $\mathcal{F}\left\{X(t+\tau)\right\}=e^{2\pi if\tau}\hat{X}(f)$

<u>תזכורת – משפט פרסבל</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty}X_1(t)X_2^*(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{X}_1(f)\hat{X}_2^*(f)df$$

צפיפות הספק ספקטרלית

נניח ש $X(t),Y(t)$ ת״א סמ״ר במשותף בעלי ממוצעים אפס.

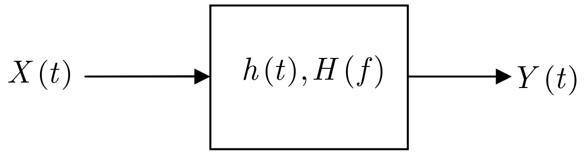
צפיפות ההספק הספקטרלית של ת״א סמ״ר $X(t)$ מוגדרת כהתמרת פורייה של פונקצית האוטוקורלציה:

$$S_X(f) \triangleq \mathcal{F}\left\{R_X(\tau)\right\}$$

צפיפות ההספק הספקטרלית המצטלבת של ת״א $X(t),Y(t)$ סמ״ר במשותף מוגדרת כהתמרת פורייה של פונקצית הקרוסקורלציה:

$$S_{XY}(f) \triangleq \mathcal{F}\left\{R_{XY}(\tau)\right\}$$

אם $Y(t)$ מתקבל מ $X(t)$ ע״י מעבר במערכת LTI בעלת פונקצית תמסורת $H(f)$:



אזי

$$S_{XY}(f) = S_X(f)H(f)$$

$$S_Y(f) = S_X(f)\left|H(f)\right|^2$$

והספק היציאה הכולל:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\left|H(f)\right|^2 df = \mathcal{F}^{-1}\left\{S_Y(f)\right\}\Big|_{\tau=0} = R_Y(\tau=0)$$

תכונות של S_X

1. R_X ממשית וסימטרית ולכן S_X ממשית וסימטרית.
2. $S_X(f) \geq 0$ לכל f.
3. עבור שני תהליכים סמ״ר במשותף חסרי קורלציה, בעלי תוחלת 0, מתקיים
$$R_{X+Y}(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau)$$
4. ואז, בתחום התדר:
$$S_{X+Y}(f) = S_X(f) + S_Y(f)$$
5. תא״ג העובר במערכת LTI יוצר תא״ג.

עד כה טיפלנו במקרה ש $EX = 0$. נבדוק מה קורה לגבי $EX \neq 0$.
נביט ב $X(t) = c + Y(t)$, כאשר $EY = 0$ ו c קבוע דטרמיניסטי. לכן נקבל

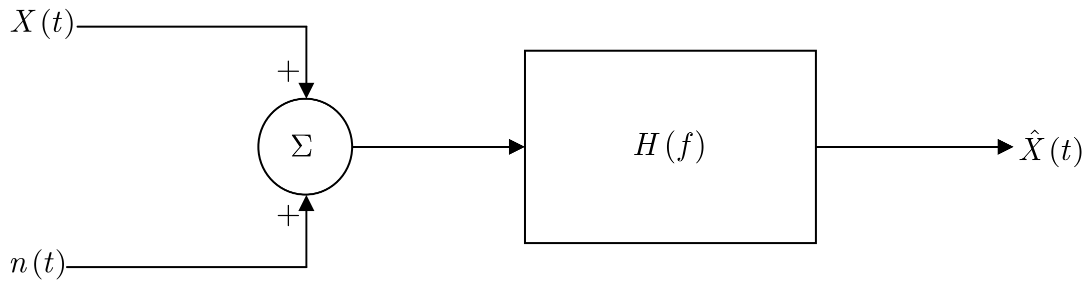
$$R_X(\tau) = E\left[X(t)X(t+\tau)\right] = E\left[\left(c+Y(t)\right)\left(c+Y(t+\tau)\right)\right] = c^2 + E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right]$$

$$= c^2 + R_Y(\tau)$$

$$S_X(f) = S_Y(f) + c^2\delta(f)$$

סינון ליניארי אופטימלי

אנו משדרים אות $X(t)$. בדרך מתווסף אות רעש לא רצוי $n(t)$. לכן במקלט מתקבל האות $r(t)=X(t)+n(t)$.
אנו רוצים לתכנן מסנן $H(f)$ כך שיציאתו, $\hat{X}(t)$, תהיה קרובה ככל הניתן לאות המקורי ששודר, $X(t)$.



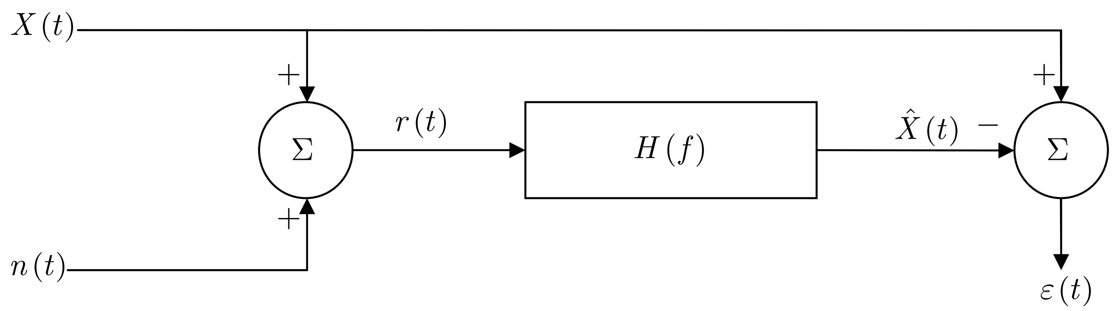
נגדיר את השגיאה בתור ההפרש בין האות ששודר לבין האות שהצלחנו להפיק מהמסנן:

$$\varepsilon(t)=X(t)-\hat{X}(t)$$

אנו נחפש את המסנן הליניארי האופטימלי, במובן המוכר לנו משערוך משתנים ווקטורים אקראיים – כלומר נחפש מסנן אופטימלי ליניארי, המביא למינימום את השגיאה הריבועית הממוצעת, $MMSE$:

$$E\left[\varepsilon^2\right]=E\left[\left(X(t)-\hat{X}(t)\right)^2\right]$$

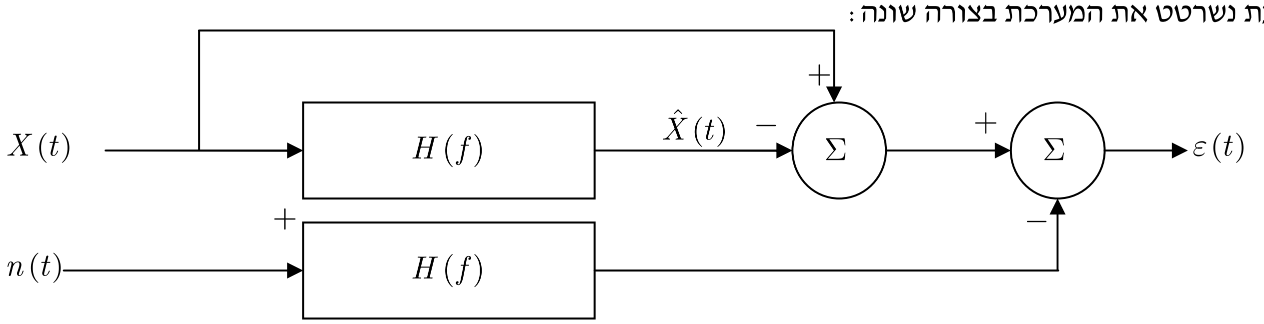
אנו נניח בטיפול כי $X(t),r(t)$ סמ״ר, חסרי קורלציה ובעלי תוחלת 0.
ניתן לראות כי אות השגיאה, $\varepsilon(t)$, הוא מוצא של מערכת ליניארית:



ואז

$$\varepsilon(t)=X(t)-\left(X(t)+n(t)\right)*h(t)$$

כעת נשרטט את המערכת בצורה שונה:



ואז כמובן

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)&=X(t)-X(t)*h(t)-n(t)*h(t)\\&=X(t)-\left(X(t)+n(t)\right)*h(t)\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)&=X(t)-X(t)*h(t)-n(t)*h(t)\\&=X(t)*\delta(t)-X(t)*h(t)-n(t)*h(t)\\&=X(t)*\left(\delta(t)-h(t)\right)-n(t)*h(t)\end{aligned}$$

ומחוסר הקורלציה בין $X(t)$ ל $n(t)$ מקבלים כי השגיאה הריבועית הממוצעת היא

$$E\left[\varepsilon^2(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}S_X(f)\left|1-H(f)\right|^2df+\int_{-\infty}^{\infty}S_n(f)\left|H(f)\right|^2df$$

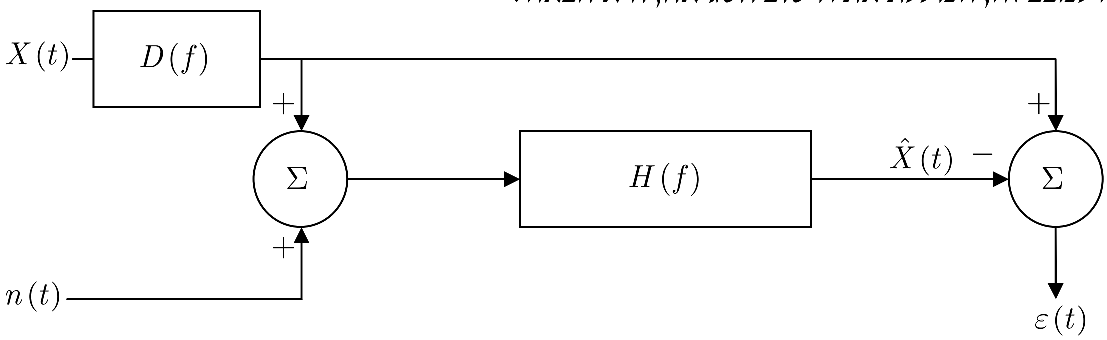
משיקולים גיאומטריים (במישור המרוכב) ניתן להחליף את $\left|H(f)\right|$ ב $H(f)$ ואז למצוא את המינימום ע"י גזירה והשוואה לאפס. בסוף מקבלים כי המסנן האופטימלי, שנקרא מסנן וינר ($Wiener$), הוא

$$H_{opt}(f) = \frac{S_X(f)}{S_X(f) + S_n(f)}$$

ואז הביטוי לשגיאה הריבועית הממוצעת (המינימלית) הוא

$$MSE = \min\left\{E\left[\varepsilon^2(t)\right]\right\} = E\left[\varepsilon^2(t)\right]\Big\|_{H(f)=H_{opt}(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_X(f) S_n(f)}{S_X(f) + S_n(f)} df$$

ניתן להכליל מסנן זה ע"י כך שנעביר את האות המשודר $X(t)$ במסנן כלשהוא $D(f)$ לפני שידורו. הסכמה המתאימה למצב זה, הכוללת את חישוב השגיאה, היא הבאה:



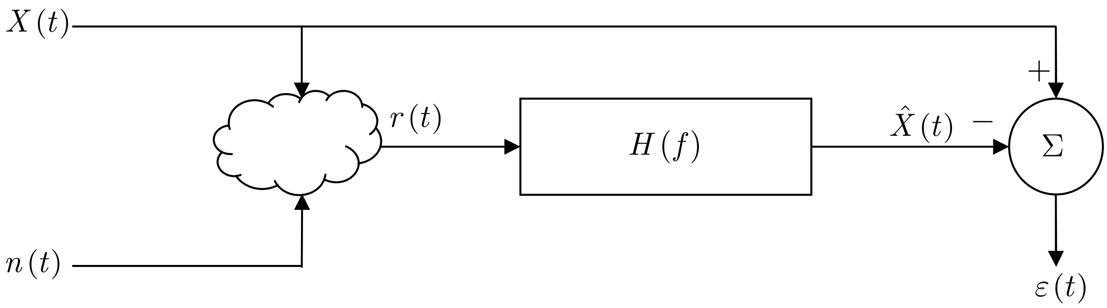
במקרה זה נקבל את מסנן וינר הבא:

$$H_{opt}(f) = \frac{S_X(f)}{S_X(f) + S_n(f)} D(f)$$

ואז הביטוי לשגיאה הריבועית המינימלית הוא

$$MSE = \min\left\{E\left[\varepsilon^2(t)\right]\right\} = E\left[\varepsilon^2(t)\right]\Big\|_{H(f)=H_{opt}(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_X(f) S_n(f)}{S_X(f) + S_n(f)} D^2(f) df$$

ניתן לפתור בעיה זו בגישה שונה – עקרון ההשלכה (עקרון הניצבות). כזכור, $r(t) = X(t) + n(t)$ הוא אות הדגימה של האות המשודר, טבול ברעש $n(t)$. באופן כללי התואם את הסכמה



נכתוב

$$E\left[\varepsilon^2\right] = E\left[X(t) - r(t) * h(t)\right]^2 = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\theta)\delta(\theta) - \int_{-\infty}^{\infty} r(t-\theta)h(\theta)\right]^2$$

כאשר $h(t)$ התגובה להלם של המסנן.

עקרון ההשלכה קובע כי השגיאה (ε) ניצבת למדידות (r), כלומר לכל s נקבל שהמסנן האופטימלי מקיים:

$$E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)\,\delta(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} r(t-\tau)\,h_{opt}(\tau)d\tau\right) r(s)\right] = 0$$

$$E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)\,r(s)\delta(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} r(s)r(t-\tau)\,h_{opt}(\tau)d\tau\right] = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} E\left[X(t-\tau)\,r(s)\right]\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[r(s)r(t-\tau)\right]h_{opt}(\tau)d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{r,X}(t-s-\tau)\,\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{r}(t-s-\tau)\,h_{opt}(\tau)d\tau$$

וע"י התמרת פורייה על שני האגפים נקבל

$$\mathcal{F}\left\{R_{r,X}(t-s-\tau)\right\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} R_{r}(t-s-\tau)\,h_{opt}(\tau)d\tau\right\}$$

$$S_{r,X}(f) = S_{r}(f)\,H_{opt}(f)$$

$$\Rightarrow \quad H_{opt}(f) = \frac{S_{r,X}(f)}{S_{r}(f)}$$

וזו תוצאה כללית יותר, מכיוון שאינה מניחה חוסר קורלציה בין האות המשודר לרעש המתווסף. בנוסף, לא הנחנו כי הדגימה היא הסכום $r(t) = X(t) + n(t)$, אלא יכול להתקיים כאן קשר כללי יותר, הבא לידי ביטוי בצפיפויות ההספק.

רעשים

<u>הגדרה – רעש לבן</u>

רעש לבן הינו תהליך אקראי סטציונרי במובן הרחב, עם תוחלת 0, אשר עבורו מתקיים:

$$S_n(f) = N_0$$

$$R(\tau) = N_0\delta(\tau)$$

<u>הגדרה – רעש לבן גאוסי</u>

זהו תא"ג $X(t)$ עם צפיפות ספקטרלית קבועה, בד"כ נבחר $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$.

<u>משפט Paley-Wiener</u>

אם $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log S(f)|}{1+f^2} df < \infty$ אזי קיים מסנן סיבתי כך שאם בכניסתו ר"ל, ביציאתו $S(f)$.

אינטגרלים של רעש לבן

יהי $n(t)$ אות רעש לבן בעל צפיפות הספק ספקטרלית N_0. יהיו $h_1(t), h_2(t), \ldots$ פונקציות דטרמיניסטיות עם אנרגיות סופיות, כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} h_i^2(t)dt < \infty$. נגדיר את המשתנה האקראי

$$X_i = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)h_i(t)dt$$

אזי מתקיים:

$$EX_i = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} n(t)h_i(t)dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[n(t)h_i(t)\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[n(t)\right]h_i(t)dt = 0$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_iX_j\right] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} n(s)h_i(s)ds\int_{-\infty}^{\infty} n(\theta)h_j(\theta)d\theta\right] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} n(s)h_i(s)n(\theta)h_j(\theta)dsd\theta\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[n(s)h_i(s)n(\theta)h_j(\theta)\right]dsd\theta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_n(s-\theta)h_i(s)h_j(\theta)dsd\theta \\
&= N_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s-\theta)h_i(s)h_j(\theta)dsd\theta = N_0\int_{-\infty}^{\infty} h_i(\theta)h_j(\theta)d\theta \\
&= N_0\int_{-\infty}^{\infty} h_i(\theta)h_j(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

נתבונן ב- (X_1, X_2): ו"א עם תוחלת 0, ועם מטריצת קווריאנס:

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} EX_1^2 & EX_1X_2 \\ EX_1X_2 & EX_2^2 \end{pmatrix}$$

$$EX_1^2 = N_0\int_{-\infty}^{\infty} h_1^2(\theta)d\theta \qquad EX_2^2 = N_0\int_{-\infty}^{\infty} h_2^2(\theta)d\theta$$

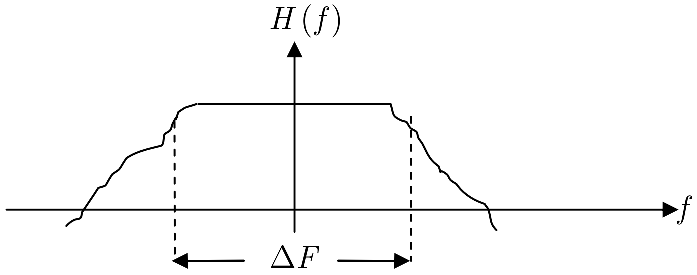
$$EX_1X_2 = N_0\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)h_2(\theta)d\theta$$

בנוסף, אם ידוע כי $n(t)$ ת"א גאוסי אזי X_i גאוסים במשותף, כלומר (X_1, X_2) ואי"ג.

כמו כן מתקיים: X_1 ב"ת ב- X_2 אמ"ם $\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)h_2(\theta)d\theta = 0$

רוחב סרט אפקטיבי לרעש

נביט במסנן LPF לא אידיאלי:



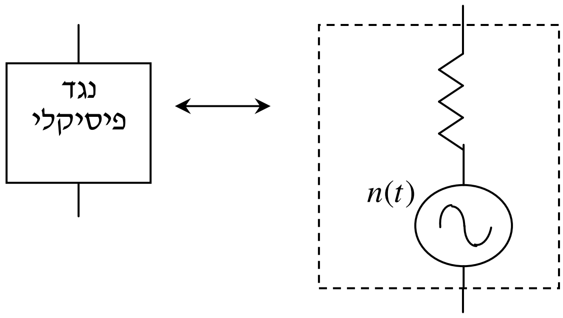
אם נגדיר

$$\Delta F=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df}{2\left|H(f)\right|^2},$$

כאשר המונה הוא הספק היציאה של רעש לבן, אזי נוכל להגדיר LPF אידיאלי בעל רוחב פס ΔF שיעביר את אותו הספק היציאה כמו המסנן הלא-אידיאלי, עבור כניסת רעש לבן.

רעשים תרמים

רעש נגד (רעש Nyquist)

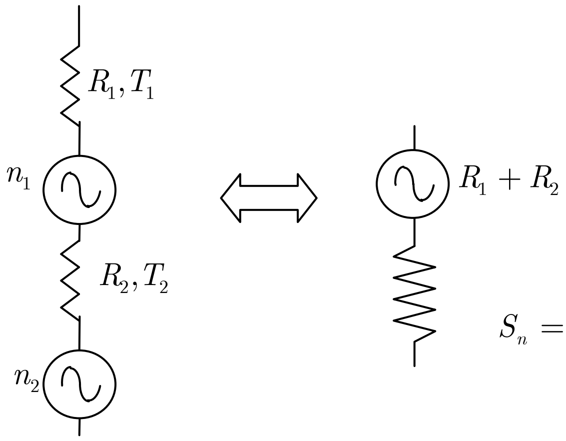


שיווי משקל תרמודינמי

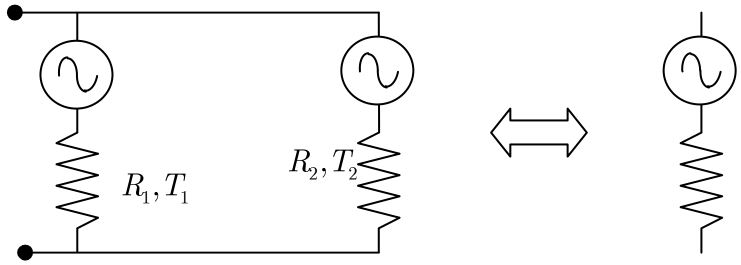
טענות:

1. רשת חסרת הפסדים איננה יוצרת רעש.
2. רעש הנגד הוא רעש לבן $S_n(f) = 2K_B TR$.

טענות נוספות:



$$S_n = 2k_B\left(R_1T_1 + R_2T_2\right)$$

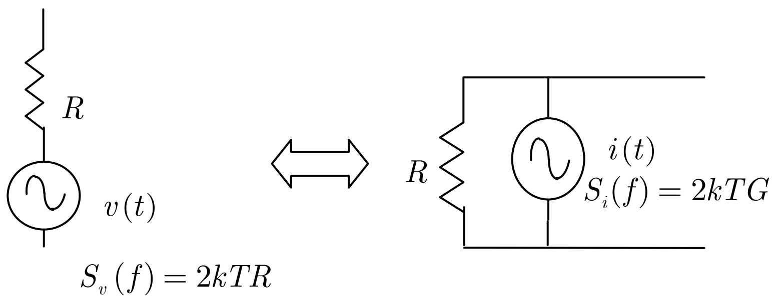


$$S_n = 2k_B \frac{T_1R_1R_2^2 + T_2R_2R_1^2}{\left(R_1 + R_2\right)^2}$$

ניתן להסיק כי

1. בחיבור בטור: $R_{eff} = R_1 + R_2, \quad T_{eff} = \dfrac{R_1T_1 + R_2T_2}{R_1 + R_2}$
2. בחיבור במקביל: $R_{eff} = \left(R_1 \,||\, R_2\right) = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}, \ T_{eff} = \dfrac{R_1T_1 + R_2T_2}{R_1 + R_2}$

.2



$$V(t) = i(t)R$$

$$EV(t)V(t+\tau) = R^2 Ei(t)i(t+\tau)$$

$$S_v(f) = R^2 S_i(f)$$

$$S_i(f) = \frac{1}{R^2} S_v(f) = 2kTG \quad ,G = R^{-1}$$

משפט ג׳

$$Z_{in}(f)=R_{in}(f)+iX_{in}(f)$$

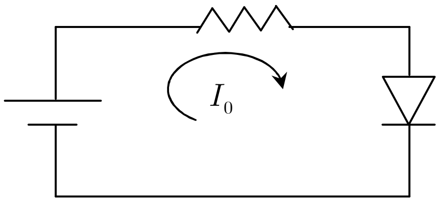
$$S_v(f)=2kTR_{in}(f)$$

רעש דיודה (Shot Noise)

טענה

אם נגריל מ״א פואסוני K עם פרמטר λT . הוא ייצג את מספר הקפיצות באינטרוול [0,T]. כעת נגריל באופן בלתי תלוי k מ״א <u>אחידים</u> על [0,T]. אזי התהליך האקראי הנ״ל הוא תהליך פואסון.

כעת נעבור למעגל חשמלי הכולל דיודה ומטרתנו תהיה למצוא את רעש הדיודה.



נסמן ב q את מטען האלקטרון ונניח שאנו מזרימים זרם קבוע I_0 דרך הדיודה.

- לו היה זורם זרם קבוע I_0 ומטען האלקטרון היה אפס אזי הצפיפות הספקטרלית של הזרם ,
$$S(f)=I_0^2\delta(f)$$
- אם ניקח בחשבון את מטען האלקטרון אזי נצפה לקבל,
$$S(f)=I_0^2\delta(f)+S_n(f)$$

מטרתנו לחשב את $S_n(f)$ (רעש הדיודה)

אלקטרון הנפלט בזמן t=0 משרה במעגל זרם $i_e(t)$, ולכן :

$$q=\int_{-\infty}^{\infty} i_e(t)dt$$

בקטע הזמן T יפלטו בממוצע $I_0T\,/\,q$ אלקטרונים. מאחר והאלקטרונים נפלטים מאיזורים שונים בקטודה סביר להניח שיש אי תלות בין זמני הפליטה. נוכל, לכן, להניח שתהליך פליטת האלקטרונים הוא תהליך פואסון. לכן,

$$I(t)=\sum_{k=1}^{K} i_e(t-t_k)$$

כך שמתקיים :

t_k - מ״א אחידים של [0,T].

K – מ״א פואסון עם פרמטר λT . קצב פליטת האלקטרונים , $\lambda=\dfrac{I_0}{q}$.

נמצא את המומנט הראשון,

$$EI(t)=E\left[E\left[\sum_{k=1}^{K} i_e(t-t_k)\middle|K\right]\right]\underbrace{=}_{Ergodicity}E\left[K\cdot\frac{1}{T}\int_0^T i_e(t-\theta)d\theta\right]=\frac{q}{T}E[K]=\frac{q}{T}\cdot\frac{I_0}{q}\cdot T=I_0$$

נמצא את המומנט השני,

$$R(\tau)=E[I(t)I(t+\tau)]=E[\sum_{k=1}^{K} i_e(t+\tau-t_k)\sum_{j=1}^{K} i_e(t-t_j)]=$$

$$=E\sum_{k=1}^{K} i_e(t+\tau-t_k)i_e(t-t_k)+E\sum_{k\neq j} i_e(t+\tau-t_k)i_e(t-t_j)=$$

$$=(EK)\frac{1}{T}\int_0^T i_e(t+\tau-\theta)i_e(t-\theta)d\theta+E(K^2-K)\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T i_e(t+\tau-\theta)i_e(t-\eta)d\theta d\eta=$$

$$=\frac{EK}{T}\int_{-\infty}^{\infty} i_e(\tau+\theta)i_e(\theta)d\theta+\frac{E(K^2-K)}{T^2}q^2$$

$$E(K^2-K)=(\lambda T)^2$$

$$EK=\lambda T$$

$$R(\tau)=\frac{I_0}{q}\int\ i_e(t+\tau)i_e(t)$$

ולכן,

$$S(f)=I_0^2\delta(f)+\frac{I_0}{q}G_e(f)G_e^*(f)$$

$$where,\ \ G_e(f)=\mathbb{F}\{i_e(t)\}$$

$$\text{for the low frequency }\ G_e(f)\approx G_e(0)=q$$

$$\boxed{S_I(f)=I_0^2\delta(f)+I_0q}$$

לכן **רעש הדיודה** הינו : $\boxed{S_n(f)=I_0q}$ בקירוב התדר הנמוך, המקיים $\tau f\ll 1$.

נספחים

טורי טיילור ידועים

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}\qquad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

ומהם ניתן לפתח :

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad \arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\sinh x\triangleq\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad \cosh x\triangleq\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

זהויות טריגונומטריות

$$\sin\theta\cos\varphi=\frac{\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)}{2}\qquad \sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\sin\theta\sin\varphi=\frac{\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)}{2}\qquad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\theta\cos\varphi=\frac{\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)}{2}\qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin 2t=2\sin t\cos t\qquad \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos z=\cos^2 z-\sin^2 z\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

<u>התמרת פורייה בזמן רציף</u>

התמרות פורייה ידועות

אות בזמן רציף	התמרת פורייה
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
1	$\delta(f)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(f-kf_0)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\left(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right)$
$x(t+T_0)=x(t)$ וכן . $x(t)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<T_1\\ 0 & T_1<\lvert t\rvert\le\frac{T_0}{2}\end{cases}$,	$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(2\pi f_0 k T_1)}{k}\delta(f-kf_0)$
$\frac{\omega_0}{\pi}\operatorname{sinc}(2\pi f_0 t)=\frac{\sin 2\pi f_0 t}{\pi t}$	$\begin{cases}1 & \lvert f\rvert<f_0\\ 0 & \lvert f\rvert>f_0\end{cases}$
$\operatorname{sinc}(2\pi f_0 t)=\frac{\sin 2\pi f_0 t}{2\pi f_0 t}$	$\begin{cases}\frac{1}{2f_0} & \lvert f\rvert<f_0\\ 0 & \lvert f\rvert>f_0\end{cases}$
$u(t)=\frac{1}{2}(sign(t)+1)$	$\begin{cases}\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f), & f\neq 0\\ \frac{1}{2}\delta(f), & f=0\end{cases}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j2\pi f},\quad \operatorname{Re}(a)>0$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2},\quad \operatorname{Re}(a)>0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^n},\quad \operatorname{Re}(a)>0$
$sign(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t=0\\ -1 & t<0\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{j\pi f}, & f\neq 0\\ 0, & f=0\end{cases}$
$\begin{cases}k & \lvert t\rvert<t_0\\ 0 & \lvert t\rvert>t_0\end{cases}$	$2kt_0\operatorname{sinc}(2\pi f t_0)$
t^n	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n\delta^{(n)}(f)$
$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=(x*u)(t)$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)X(f)$

$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}\,\exp\left\{-\frac{\sigma^2(2\pi f)^2}{2}\right\}$

תכונות של התמרת פורייה

תכונה	אות בזמן רציף	התמרת פורייה
ליניאריות	$ax(t)+by(t)$	$aX(f)+bY(f)$
סימטריה (דואליות)	$X(t)$	$x(-f)$
מתיחה וכיווץ (Scaling)	$x(at),\ a\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
הזזה בזמן	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
הזזה בתדר	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0),\quad \omega_0\in\mathbb{R}$
מכפלה ב $\cos$	$x(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}\left(X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right)$
מכפלה ב $\sin$	$x(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2j}\left(X(\omega-\omega_0)-X(\omega+\omega_0)\right)$
קונבולוציה בזמן	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)\cdot Y(\omega)$
קונבולוציה בתדר	$x(t)\cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)*Y(\omega)$
גזירה בזמן	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(j\omega)^n X(\omega)$
אינטגרציה בזמן	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
גזירה בתדר	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$
	$x(t)=x^*(t)$ (אות ממשי)	$X^*(\omega)=X(-\omega)$ $\mathrm{Re}\{X(\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-\omega)\}$ $\mathrm{Im}\{X(\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-\omega)\}$ $\lvert X(\omega)\rvert=\lvert X(-\omega)\rvert$ $\arg\{X(\omega)\}=-\arg\{X(-\omega)\}$
	$x^*(t)=x(-t)$	$X^*(\omega)=X(\omega)$ (התמרת ממשית)
	$x(t)=x(-t)$	$X(\omega)=X(-\omega)$
	$x(t)=-x(-t)$	$X(\omega)=-X(-\omega)$

<u>עקרון הדואליות</u>

נסמן את התמרת פורייה של אות $x(t)$: $\mathcal{F}\{x(t)\}=X(f)$, אזי :

$$\mathcal{F}\{X(t)\}=x(-f)$$

התמרת Z

הגדרה – התמרת Z דו-צדדית

התמרת Z דו-צדדית: (המקבילה להתמרת לפלס דו-צדדית, עבור אותות בזמן בדיד)

$$X(z) = Z\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

הגדרה – התמרת Z חד-צדדית

התמרת Z חד-צדדית: (המקבילה להתמרת לפלס חד-צדדית, עבור אותות בזמן בדיד)

$$X_+(z) = Z_+\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

תחום ההתכנסות של התמרת Z, $ROC - Region\,Of\,Convergence$, הוא התחום בו מתקיים

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n] z^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty$$

חישוב התמרת Z הפוכה:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_C z^{k-1} X(z) dz, \qquad C \subseteq ROC\{X(z)\}$$

אם מעגל היחידה $|z| = 1$ שייך לתחום ההתכנסות, אזי פשוט יותר לבצע את האינטגרציה על מעגל זה:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X\left(e^{j\theta}\right) e^{jn\theta} d\theta$$

ועבור r_0, כלומר מעגל כללי ברדיוס $|z| = r_0$, המוכל ב ROC:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} r_0^n \int_0^{2\pi} X\left(r_0 e^{j\theta}\right) e^{jn\theta} d\theta$$

שיטות נוספות למציאת התמרה הפוכה:

- טור חזקות של האות
- פירוק לשברים חלקיים
- שימוש בנוסחת הבינום של ניוטון $(a+b)^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} a^n b^{m-n}$

עבור אות בזמן בדיד $x[n]$, נגדיר את דגימת ההלמים שלו $x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(t-k)$ (כלומר נביט באת בזמן רציף בו בכל נקודה ש $x[n]$ היה מוגדר, ישנו הלם, ובזמנים אחרים האות הרציף הוא זהותית אפס), ואז ניתן לקבל את הקשר בין התמרת לפלס של האות הרציף (דגימת הלמים) להתמרת Z של סדרת המספרים (האות הבדיד):

$L\left\{x_c(t)\right\}(s) = Z\{x[n]\}(z)\big|_{z=e^s}$.

התמרות Z ידועות

אות בזמן בדיד	התמרת Z	תחום התכנסות
$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\0, & n\neq 0\end{cases}$	1	$z\in\mathbb{C}$
$\delta[n-m]=\begin{cases}1, & n=m\\0, & n\neq m\end{cases}$	z^{-m}	$z\in\begin{cases}\mathbb{C}\setminus\{0\}, & m>0\\ \mathbb{C}, & m=0\\ \mathbb{C}\setminus\{\infty\}, & m<0\end{cases}$
$u[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\0, & n<0\end{cases}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$	$\|z\|<1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|, \quad a\in\mathbb{C}$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$	$\|z\|<\|a\|, \quad a\in\mathbb{C}$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}=\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|, \quad a\in\mathbb{C}$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}=\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|<\|a\|, \quad a\in\mathbb{C}$
$\cos\left[\Omega_0 n\right]u[n]$	$\frac{z^2-z\cos\Omega_0}{z^2-2z\cos\Omega_0+1}$	$\|z\|>1$
$\sin\left[\Omega_0 n\right]u[n]$	$\frac{z\sin\Omega_0}{z^2-2z\cos\Omega_0+1}$	$\|z\|>1$
$r^n\cos\left[\Omega_0 n\right]u[n]$	$\frac{z^2-rz\cos\Omega_0}{z^2-2rz\cos\Omega_0+r^2}$	$\|z\|>r$
$r^n\sin\left[\Omega_0 n\right]u[n]$	$\frac{rz\sin\Omega_0}{z^2-2rz\cos\Omega_0+r^2}$	$\|z\|>r$
$\sin\left[\frac{n\pi}{2}\right]u[n]$	$\frac{z}{z^2+1}$	
$\cos\left[\frac{n\pi}{2}\right]u[n]$	$\frac{z^2}{z^2+1}$	
$a^{n-b}u[n-b]$	$z^{-b}\frac{z}{z-a}=\frac{z^{1-b}}{z-a}$	
$a^{n-1}u[n-1]$	$\frac{1}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|, \quad a\in\mathbb{C}$
$-a^{n-1}u[-n]$	$\frac{1}{z-a}$	$\|z\|<\|a\|, \quad a\in\mathbb{C}$

תכונות התמרת Z

אות בזמן בדיד	התמרת Z	תחום התכנסות
$x[n]$	$X(z)$	ROC_X
$y[n]$	$Y(z)$	ROC_Y
$ax[n]+bx[n], a,b\in\mathbb{C}$	$aX(z)+bY(z)$	לפחות $ROC_X \cap ROC_Y$
$x[n-n_0]$	בהתמרה דו-צדדית : $X(z)z^{-n_0}$ בהתמרה חד-צדדית : $Z_+\{y[n+k]\} = z^k Y_+(z) - z^k \sum_{m=0}^{k-1} y(m) z^{-m}$ $Z_+\{y[n-k]\} = z^{-k} Y_+(z) - z^{-k} \sum_{m=1}^{k} y(-m) z^{m}$ $\Rightarrow \begin{cases} Z_+\{y[n+1]\} = zY_+(z) - zy(0) \\ Z_+\{y[n-1]\} = z^{-1}Y_+(z) + y(-1) \end{cases}$	ROC_X בתוספת אולי של $z=0$
$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X\left(e^{-j\omega_0}z\right)$	ROC_X
$a^n x[n]$	$X\left(a^{-1}z\right)$	רדיוסי ההתכנסות מוכפלים ב $\|a\|$
$x[-n]$	$X\left(z^{-1}\right)$	רדיוס ההתכנסות הוא ההופכי של הרדיוס המקורי
$\begin{cases} x[r], & n=rk \\ 0, & else \end{cases}$	$X\left(z^k\right)$	רדיוס ההתכנסות הוא רדיוס המקורי בחזקת $\frac{1}{k}$
$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	לפחות $ROC_X \cap ROC_Y$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	לפחות $ROC_X \cap \{z : \|z\| > 1\}$
$x^*[n]$	$X^*(-z)$	
$nx[n]$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	ROC_X
$x[n]y[n]$		
$x[n]-x[n-1]$		
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$		
$nx[n]$		
$x[n]$ ממשי	$X^*(z) = X\left(z^*\right)$ $X_+^*(z) = X_+\left(z^*\right)$	

התמרת פורייה בזמן בדיד

הגדרה – התמרת פורייה בזמן בדיד (Discrete Time Fourier Transform) :

עבור אות בזמן בדיד $x[n]$, נגדיר את התמרת פורייה בזמן בדיד :

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}, \qquad \Omega \in \mathbb{R}$$

את ההתמרה ההפוכה נחשב ע״י

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

הערות/תוצאות :

1. באופן דואלי להתמרת לפלס ופורייה בזמן בדיד, התמרת פורייה בזמן בדיד קיימת כאשר התמרת Z של האות קיימת (מתכנסת) עבור $|z| = 1$, ואז, כאשר X_F התמרת פורייה בזמן בדיד ו X_Z התמרת Z :
$$X_F(\Omega) = X_Z\left(z = e^{j\Omega}\right)$$
2. התמרת פורייה בזמן בדיד מחזורית במחזור של 2π.
3. התמרת פורייה של אות היא מחזורית אס״ם האות בדיד.
4. התמרת פורייה של אות היא סימטרית (זוגית) אס״ם האות ממשי.
5. כאשר האות $x[n]$ ממשי, מתקיים $X(-\Omega) = X^*(\Omega)$, כלומר ניתן לשחזר את האות $x[n]$ רק על סמך ידיעת $X(\Omega)$ בקטע $[0, \pi]$.
6. משפטי פרסבל המתאימים (וע״י שימוש במחזוריות- 2π של התמרת פורייה בזמן בדיד) :
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \left|X(\Omega)\right|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X(\Omega)\right|^2 d\Omega$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} X(\Omega) Y^*(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) Y^*(\Omega) d\Omega$$
7. הקשר בין התמרת פורייה בזמן בדיד להתמרת פורייה בזמן רציף, עבור אות רציף $x_c(t)$ שנדגם לאות בדיד ע״י $x[n] = x_c(nT)$ הוא :
$$Z\{x[n]\}(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{T} L\left\{x_c(t)\right\}(s)\Big|_{s=j\frac{\Omega}{T}}$$

התמרות פורייה בזמן בדיד ידועות

אות בזמן בדיד	התמרת פורייה בזמן בדיד
$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$u[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\Omega-2\pi k)$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\omega_0-2\pi k)$
$\cos\omega_0 n$	$\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\omega_0-2\pi k)+\delta(\Omega+\omega_0-2\pi k)$
$\sin\omega_0 n$	$\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\omega_0-2\pi k)-\delta(\Omega+\omega_0-2\pi k)$
1	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$
$\frac{\alpha}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha n}{\pi}\right)=\frac{\sin\alpha n}{\pi n},\quad 0<\alpha<\pi$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\begin{cases}1, & 2\pi k\leq\lvert\Omega\rvert\leq 2\pi k+\alpha\\ 0, & 2\pi k+\alpha<\lvert\Omega\rvert\leq 2\pi k+\pi\end{cases}$

תכונות התמרת פורייה בזמן בדיד

אות בזמן בדיד	התמרת פורייה בזמן בדיד
$x[n]$	$X(\Omega)$
$y[n]$	$Y(\Omega)$
$ax[n]+bx[n], a,b\in\mathbb{C}$	$aX(\Omega)+bY(\Omega)$
$x[n-n_0]$	$X(\Omega)e^{-j\Omega n_0}$
$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(\Omega-\omega_0)$
$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
$x[n]*y[n]$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(s)Y(\Omega-s)ds$
$x[n]-x[n-1]$	$\left(1-e^{-j\Omega}\right)X(\Omega)$
$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)+\pi X(\Omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$
$nx[n]$	$j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$
$x[n]$ ממשי	$\begin{cases} X(\Omega)=X^*(-\Omega) \\ \operatorname{Re}X(\Omega)=\operatorname{Re}X(-\Omega) \\ \operatorname{Im}X(\Omega)=-\operatorname{Im}X(-\Omega) \\ \left\|X(\Omega)\right\|=\left\|X(-\Omega)\right\| \\ \arg X(\Omega)=-\arg X(-\Omega) \end{cases}$