גליון 1

פתרון לשאלה 1

X_4 הוא מ"א דיסקרטי פואסוני, כלומר $X_4 \sim Pois(\lambda)$.

ולכן פונקצית הפילוג:

$$F_{X_4}(k)=\sum_{n=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad k\ge 0$$

עבור X_5:

$$P\{X_5=k\}=\begin{cases}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, & 0\le k\le n\\ 0, & else\end{cases}$$

$$F_{X_5}=P\{X_5\le k\}=\begin{cases}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}, & k\le n\\ 1, & k>n\end{cases}$$

עבור X_6:

$$X_6=\begin{cases}X_1, & q\\ X_5, & 1-q\end{cases}$$

ולכן פונקצית הצפיפות של

$$\begin{aligned}F_{X_6}(x)&=P\{X_6\le x\}=P\{X_1\le x\mid head\}P\{head\}+P\{X_5\le x\mid tail\}P\{tail\}\\&=qP\{X_1\le x\mid head\}+(1-q)P\{X_5\le x\mid tail\}\\&=q\Phi(x)+(1-q)\sum_{n=0}^{\lfloor x\rfloor}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\end{aligned}$$

עבור X_7:

$$\begin{aligned}F_{X_7}(x)&=P\{X_7\le x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ P\{X_1^2\le x\}, & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ P\{-\sqrt{x}\le X_1\le\sqrt{x}\}, & x\ge 0\end{cases}\\&=\begin{cases}0, & x<0\\ \Phi\left(\frac{\sqrt{x}-\eta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\sqrt{x}-\eta}{\sigma}\right), & x\ge 0\end{cases}\\&=\left[2\Phi\left(\frac{\sqrt{x}-\eta}{\sigma}\right)-1\right]u(x)\end{aligned}$$

ולכן

$$f_{X_7}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-\eta}{\sigma}\right)^2}, & x\ge 0\end{cases}=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-\eta}{\sigma}\right)^2}u(x)$$

עבור X_8:

$$h(x)=3x+4$$

$$h^{-1}(y)=\frac{y-4}{3} \Rightarrow \frac{d}{dy}h^{-1}(y)=\frac{1}{3}$$

$$f_{X_8}(x)=\left|\left(h^{-1}(y)\right)'\right|f_{X_1}\left(h^{-1}(y)\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\eta)^2}{\sigma^2}}\Bigg|_{x=\frac{y-4}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-4-3\eta)^2}{9\sigma^2}}$$

כלומר $X_8\sim N(4+3\eta, 9\sigma^2)$.

פתרון לשאלה 2

עבור X_1 :

התוחלת של משתנה גאוסי זה היא

$$EX_1 = \eta$$

עבור X_2 :

התוחלת של משתנה מפולג באחידות היא אמצע הקטע, כלומר

$$EX_2 = \frac{b+a}{2}$$

עבור X_3 :

התוחלת של משתנה מעריכי זה היא

$$EX_3 = \frac{1}{c}$$

עבור X_4 :

תוחלת של משתנה פואסוני היא

$$EX_4 = \lambda$$

עבור X_5 :

תוחלת של משתנה בינומי היא

$$EX_5 = np$$

עבור X_6 :

נחשב ע"פ נוסחת התוחלת השלמה:

$$EX_6 = qE\left[X_1\right] + \left(1-q\right)E\left[X_5\right] = q\eta + \left(1-q\right)np$$

עבור X_7 :

$$EX_7 = EX_1^2 = \sigma_{X_1}^2 + \left(EX_1\right)^2 = \sigma^2 + \eta^2$$

עבור X_8 :

קיבלנו ש

$$f_{X_8}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(3\sigma\right)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\left(4+3\eta\right)}{3\sigma}\right)^2}$$

ולכן

$$EX_8 = 4 + 3\eta$$

פתרון לשאלה 3

עבור X_1 :

זהו משתנה גאוסי ולכן

$$\sigma_{X_1}^2=\sigma^2, \qquad EX_1^2=\sigma_{X_1}^2+\left(EX_1\right)^2=\sigma^2+\eta^2$$

עבור X_2 :

זהו משתנה שמפולג באחידות בקטע $\left[a,b\right]$, ולכן

$$\sigma_{X_2}^2=\frac{\left(b-a\right)^2}{12} \Rightarrow EX_2^2=\sigma_{X_2}^2+\left(EX_2\right)^2=\frac{\left(b-a\right)^2}{12}+\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

עבור X_3 :

זהו משתנה מעריכי, ולכן

$$\sigma_{X_3}^2=\frac{1}{c^2} \Rightarrow EX_3^2=\sigma_{X_3}^2+\left(EX_3\right)^2=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{2}{c^2}$$

עבור X_4 :

זהו משתנה פואסוני, ולכן

$$\sigma_{X_4}^2=\lambda \Rightarrow EX_4^2=\sigma_{X_4}^2+\left(EX_4\right)^2=\lambda+\lambda^2$$

עבור X_5 :

$$\sigma_{X_5}^2=np\left(1-p\right)$$

$$EX_5^2=\sigma_{X_5}^2+\left(EX_5\right)^2=np\left(1-p\right)+n^2p^2$$

עבור X_6 :

$$EX_6^2=qEX_1^2+\left(1-q\right)EX_5^2=q\left(\sigma^2+\eta^2\right)+\left(1-q\right)\left[np\left(1-p\right)+n^2p^2\right]$$

$$\sigma_{X_6}^2=EX_6^2-\left(EX_6\right)^2=q\left(\sigma^2+\eta^2\right)+\left(1-q\right)\left[np\left(1-p\right)+n^2p^2\right]-qn-\left(1-q\right)np$$

עבור X_7 :

$$\varphi_{X_1}\left(t\right)=e^{\eta t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

$$\Rightarrow EX_7^2=EX_1^4=\left.\frac{d\varphi_{X_1}^4\left(t\right)}{dt^4}\right|_{t=0}=\ldots=\eta^4+6\eta^2\sigma^2+3\sigma^4$$

$$\Rightarrow EX_7=EX_1^2=\eta^2+\sigma^2$$

$$\sigma_{X_7}^2=\operatorname{var}\left(X_1^2\right)=EX_1^4-\left(EX_1^2\right)^2=\eta^4+6\eta^2\sigma^2+3\sigma^4-\left(\eta^2+\sigma^2\right)^2=4\eta^2\sigma^2+\sigma^4$$

עבור X_8 :

$$EX_8^2=E\left(3X_1+4\right)^2=E\left(9X_1^2+24X_1+16\right)=9EX_1^2+24EX_1+16=9\left(\sigma^2+\eta^2\right)+24\eta+16$$

$$\sigma_{X_8}^2=EX_8^2-\left(EX_8\right)^2=9\left(\sigma^2+\eta^2\right)+24\eta+16-3\eta-4=9\left(\sigma^2+\eta^2\right)+21\eta+12$$

פתרון לשאלה 4

$$EX_2^3=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f_X\left(x\right)dx=\int_a^b x^3\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{b-a}\right]_a^b=\frac{b^4-a^4}{4\left(b-a\right)}$$

פתרון לשאלה 5

$$\varphi_{X_1}(\theta)=E\left[e^{i\theta X_1}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}f_{X_1}(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)^2}dx=e^{i\eta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\sigma}$$

$$\varphi_{X_2}(\theta)=E\left[e^{i\theta X_2}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}f_{X_2}(x)dx=\int_{a}^{b}e^{i\theta x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{i\theta x}}{i\theta}\right]_a^b=\frac{e^{i\theta b}-e^{i\theta a}}{i\theta(b-a)}$$

$$\varphi_{X_3}(\theta)=E\left[e^{i\theta X_3}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}f_{X_3}(x)dx=\int_{0}^{\infty}e^{i\theta x}ce^{-cx}dx=c\int_{0}^{\infty}e^{(i\theta-c)x}dx=c\left[\frac{e^{(i\theta-c)x}}{i\theta-c}\right]_0^{\infty}=-\frac{c}{i\theta-c}$$

$$\varphi_{X_4}(\theta)=E\left[e^{i\theta X_4}\right]=\sum_{x=-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}P_X(X=x)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{i\theta x}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}e^{ix\theta}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^{i\theta}\lambda\right)^x}{x!}=e^{-\lambda+\lambda e^{i\theta}}$$

$$\varphi_{X_5}(\theta)=E\left[e^{i\theta X_5}\right]=\sum_{x=-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}P_X(X=x)=\sum_{k=0}^{n}e^{i\theta k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=(1-p)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{pe^{i\theta}}{1-p}\right)^k 1^{n-k}=(1-p)^n\left(\frac{pe^{i\theta}}{1-p}+1\right)^n=\left(pe^{i\theta}+1-p\right)^n$$

פתרון לשאלה 6:

$$F_{X_1}(x)=P\{X_1\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\eta}{\sigma}\right)^2}dt$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{x}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\eta}{\sigma}\right)^2}dt\underset{y=\frac{t-\eta}{\sigma}}{=}1-\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{\frac{x-\eta}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2}\sigma dy=1-\sqrt{\sigma}Q\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)$$

$$F_{X_2}(x)=P\{X_2\le x\}=\begin{cases}0, & x<a\\ \int_a^x\frac{1}{b-a}dt, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

$$F_{X_3}(x)=P\{X_3\le x\}=\int_{-\infty}^{x}ce^{-ct}dt=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-cx}, & x\ge 0\end{cases}$$

פתרון לשאלה 7

ראינו כי

$$EX_6=qE[X_1]+(1-q)E[X_5]$$

ולכן בהנתן $X_1=\beta$ נקבל

$$E[X_6\,|\,X_1=\beta]=q\beta+(1-q)np$$

ומכיוון ש

$$X_7=X_1^2$$

נקבל

$$E[X_7\,|\,X_1]=X_1^2$$

פתרון לשאלה 8

מתקיים

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}$$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=\int_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\int_{r=0}^{z}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\sigma^2}}rdrd\theta$$

$$=\frac{2\pi}{2\pi\sigma^2}\int_{r=0}^{z}re^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\sigma^2}}dr=-\left[e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\sigma^2}}\right]_0^z=1-e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}$$

ולכן

$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\frac{d}{dz}\left(1-e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}\right)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

עבור $k=2$, המומנט השני הוא:

$$m_2=E\left[Z^2\right]=\int_0^\infty z^2\cdot\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}dz=\ldots=2\sigma^2$$

ועבור מומנט זוגי כלשהו, $k=2n$:

$$m_k=E\left[Z^k\right]=\int_0^\infty z^k\cdot\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}dz=\left[-z^ke^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}\right]_0^\infty+\int_0^\infty kz^{k-1}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}dz=\sigma^2\int_0^\infty kz^{k-2}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}dz$$

$$=\sigma^2kE\left[Z^{k-2}\right]=\sigma^2km_{k-2}$$

ולכן קיבלנו נוסחא רקורסיבית למונטים הזוגיים:

$$m_2=\sigma^2,\qquad m_k=\sigma^2km_{k-2}$$

כעת, עבור מומנט אי-זוגי כלשהו, $k=2n+1$:

$$m_k=E\left[Z^k\right]=\int_0^\infty z^k\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty z^k\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty z^k\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty z^k\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}dz$$

ואם נביט ב $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$, הרי שהמומנטים שלו הם

$$m_k\{X\}=\int_{-\infty}^\infty x^k\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}dx=\begin{cases}0, & k=2n+1\\ \sigma^2(k-1)!!, & k=2n\end{cases}$$

ולכן

$$m_k=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty z^k\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}dz=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\sigma^2}\int_{-\infty}^\infty z^{k+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma^2}}dz=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\sigma^2}\sigma^2(k+1-1)!!$$

$$=\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}(k!!)$$

פתרון לשאלה 9

$$B_1=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&0&-4\\3&-3&-1\end{pmatrix}$$

נחפש ע"ע וו"ע:

$$|B_1-\lambda I|=0\ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&0&-4\\3&-3&-1\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4\lambda&0&0\\0&4\lambda&0\\0&0&4\lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}3-4\lambda&1&-1\\4&-4\lambda&-4\\3&-3&-1-4\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-4\lambda&1&-1\\4-4\lambda&-4\lambda&-4\\0&-3&-1-4\lambda\end{vmatrix}=(4-4\lambda)\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-4\lambda&-4\\0&-3&-1-4\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (4-4\lambda)\left(\begin{vmatrix}4\lambda&4\\3&1+4\lambda\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&-1\\-4\lambda&-4\end{vmatrix}\right)=(1-\lambda)\big(4\lambda(1+4\lambda)-12+(4+4\lambda)\big)=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2\lambda^2+\lambda-1)=(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-\tfrac{1}{2})=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\quad \lambda_2=-1,\qquad \lambda_3=\tfrac{1}{2}$$

ו"ע עבור $\lambda_1=1$:

$$\left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&0&-4\\3&-3&1\end{pmatrix}-\lambda_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}-1&1&-1\\4&-4&-4\\3&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}a-b+c=0\\c=0\end{cases}\ \Rightarrow\ a=b\ \Rightarrow\ (1,1,0)$$

ו"ע עבור $\lambda_2=-1$:

$$\left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&0&-4\\3&-3&-1\end{pmatrix}-\lambda_2\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}7&1&-1\\4&4&-4\\3&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}7&1&-1\\7&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=0\\b=c\end{cases}\ \Rightarrow\ (0,1,1)$$

ו"ע עבור $\lambda_3=\frac{1}{2}$:

$$\left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&0&-4\\3&-3&-1\end{pmatrix}-\lambda_3\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1&1&-1\\4&-2&-4\\3&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=c\\b=0\end{cases}\ \Rightarrow\ (1,0,1)$$

לכן המטריצה האלכסונית המתאימה B_1^* והמטריצה המלכסנת P הן

$$B_1^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$B_1^n=\left(PB_1^*P^{-1}\right)^n=PB_1^*P^{-1}\cdot PB_1^*P^{-1}\cdot\ldots\cdot PB_1^*P^{-1}=P\left(B_1^*\right)^nP^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac12\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&\left(\frac12\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\(-1)^{n+1}&(-1)^n&(-1)^n\\\left(\frac12\right)^n&-\left(\frac12\right)^n&\left(\frac12\right)^n\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\left(\frac12\right)^n&1-\left(\frac12\right)^n&-1+\left(\frac12\right)^n\\1+(-1)^{n+1}&1+(-1)^n&-1+(-1)^n\\(-1)^{n+1}+\left(\frac12\right)^n&(-1)^n-\left(\frac12\right)^n&(-1)^n+\left(\frac12\right)^n\end{pmatrix}$$

ולכן הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}B_1^n$ לא קיים, כי הוא אינו קיים עבור כל איברי המטריצה.

עבור המטריצה השנייה:

$$B_2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1\\3&1&-3\\2&-2&0\end{pmatrix}$$

נחפש ע"ע וו"ע:

$$|B_2-\lambda I|=0\ \Rightarrow\ \left|\frac14\begin{pmatrix}3&1&-1\\3&1&-3\\2&-2&0\end{pmatrix}-\frac14\begin{pmatrix}4\lambda&0&0\\0&4\lambda&0\\0&0&4\lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}3-4\lambda&1&-1\\3&1-4\lambda&-3\\2&-2&-4\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-4\lambda&1&-1\\4-4\lambda&1-4\lambda&-3\\0&-2&-4\lambda\end{vmatrix}=(4-4\lambda)\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&1-4\lambda&-3\\0&-2&-4\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\ (4-4\lambda)\left(\begin{vmatrix}1-4\lambda&-3\\-2&-4\lambda\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&-1\\-2&-4\lambda\end{vmatrix}\right)=(1-\lambda)\left(-4\lambda(1-4\lambda)-6+(4\lambda+2)\right)=0$$

$$\Rightarrow\ (1-\lambda)\left(4\lambda^2-1\right)=0$$

$$\Rightarrow\ \lambda_1=1,\quad \lambda_2=\tfrac12,\qquad \lambda_3=-\tfrac12$$

לאחר מעט חישובים זהים לחישובים עבור המטריצה הקודמת, מקבלים את המטריצה האלכסונית המתאימה B_2^* והמטריצה המלכסנת P, והן

$$B_2^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac12&0\\0&0&-\frac12\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ P^{-1}=\frac12\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$B_2^n=\left(PB_2^*P^{-1}\right)^n=PB_2^*P^{-1}\cdot PB_2^*P^{-1}\cdot\ldots\cdot PB_2^*P^{-1}=P\left(B_2^*\right)^nP^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac12&0\\0&0&-\frac12\end{pmatrix}^n\cdot\frac12\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}=\frac12\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\left(\frac12\right)^n&0\\0&0&\left(-\frac12\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} B_1^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון לשאלה 10

ראשית, מתקיים

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & else \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & y \in [a,b] \\ 0, & else \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^2}, & (x,y) \in [a,b]\times[a,b] \\ 0, & else \end{cases}$$

ואז

$$F_V(\alpha) = P\{V \le \alpha\} = P\{X \le \alpha, Y \le \alpha\} = \int_{x=a}^{\alpha}\int_{y=a}^{\alpha} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \begin{cases} 1, & \alpha > b \\ \left(\frac{\alpha-a}{b-a}\right)^2, & a \le \alpha \le b \\ 0, & \alpha < a \end{cases}$$

$$F_U(\alpha) = P\{U \le \alpha\} = 1 - P\{U > \alpha\} = 1 - P\{X > \alpha, Y > \alpha\} =$$

$$= 1 - \int_{x=\alpha}^{b}\int_{y=\alpha}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1 - \begin{cases} 0, & \alpha > b \\ \frac{(b-\alpha)^2}{(b-a)^2}, & a \le \alpha \le b \\ 1, & \alpha < a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \alpha > b \\ \frac{(b-a)^2 - (b-\alpha)^2}{(b-a)^2}, & a \le \alpha \le b \\ 0, & \alpha < a \end{cases} = \begin{cases} 1, & \alpha > b \\ \frac{a^2 + 2b\alpha - 2ba - \alpha^2}{(b-a)^2}, & a \le \alpha \le b \\ 0, & \alpha < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; f_V(\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha} F_V(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha > b \\ 2\frac{\alpha-a}{(b-a)^2}, & a \le \alpha \le b \\ 0, & \alpha < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; f_U(\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha} F_U(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha > b \\ 2\frac{b-\alpha}{(b-a)^2}, & a \le \alpha \le b \\ 0, & \alpha < a \end{cases}$$

ולכן

$$EV=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha f_V(\alpha)d\alpha=\int_a^b \alpha\frac{2(\alpha-a)}{(b-a)^2}d\alpha=\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b(\alpha^2-a\alpha)d\alpha=\frac{2}{(b-a)^2}\left[\frac{\alpha^3}{3}-\frac{a\alpha^2}{2}\right]_a^b$$

$$=\frac{2}{(b-a)^2}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{ab^2}{2}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}\right)=\frac{2}{(b-a)^2}\left(\frac{b^3-a^3}{3}+\frac{a^3-ab^2}{2}\right)$$

$$EU=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha f_U(\alpha)d\alpha=2\int_a^b \alpha\frac{b-\alpha}{(b-a)^2}d\alpha=\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b(\alpha b-\alpha^2)d\alpha=\frac{2}{(b-a)^2}\left[\frac{\alpha^2 b}{2}-\frac{\alpha^3}{3}\right]_a^b$$

$$=\frac{2}{(b-a)^2}\left(\frac{b^3-a^2b}{2}+\frac{a^3-b^3}{3}\right)$$

פתרון לשאלה 11

ראשית, מתקיים

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4a^2}, & (x,y)\in[-a,a]\times[-a,a]\\ 0, & else\end{cases}$$

ולכן

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=P\{Y\le -X+z\}=\begin{cases}1, & z>2a\\ \frac{4a^2-\frac{1}{2}(2a-z)^2}{4a^2}, & 2a<z<0\\ \frac{\frac{1}{2}(2a+z)^2}{4a^2}, & -2a\le z<0\\ 0, & z<-2a\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f_Z(z)=\frac{\partial}{\partial z}F_Z(z)=\begin{cases}0, & z>2a\\ \frac{2a-z}{4a^2}, & 2a<z<0\\ \frac{2a+z}{4a^2}, & -2a\le z<0\\ 0, & z<-2a\end{cases}$$

$$F_{Z|X}(z|x)=P\{Z\le z|X=x\}=P\{x+Y\le z\}=P\{Y\le z-x\}=\begin{cases}1, & z-x>a\\ \int_{-a}^{z-x}f_Y(y)dy, & -a<z-x<a\\ 0, & z-x<-a\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & z-x>a\\ \frac{z-x+a}{2a}, & -a<z-x<a\\ 0, & z-x<-a\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f_{Z|X}(z|x)=\frac{\partial}{\partial z}F_{Z|X}(z|x)=\begin{cases}0, & z>x+a\\ \frac{1}{2a}, & x-a<z<x+a\\ 0, & z<x-a\end{cases}$$

פתרון לשאלה 12

ראשית נחשב את הפונקציה האופיינית של משתנה אקראי X פואסוני עם פרמטר λ ($P\left(X=n\right)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$):

$$\varphi_X\left(t\right)=E\left[e^{jXt}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jnt}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{jt}\right)^n}{n!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{jt}}$$

וכעת נחשב את הפונקציה האופיינית של $Z=X+Y$, כאשר $X\sim Pois\left(\lambda_x\right),Y\sim Pois\left(\lambda_y\right)$:

$$\varphi_Z\left(t\right)=E\left[e^{jZt}\right]=E\left[e^{j(X+Y)t}\right]=E\left[e^{jXt}e^{jYt}\right]=E\left[e^{jXt}\right]E\left[e^{jYt}\right]=e^{-\lambda_x}e^{\lambda_x e^{jt}}e^{-\lambda_y}e^{\lambda_y e^{jt}}=e^{-\left(\lambda_x+\lambda_y\right)}e^{\left(\lambda_x+\lambda_y\right)e^{jt}}$$

ולכן

$$Z\sim Pois\left(\lambda_x+\lambda_y\right)$$

לכן

$$EZ=\left(-j\right)^1\frac{d\varphi_Z\left(t\right)}{dt}\bigg|_{t=0}=-j\frac{d}{dt}\left(e^{-\left(\lambda_x+\lambda_y\right)}e^{\left(\lambda_x+\lambda_y\right)e^{jt}}\right)\bigg|_{t=0}=-je^{-\left(\lambda_x+\lambda_y\right)}\left(e^{\left(\lambda_x+\lambda_y\right)e^{jt}}\cdot\left(\lambda_x+\lambda_y\right)je^{jt}\right)\bigg|_{t=0}$$

$$=-je^{-\left(\lambda_x+\lambda_y\right)}e^{\left(\lambda_x+\lambda_y\right)}\left(\lambda_x+\lambda_y\right)j=\lambda_x+\lambda_y$$

$$EZ^2=\left(-j\right)^2\frac{d^2\varphi_Z\left(t\right)}{dt^2}\bigg|_{t=0}=-j\left(\lambda_x+\lambda_y\right)e^{-\left(\lambda_x+\lambda_y\right)}\frac{d}{dt}\left(e^{\left(\lambda_x+\lambda_y\right)e^{jt}}e^{jt}\right)\bigg|_{t=0}$$

$$=-j\left(\lambda_x+\lambda_y\right)e^{-\left(\lambda_x+\lambda_y\right)}\left(je^{jt}e^{\left(\lambda_x+\lambda_y\right)e^{jt}}+\left(\lambda_x+\lambda_y\right)je^{jt}e^{\left(\lambda_x+\lambda_y\right)e^{jt}}e^{jt}\right)\bigg|_{t=0}$$

$$=-j\left(\lambda_x+\lambda_y\right)e^{-\left(\lambda_x+\lambda_y\right)}\left(je^{\left(\lambda_x+\lambda_y\right)}+\left(\lambda_x+\lambda_y\right)je^{\left(\lambda_x+\lambda_y\right)}\right)$$

$$=\left(\lambda_x+\lambda_y\right)\left(1+\left(\lambda_x+\lambda_y\right)\right)=\lambda_x+\lambda_y+\left(\lambda_x+\lambda_y\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \operatorname{var}Z=EZ^2-\left(EZ\right)^2=\lambda_x+\lambda_y+\left(\lambda_x+\lambda_y\right)^2-\left(\lambda_x+\lambda_y\right)^2=\lambda_x+\lambda_y$$

פתרון לשאלה 13

<u>סעיף א</u>

הטענה נכונה. הוכחה:

$$E[XY]=E\left[E[XY\mid Y]\right]=E\left[YE[X\mid Y]\right]\underset{given}{=}E[YEX]=EYEX$$

$$\Rightarrow\ \operatorname{cov}(X,Y)=0$$

<u>סעיף ב</u>

הטענה לא נכונה. דוגמנגדית:

נבחר (X,Y) מפולגים באופן אחיד במעגל היחידה:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2<1\\ 0, & else\end{cases}$$

מכיוון שהצפיפות המשותפת אינה מוגדרת בקטע מלבני, X,Y בהכרח תלויים.

כעת,

$$f_X(x)=\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\quad\Rightarrow\quad EX=0$$

$$f_Y(y)=\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f_{X,Y}(x,y)\,dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},\qquad -1<y<1$$

ומתקיים

$$E[X\mid Y]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X\mid Y}(x\mid y)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dx=\int_{-1}^{1}x\frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}}dx=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\int_{-1}^{1}xdx=0$$

כלומר מתקיימת הדרישה

$$E[X\mid Y]=E[X]$$

אך X,Y אינם בת"ס.

גליון 2

פתרון לשאלה 1

סעיף א

נסמן $\underline{\underline{C}}=\Lambda_x=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$. ע"פ משפט, מתקיים $\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{U}}^T$, כאשר $\underline{\underline{\Lambda}}$ המטריצה האלכסונית של $\underline{\underline{C}}=\operatorname{cov}(\underline{X})\geq 0$, ו $\underline{\underline{U}}$ המטריצה האוניטרית המלכסנת את $\underline{\underline{C}}$.

$\underline{Y}$ הוא וא"ג מכיוון שהוא טרנספורמציה ליניארית של וא"ג $\underline{X}$. אם נמצא טרנספורמציה $\underline{\underline{A}}$ כך שאברי $\underline{Y}=\underline{\underline{A}}\underline{X}$ יהיו חסרי קורלציה, מכיוון שבוקטור גאוסי עסקינן, אברי $\underline{Y}$ יהיו בת"ס.

באופן כללי, כדי להלבין ו"א $\underline{X}$, יש לכפול אותו במטריצה $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{U}}^T$, כאשר $\underline{\underline{\Lambda}}$ המטריצה האלכסונית של $\underline{\underline{C}}=\operatorname{cov}(\underline{X})\geq 0$, ו $\underline{\underline{U}}$ המטריצה האוניטרית המלכסנת את $\underline{\underline{C}}$. זאת מכיוון שיתקיים:

$$\operatorname{cov}(\underline{Y})=\underline{\underline{A}}\operatorname{cov}(\underline{X})\underline{\underline{A}}^T=\underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{U}}^T\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{U}}^T\right)^T=\underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{U}}^T\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{U}}^T\underline{\underline{U}}\left(\underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}}\right)^T=\underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}}=\underline{\underline{I}}$$

נחשב את $\underline{\underline{\Lambda}}$ ו $\underline{\underline{U}}$ ע"י מציאת הע"ע והו"ע של $\underline{\underline{C}}=\Lambda_x=\operatorname{cov}(\underline{X})$:

$$\left|\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right|=0\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}3-\lambda&1\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(\lambda-4)(\lambda-2)=0$$

$$\Rightarrow\ \lambda_1=2,\quad \lambda_2=4$$

עבור $\lambda_1=2$:

$$\begin{pmatrix}3-2&1\\1&3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ a=-b\ \Rightarrow\ v_1=(1,-1)$$

עבור $\lambda_2=4$:

$$\begin{pmatrix}3-4&1\\1&3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow\ a=b\ \Rightarrow\ v_2=(1,1)$$

לכן

$$\underline{\underline{\Lambda}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix},\quad \underline{\underline{U}}=a\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\qquad \underline{\underline{U}}^T=a\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

נדרוש

$$\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}^T=a\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}a\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=I$$

$$\Rightarrow\ a^2\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2a^2I=I\ \Rightarrow\ 2a^2=1\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

כלומר

$$\underline{\underline{\Lambda}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix},\quad \underline{\underline{U}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\qquad \underline{\underline{U}}^T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

נוודא:

$$\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{U}}^T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$$

כלומר נבחר

$$\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{U}}^T=\begin{pmatrix}2^{-\frac{1}{2}}&0\\0&4^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

הוקטור $\underline{b}$ לא השפיע על בחירת $\underline{\underline{A}}$ מכיוון שאינו משפיע על הקווריאנס. נבחר את $\underline{b}$ כך ש:

$$E\underline{Y}=E\left[\underline{\underline{A}}\underline{X}+\underline{b}\right]=\underline{\underline{A}}E\underline{X}+\underline{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\underline{b}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\underline{b}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{b}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 1-\frac{3}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

לסיכום:

$$\underline{Y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}\underline{X}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 1-\frac{3}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

<u>סעיף ב</u>

$$f_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\left|\underline{\underline{\Delta}}_x\right|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-E\underline{x}\right)^T\underline{\underline{\Delta}}_x^{-1}\left(\underline{x}-E\underline{x}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{8}}\exp\left\{-\frac{1}{16}\left(x_1-1,x_2-2\right)\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-1\\ x_2-2\end{pmatrix}\right\}$$

$$f_{\underline{Y}}\left(\underline{y}\right)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2|I|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{y}-E\underline{y}\right)^T I^{-1}\left(\underline{y}-E\underline{y}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y_1-1,y_2-1\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1-1\\ y_2-1\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(y_1-1)^2+(y_2-1)^2}{2}}$$

<u>סעיף ג</u>

לא. $\Lambda_Y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ אינה מטריצה אי-שלילית (כי הערכים העצמיים הם $\lambda_{1,2}=4,-2$) ולכן אינה יכולה להיות מטריצת קווריאנס.

פתרון לשאלה 2

<u>סעיף א</u>

מכיוון ש

$$f_{X_n|X_{n-1},\dots,X_0}\left(x_n\,|\,x_{n-1},\dots,x_0\right)\cdot f_{X_{n-1}|X_{n-2},\dots,X_0}\left(x_{n-1}\,|\,x_{n-2},\dots,x_0\right)\cdot\ldots\cdot f_{X_1|X_0}\left(x_1\,|\,x_0\right)\cdot f_{X_0}\left(x_0\right)=$$

$$=\frac{f_{X_n,X_{n-1},\dots,X_0}\left(x_n,x_{n-1},\dots,x_0\right)}{f_{X_{n-1},\dots,X_0}\left(x_{n-1},\dots,x_0\right)}\cdot\frac{f_{X_{n-1},X_{n-2},\dots,X_0}\left(x_{n-1},x_{n-2},\dots,x_0\right)}{f_{X_{n-2},\dots,X_0}\left(x_{n-2},\dots,x_0\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{f_{X_1,X_0}\left(x_1,x_0\right)}{f_{X_0}\left(x_0\right)}\cdot f_{X_0}\left(x_0\right)=$$

$$=f_{X_n,X_{n-1},\dots,X_0}\left(x_n,x_{n-1},\dots,x_0\right)$$

ומצד שני

$$f_{X_n|X_{n-1},\dots,X_0}\left(x_n\,|\,x_{n-1},\dots,x_0\right)\cdot f_{X_{n-1}|X_{n-2},\dots,X_0}\left(x_{n-1}\,|\,x_{n-2},\dots,x_0\right)\cdot\ldots\cdot f_{X_1|X_0}\left(x_1\,|\,x_0\right)\cdot f_{X_0}\left(x_0\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_1-x_0)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_0)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}e^{-\frac{1}{2}\left\{(x_n-x_{n-1})^2+(x_{n-1}-x_{n-2})^2+\ldots+(x_0)\right\}^2}$$

הרי ש

$$f_{X_n,X_{n-1},\dots,X_0}\left(x_n,x_{n-1},\dots,x_0\right)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}e^{-\frac{1}{2}\left\{(x_n-x_{n-1})^2+(x_{n-1}-x_{n-2})^2+\ldots+(x_0)\right\}^2}$$

ואז

$$f_{X_n|X_{n-1}}\left(x_n|x_{n-1}\right)=\frac{f_{X_n,X_{n-1}}\left(x_n,x_{n-1}\right)}{f_{X_{n-1}}\left(x_{n-1}\right)}=\frac{\int\cdots\int f_{X_n,X_{n-1},\ldots,X_0}\left(x_n,x_{n-1},\ldots,x_0\right)dx_{n-2}dx_{n-3}\cdot\ldots\cdot dx_0}{\int\cdots\int f_{X_{n-1},X_{n-2},\ldots,X_0}\left(x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0\right)dx_{n-2}dx_{n-3}\cdot\ldots\cdot dx_0}$$

$$=\frac{\int\cdots\int\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}e^{-\frac{1}{2}\left\{(x_n-x_{n-1})^2+(x_{n-1}-x_{n-2})^2+\ldots+(x_0)\right\}^2}dx_{n-2}dx_{n-3}\cdot\ldots\cdot dx_0}{\int\cdots\int\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n-1}}}e^{-\frac{1}{2}\left\{(x_{n-1}-x_{n-2})^2+(x_{n-2}-x_{n-3})^2+\ldots+(x_0)\right\}^2}dx_{n-2}dx_{n-3}\cdot\ldots\cdot dx_0}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})^2}\int\cdots\int\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n-1}}}e^{-\frac{1}{2}\left\{(x_{n-1}-x_{n-2})^2+\ldots+(x_0)\right\}^2}dx_{n-2}dx_{n-3}\cdot\ldots\cdot dx_0}{\int\cdots\int\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n-1}}}e^{-\frac{1}{2}\left\{(x_{n-1}-x_{n-2})^2+(x_{n-2}-x_{n-3})^2+\ldots+(x_0)\right\}^2}dx_{n-2}dx_{n-3}\cdot\ldots\cdot dx_0}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})^2}$$

מהנתון :

$$X_n|X_{n-1},\ldots,X_0\sim N\left(X_{n-1},0\right)$$

קיבלנו ש

$$f_{X_n|X_{n-1}}\left(x_n|x_{n-1}\right)=f_{X_n|X_{n-1},\ldots,X_0}\left(x_n|x_{n-1},\ldots,x_0\right)$$

מ.ש.ל.

<u>סעיף ב</u>

$$E\left[X_n\right]=E\left[E\left[X_n|X_{n-1}\right]\right]=E\left[X_{n-1}\right]\ \Rightarrow\ E\left[X_i\right]=E\left[X_{i-1}\right]=\ldots=E\left[X_0\right]=0\ \Rightarrow\ E\left[X_n\right]=0$$

$$\operatorname{var}\left(X_n\right)=EX_n^2-\left(EX_n\right)^2=EX_n^2=E\left[E\left[X_n^2|X_{n-1},\ldots,X_0\right]\right]=E\left[1+\left(X_{n-1}\right)^2\right]=1+E\left[X_{n-1}^2\right]$$

ולכן

$$EX_n^2=1+E\left(X_{n-1}^2\right)=2+E\left(X_{n-2}^2\right)\ \Rightarrow\ EX_n^2=n+\left(EX_0\right)^2=n+1$$

$$E\left[X_n|X_0\right]=E\left[E\left[X_n|X_{n-1},X_0\right]|X_0\right]=E\left[X_{n-1}|X_0\right]\ \Rightarrow\ E\left[X_i|X_0\right]=E\left[X_{i-1}|X_0\right]=E\left[X_0|X_0\right]=X_0$$

$$\Rightarrow\ E\left[X_n|X_0\right]=X_0$$

$$\operatorname{var}\left(X_n|X_0\right)=E\left[X_n^2|X_0\right]-\left(E\left[X_n|X_0\right]\right)^2=E\left[X_n^2|X_0\right]-X_0^2$$

$$=E\left[E\left[X_n^2|X_{n-1},X_0\right]|X_0\right]-X_0^2=$$

$$=E\left[1+X_{n-1}^2|X_0\right]-X_0^2=E\left[X_{n-1}^2|X_0\right]+1-X_0^2=\left(E\left[X_{n-2}^2|X_0\right]+1\right)+1-X_0^2$$

$$=\left(\left(E\left[X_{n-3}^2|X_0\right]+1\right)+1\right)+1-X_0^2$$

$$\Rightarrow\ \operatorname{var}\left(X_n|X_0\right)=n$$

<u>סעיף ג</u>

מהגדרת הצפיפות המותנית :

$$f_{X_1|X_0}=\frac{f_{X_0,X_1}\left(x_0,x_1\right)}{f_{X_0}\left(x_0\right)}\ \Rightarrow\ f_{X_0,X_1}\left(x_0,x_1\right)=f_{X_1|X_0}\cdot f_{X_0}\left(x_0\right)$$

פילוג X_0 ידוע וכמו גם פילוג $X_1|X_0$ ולכן

$$f_{X_0,X_1}(x_0,x_1)=f_{X_1|X_0}\cdot f_{X_0}(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x_1-x_0)^2}{2}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x_0^2}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x_0^2+(x_1-x_0)^2}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}}\exp\left\{-\frac{2x_0^2+x_1^2-x_1x_0}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_0 & x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}\right\}$$

לכן x_0,x_1 מ"א גאוסיים במשותף, עם מטריצת קווריאנס

$$\underline{\underline{\Sigma}}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

<u>סעיף ד</u>

$$E[X_nX_{n-\ell}]=E\left[E[X_nX_{n-\ell}\,|\,X_{n-1},X_{n-\ell}]\right]=E\left[X_{n-\ell}\cdot E[X_n\,|\,X_{n-1},X_{n-\ell}]\right]=E[X_{n-1}X_{n-\ell}]$$

ולכן באינדוקציה

$$E[X_nX_{n-\ell}]=E[X_{n-1}X_{n-\ell}]=\ldots=E[X_{n-\ell}X_{n-\ell}]=E\left(X_{n-\ell}^2\right)$$

ואת המומנט השני חישבנו בסעיף ב:

$$E[X_nX_{n-\ell}]=E\left(X_{n-\ell}^2\right)=n-\ell+1$$

פתרון לשאלה 3

ראשית נוכיח עבור $n=3$, ונסמן את המשתנים X,Y,Z. נשתמש בתוצאה האומרת כי כי המשערך $E[\underline{X}_1\,|\,\underline{X}_2]$ הוא פונקציה ליניארית ב $\underline{X}_2$, כאשר $(\underline{X}_1\underline{X}_2)$ וא"ג.

$$E[XYZ]=E\left[E[XYZ\,|\,Y,Z]\right]=E\left[YZ\cdot E[X\,|\,Y,Z]\right]=E\left[YZ(aY+bZ)\right]$$
$$=aE\left[Y^2Z\right]+bE\left[YZ^2\right]=aE\left[E\left[Y^2Z\,|\,Y\right]\right]+bE\left[E\left[YZ^2\,|\,Z\right]\right]$$
$$=aE\left[Y^2E[Z\,|\,Y]\right]+bE\left[Z^2E[Y\,|\,Z]\right]=$$
$$=aE\left[Y^2\cdot cY\right]+bE\left[Z^2\cdot dZ\right]=acEY^3+bdEZ^3=0+0=0$$

$$E[X_1X_2\cdots X_n]=E\left[E[X_1X_2\cdots X_n\,|\,X_2,X_3,\ldots,X_n]\right]=E\left[X_2\cdots X_nE[X_1\,|\,X_2,X_3,\ldots,X_n]\right]$$
$$=E\left[X_2\cdots X_n(a_2X_2+a_3X_3+\ldots+a_nX_n)\right]$$
$$=a_2E[X_2\cdots X_n\cdot X_2]+a_3E[X_2\cdots X_n\cdot X_3]+\ldots+a_nE[X_2\cdots X_n\cdot X_n]$$

קיבלנו סכום תוחלות של כפולות של המשתנים $X_2,\ldots,X_n$, כל פעם כפולות מסדר אי-זוגי.

אם נמשיך להשתמש במשפט ההחלקה n פעמים, ובנוסף נשתמש בעובדה כי המשערך $E[\underline{X}_1\,|\,\underline{X}_2]$ הוא פונקציה ליניארית ב $\underline{X}_2$, כאשר $(\underline{X}_1\underline{X}_2)$ וא"ג. נגיע לסכום תוחלות כ"א במשתנה אחד בחזקת n. מכיוון שכל מומנט אי-זוגי של משתנה גאוסי ממורכז היא 0, נקבל שהסכום הכולל הוא 0.

פתרון לשאלה 4

<u>סעיף א</u>

$Y_1=aX_1+b$ מ"א גאוסי מכיוון שהוא ק"ל של מ"א גאוסי $Y_1\sim N(b,a^2)$. עבור Y_2:

$$F_{Y_2}(\alpha)=P(Y_2\le\alpha)=P(Y_2\le\alpha\,|\,B=1)P(B=1)+P(Y_2\le\alpha\,|\,B=-1)P(B=-1)$$
$$=pP(aX_1+b\le\alpha\,|\,B=1)+(1-p)P(aX_2+b\le\alpha\,|\,B=-1)$$
$$=pP(aX_1+b\le\alpha)+(1-p)P(aX_2+b\le\alpha)=pP\left(X_1\le\frac{\alpha-b}{a}\right)+(1-p)P\left(X_2\le\frac{\alpha-b}{a}\right)$$
$$=p\Phi\left(\frac{\alpha-b}{a}\right)+(1-p)\Phi\left(\frac{\alpha-b}{a}\right)=\Phi\left(\frac{\alpha-b}{a}\right)$$

ולכן Y_2 מ"א גאוסי $Y_2\sim N(b,a^2)$.

סעיף ב

אם Y_1,Y_2 היו גאוסים במשותף, אזי כל ק"ל שלהם היתה מ"א גאוסי.

נביט במשתנה $Z=Y_2-Y_1$:

$$Z=\begin{cases} aX_1+b-(aX_1+b), WP & p \\ aX_2+b-(aX_1+b), WP & 1-p \end{cases} = \begin{cases} 0, & WP \quad p \\ a(X_2-X_1), & WP \quad 1-p \end{cases}$$

משתנה זה מקבל ערך בדיד, 0, בהסתברות $p>0$, ולכן אינו מ"א רציף, ולכן בפרט אינו גאוסי.

מכאן ש Y_1,Y_2 לא יכולים להיות גאוסים במשותף.

פתרון לשאלה 5

סעיף א

נתון כי

$$\Sigma_{XY}=\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{XY}^{-1}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

X,Y גאוסים במשותף, ולכן $U=X+Y$ גאוסי, וגם $V=X-Y$ גאוסי (הם ק"ל של מ"א גאוסיים). כעת

$$EU=E(X+Y)=EX+EY=0$$

$$EV=E(X-Y)=EX-EY=0$$

$$\operatorname{var}U=\operatorname{var}(X+Y)=\operatorname{var}X+2\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{var}Y=1+2(\rho\cdot 1\cdot 1)+1=2(1+\rho)$$

$$\operatorname{var}V=\operatorname{var}(X-Y)=\operatorname{var}X-2\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{var}Y=1-2(\rho\cdot 1\cdot 1)+1=2(1-\rho)$$

$$\operatorname{cov}(U,V)=\operatorname{cov}(X+Y,X-Y)=\operatorname{cov}(X,X)-\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Y,X)-\operatorname{cov}(Y,Y)$$
$$=\operatorname{var}X-\operatorname{var}Y=0$$

כלומר U,V בלתי מתואמים, ולכן בת"ס ולכן (U,V) וא"ג, עם מטריצת הקווריאנס

$$\underline{\underline{\Lambda}}=2\begin{pmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix}$$

ולכן פונקצית הצפיפות היא

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\frac{4}{1-\rho^2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{4}{1-\rho^2}\left((u,v)\begin{pmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1+\rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)\right\}$$

סעיף ב

כבר אמרנו כי $V\sim N(0,2(1-\rho)), \quad U\sim N(0,2(1+\rho))$ ו V גאוסיים כ"א, ולכן

$$f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{4\pi(1+\rho)}}e^{-\frac{1}{4}\frac{u^2}{1+\rho}}, \quad f_V(v)=\frac{1}{\sqrt{4\pi(1-\rho)}}e^{-\frac{1}{4}\frac{v^2}{1-\rho}}$$

גליון 2 – חלק שני: תרגיל מחשב

פתרון לשאלה 1

סעיף א

טעות זו תגרום לקלט אקראי (סדרת קלט) זהה בכל ריצה וריצה, במקום ליצור סדרות קלט אקראיות שונה בין ריצות שונות.

סעיף ב

לא – יש לדאוג לתעד את ה $State$ לכל ריצה, ויש להתשמש ב $State$ המתאים כדי לשחזר את סט המספרים האקראיים.

סעיף ג

מכיוון שמספר אקראי מסופק לפי המצב של המחולל, הרי שאורך הסדרה האקראית המכסימלית הוא מספר המצבים שקיימים לכן, אם נקבל מהמחולל סדרה אינסופית של מספרים אקראיים, נוכל למצוא את מספר המספרים האקראיים השונים, c, ולכן מספר הביטים של מצב המחולל הוא $n=\log_2 c$.

פתרון לשאלה 2

סעיף א

ראשית

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\\ 0, & else\end{cases}$$

במקרה שלנו:

$$Z=9X-Y$$

ולכן

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(9X-Y\le z)=P(Y\ge 9X-z)$$

$$=\begin{cases}1, & z\ge 9\\ 1-\dfrac{\left(1-\frac{z}{9}\right)(9-z)}{2}, & 8<z<9\\ \dfrac{\frac{1+z}{9}+\frac{z}{9}}{2}\cdot 1, & 0<z<8\\ \dfrac{(1+z)\left(\frac{1+z}{9}\right)}{2}, & -1<z<0\\ 0, & z\le -1\end{cases}
=\begin{cases}1, & z\ge 9\\ \dfrac{18z-z^2-63}{18}, & 8<z<9\\ \dfrac{1+2z}{18}, & 0\le z\le 8\\ \dfrac{(1+z)^2}{18}, & -1<z<0\\ 0, & z\le -1\end{cases}$$

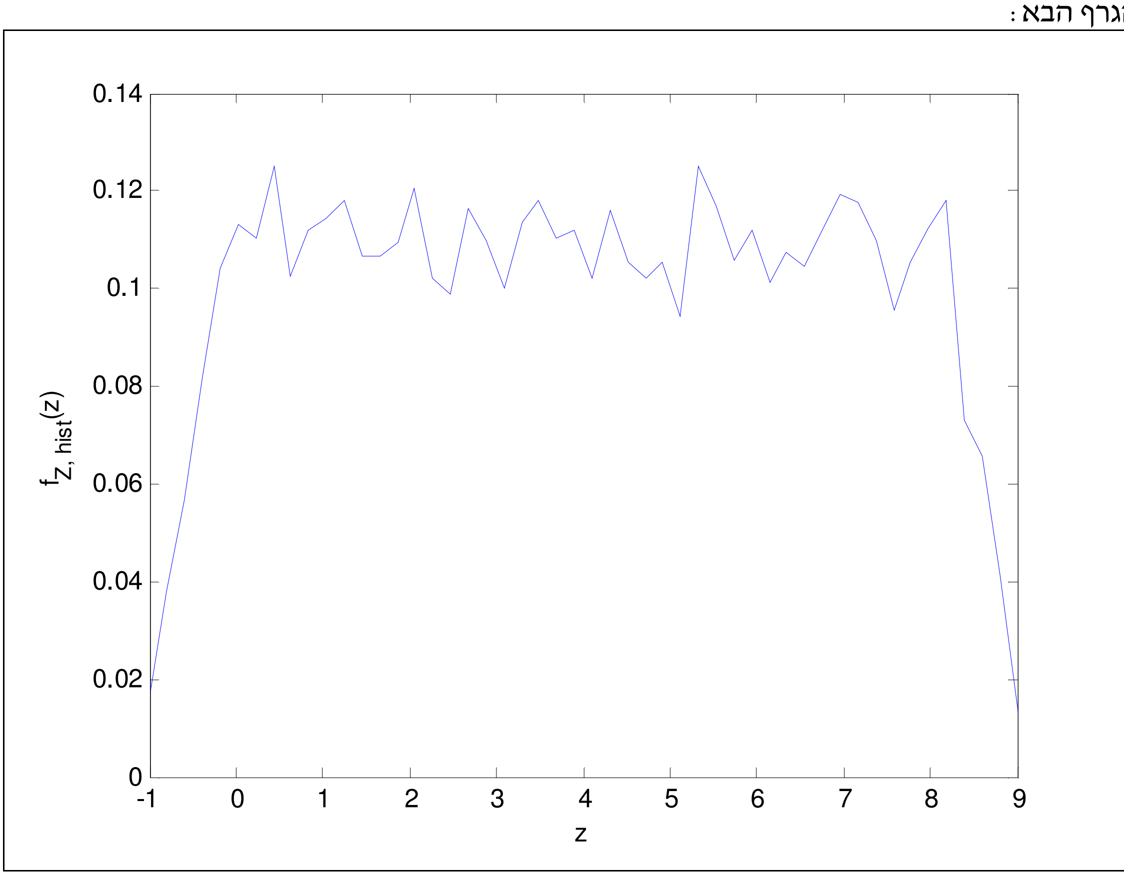
$$\Rightarrow\ f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\ge 9\\ 1-\frac{z}{9}, & 8<z<9\\ \frac{1}{9}, & 0\le z\le 8\\ \dfrac{1+z}{9}, & -1<z<0\\ 0, & z\le -1\end{cases}$$

סעיף ב

בעזרת הקוד הבא:

```
s0 = 8; % Last digit in my ID
s1 = 0; % Last-1 digit in my ID

interval = 9 - (-1); % The size of our relevant interval

size=50; % Size of the vectors.
count=10^4; % Number of measurements
P=linspace (-1,9,size); % Probability values
X=linspace(-1,9,size); % The X axis

x = rand(1,count);
y = rand(1,count);

Z=(1+s0)*x - (1+s1)*y;
P = hist(Z,size) / (interval/size) / count;
plot (X, P, 'b-');
```

מתקבל הגרף הבא:

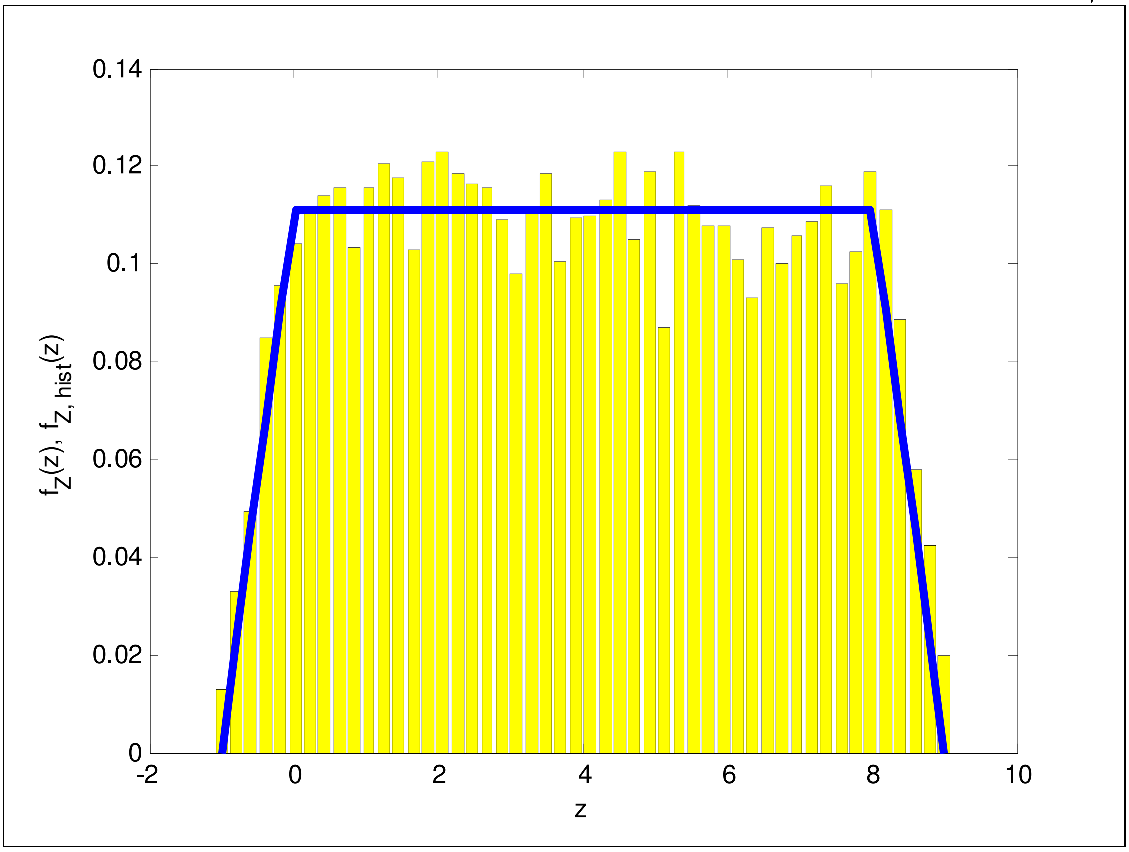


סעיף ג

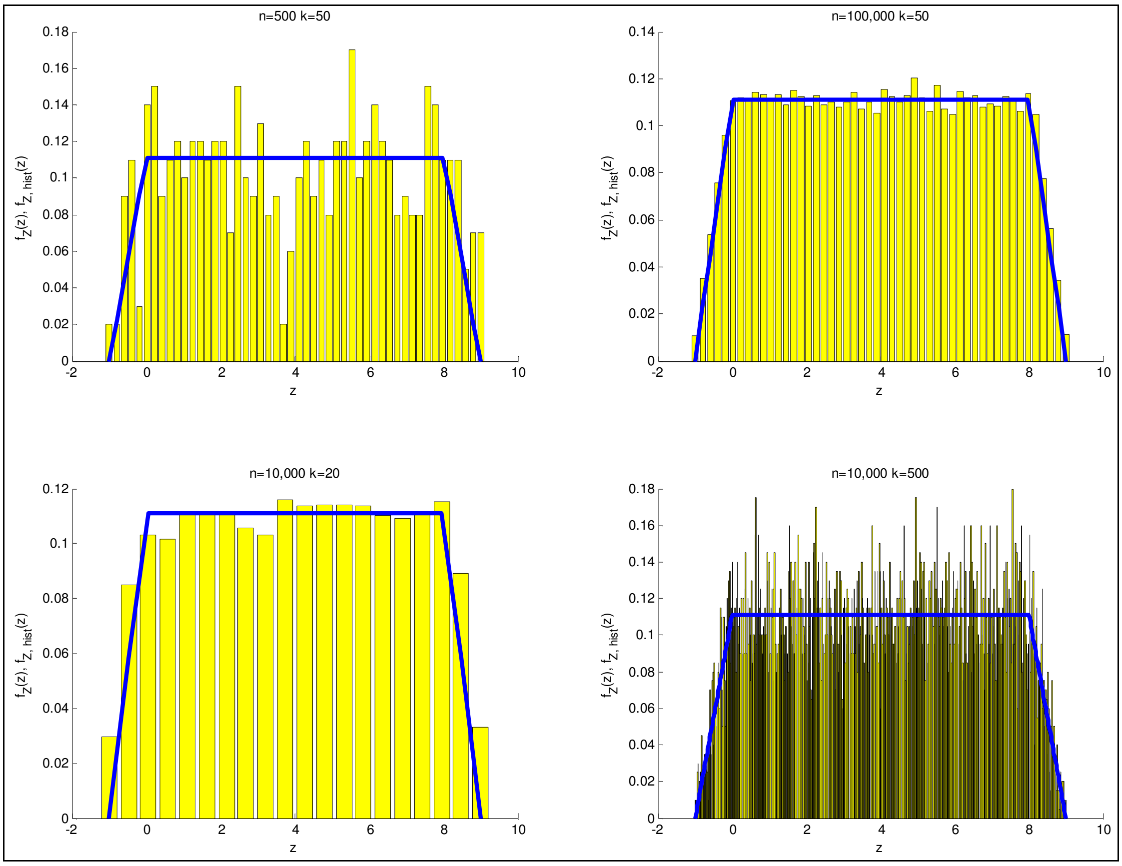
בעזרת הקוד הבא :

```
s0 = 8; % Last digit in my ID
s1 = 0; % Last-1 digit in my ID

interval = 9 - (-1); % The size of our relevant interval

size=50; % Size of the vectors.
count=10^4; % Number of measurements
P=linspace (-1,9,size); % Probability values
x=linspace(-1,9,size); % The X axis
one=ones(size);
P_actual = (x>8) .* (x<9) .* (1-x / 9) + (x>0) .* (x<8) .* 1/9 +  (x>-1) .*
(x<0) .* (1+x)/9;

X = rand(1,count);
Y = rand(1,count);

Z=(1+s0)*X - (1+s1)*Y;
P = hist(Z,size) / (interval/size) / count;

bar (x, P,'y');
hold on;
plot (x, P_actual, 'b','Linewidth',3);
hold off;
```

מתקבל הגרף הבא :



סעיפים ד' ו-ה'



סעיף ו

פרמטרים k ו n הם בעצם הגורמים של המכנה בהערכת פונקצית הצפיפות :

$$f_x(\alpha) \approx \frac{N_{[\alpha,\beta)}}{n(\beta-\alpha)} \triangleq \frac{N_{[\alpha,\beta)}}{n \cdot k}$$

ולכן הגדלתם תגרור חישוב טוב יותר של פונקצית הצפיפות.

הגדלת k גורמת לחילוק לאינטרוולים $(\beta-\alpha)$ קטנים יותר, וכך חישוב קרוס יותר לפונקצית הצפיפות.

הגדלת n גורמת להגרלת יותר מספרים, כלומר קבלת יותר תוצאות ניסוי, ובכך חישוב קרוב יותר לפונקצית הצפיפות.

פתרון לשאלה 3

סעיף א

קוד הפונקציה :

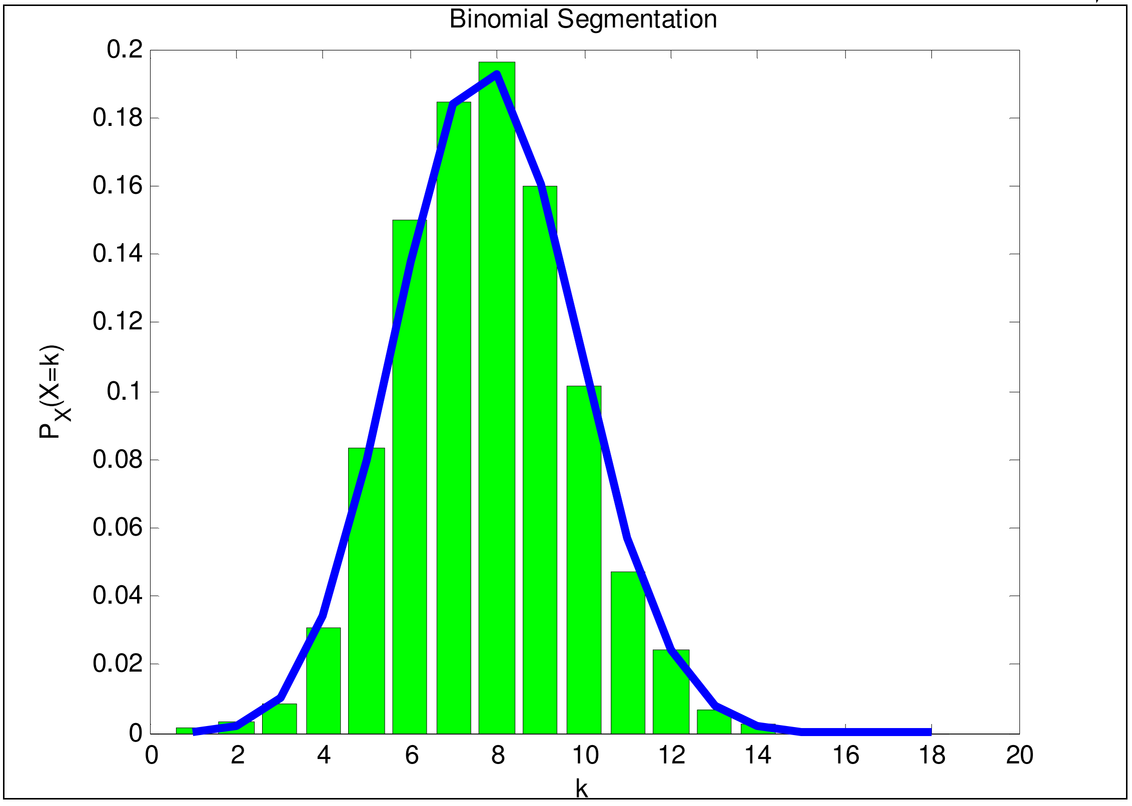
```
function X = mybinom(n,p);
    Y=rand(1,n);
    x=zeros(1,n);
    ind = find(Y<p);
    x(ind)=1;
    X=sum(x);
end
```

סעיף ב

הקוד:

```
% Seif Bet
S2=7;
S3=7;

% The binomial parameters
p=(S2+1)/20;
n=10+S3;

Count=500; % number of experiments
x=1:1:n+1;
y=zeros(1,n+1);

for k=0:n
   Re(k+1)=factorial(n) / (factorial(k) * factorial(n-k)) * p^k * (1-p)^(n-k);
end

for i=1 : Count
   z(i) = mybinom(n,p);
   y(z(i)+1)=y(z(i)+1)+1;
end

y=y ./ Count;
bar(x,Y,'g')
hold
plot(x,Re,'b-','linewidth',3)
xlabel('k');
ylabel('P_{X}(X=k)');
```

הגרף המתקבל:



פתרון לשאלה 4

סעיף א

בתרגיל 1, מצאנו טרנספורמציה המעבירה ו"א $\underline{X}$ בעל תוחלת $E\underline{X}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ומטריצת קווראינס $\underline{\underline{\Lambda}}_X=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$

לו"א גאוסי $\underline{Y}$ שתוחלתו $E\underline{Y}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ומטריצת קוואינס יחידתית $\underline{\underline{\Lambda}}_Y=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. נסמן טרנספורמציה זו:

$$\underline{Y}=\underline{\underline{A}}\underline{X}+\underline{b}$$

כאשר

$$\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix},\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1-\frac{3}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

ולכן, כדי לקבל ו"א $\underline{X}$ בעל תוחלת $E\underline{X}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ומטריצת קוואינס $\underline{\underline{\Lambda}}_X=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ מתוך ו"א גאוסי $\underline{Y}$ שתוחלתו $E\underline{Y}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ומטריצת קוואינס יחידתית $\underline{\underline{\Lambda}}_Y=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, נבצע טרנספורמציה הפוכה:

$$\underline{X}=\underline{\underline{A}}^{-1}\left(\underline{Y}-\underline{b}\right)$$

בשאלה שלנו, אנו מתעסקים עם ו"א ממורכז, כלומר תוחלתו $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, ולכן יש תחילה להזיז את $\underline{Y}$:

$$\underline{X}=\underline{\underline{A}}^{-1}\left(\underline{Y}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\underline{b}\right)$$

סעיף ב

הקוד:

```
% Seif Alef
Z = randn(2,1); % Standard normal gaussian vector
A = [ 1/2, -1/2 ; 1/sqrt(8) , 1/sqrt(8) ];
b = [ 3/2 ; 1 - 1.5 / sqrt(2) ];
Ainv = inv(A);

% Seif Beit
N          = 10^5;
Ex         = zeros(2,1);
Exact_Ex  = [1;2]; % The exact E, as we know it
Cov        = zeros(2,2);
for i=1:N
    Z=randn(2,1)+ones(2,1);
    X = Ainv * (Z - b);
    Ex = Ex + X;
    Cov = Cov + ( X - Exact_Ex ) * ( X - Exact_Ex )' ;
end
Ex = Ex / N
Cov = Cov / N
```

והתוצאה:

```
Ex=
0.9972
1.9978

Cov=
1.0027   2.9987
2.9849   1.0027
```

גליון 3

פתרון לשאלה 1

סעיף א

מכיוון ש $\left(\underline{X},Y\right)$ ואי"ג, הרי ש

$$\hat{Y}_{opt}=E\left[Y\,|\,\underline{X}\right]$$

הוא ק"ל של $\underline{X}$ (המשערך האופטימלי הוא המשערך הליניארי).

כעת:

$$E\left[\varepsilon\right]=E\left[Y-\hat{Y}_{opt}\right]=E\left[Y-E\left[Y\,|\,\underline{X}\right]\right]=E\left[Y\right]-E\left[E\left[Y\,|\,\underline{X}\right]\right]=E\left[Y\right]-E\left[Y\right]=0$$

עיקרון ההשלכה אומר כי שגיאת השיערוך ניצבת לכל פונקציה של המדידות, ולכן:

$$E\left[\varepsilon\cdot\underline{X}\right]=E\left[\left(Y-\hat{Y}_{opt}\right)\cdot\underline{X}\right]=0$$

ולכן $\varepsilon,\underline{X}$ חסרי קורלציה:

$$\operatorname{cov}\left(\varepsilon,\underline{X}\right)=E\left[\varepsilon\cdot\underline{X}\right]-E\varepsilon\cdot E\underline{X}=0$$

מכיוון ש $\hat{Y}_{opt}$ הוא ק"ל של $\underline{X}$, אזי הוקטור $\left(\varepsilon,\underline{X}\right)=\left(Y-\hat{Y}_{opt},\underline{X}\right)$ הוא וקטור אקראי גאוסי, ולכן חוסר הקורלציה גורר חוסר תלות סטטיסטית.

סעיף ב

אם $\left(X,Y\right)$ וי"א, אזי המשערך הליניארי של Y מתוך X הוא

$$\hat{Y}_{opt}^{lin}=EY+\frac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\operatorname{var}X}\left(X-EX\right)$$

מהנתון ש $\hat{Y}_{opt}^{lin}=aX$, הרי ש $EY=EX=0$, ואז

$$\hat{Y}_{opt}^{lin}=\frac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\operatorname{var}X}X$$

מצד שני, המשערך הליניארי של X מתוך Y הוא

$$\hat{X}_{opt}^{lin}=EX+\frac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\operatorname{var}Y}\left(Y-EY\right)=\frac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\operatorname{var}Y}Y\neq\frac{\operatorname{var}X}{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}Y$$

ולכן הטענה אינה נכונה.

פתרון לשאלה 2

הטענה אינה נכונה – נראה דוגמה נגדית לפי ההנחיה:

נבחר $X\sim N\left(0,1\right)$ בת"ס ב- $Y\sim N\left(0,1\right)$ ונגדיר $Z=X+Y$.

מהגדרתנו, X ו- Z גאוסים במשותף ולכן המשערך האופטימלי הוא גם המשערך הליניארי, כלומר

$$E\left[X\,|Z\right]=EX+\frac{\operatorname{cov}\left(X,Z\right)}{\operatorname{var}Z}\left(Z-EZ\right)=\frac{\operatorname{cov}\left(X,X+Y\right)}{\operatorname{var}\left(X+Y\right)}Z=\frac{\operatorname{var}X}{\operatorname{var}X+\operatorname{var}Y}Z=\frac{1}{2}Z$$

ומצד שני

$$E\left[X\,|Y=y,Z=z\right]=E\left[X\,|Y=y,X+y=z\right]=E\left[X\,|Y,X=z-y\right]=z-y$$

כלומר

$$E\left[X\,|\,Z\right]=Z-Y\neq\frac{1}{2}Z=E\left[X\,|\,Z\right]$$

פתרון לשאלה 3

סעיף א

X_2^{lin} הוא המשערך מהצורה aY שיביא את הביטוי $E\left[\left(X-X_2^{lin}\right)^2\right]$ למינימום.

(X,Y) ואי"ג ולכן המשערך האופטימלי של X בהינתן Y הוא המשערך הלינארי:

$$E\left[X|Y\right]=\hat{X}_{opt}^{lin}(Y)=EX+\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}Y}(Y-EY)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}Y}Y=aY$$

כלומר

$$X_2^{lin}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}Y}Y=E\left[X\mid Y\right].$$

סעיף ב

X_4^{lin} הוא המשערך מהצורה aY שיביא את הביטוי $e_4=E\left[\left(X-X_4^{lin}\right)^4\right]=E\left[\left(X-aY\right)^4\right]$ למינימום.

(X,Y) ואי"ג ולכן $Z=X-aY$ הוא מ"א גאוסי עם תוחלת 0 ועבורו מתקיים

$$e_4=E\left[Z^4\right]=3E\left[Z^2\right]^2=3E\left[\left(X-aY\right)^2\right]^2$$

לכן, בכדי להביא את הביטוי $E\left[\left(e_4\right)^4\right]$ למינימום, עלינו להביא את $E\left[\left(X-aY\right)^2\right]$ למינימום.

בסעיף א' ראינו כי $X_2^{lin}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}Y}Y$ מביא ביטוי זה למינימום ולכן אכן מתקיים

$$e_4=X_4^{lin}=X_2^{lin}=E\left[X|Y\right]$$

סעיף ג

(X,Y) ואי"ג ולכן $Z=X-aY$ הוא מ"א גאוסי עם תוחלת 0 ועבורו מתקיים

$$\forall n=2k+1:\quad E\left[Z^n\right]=E\left[\left(X-aY\right)^n\right]=0$$

קריטריון זה לא הגיוני משום שהקריטריון שלנו יתן טעות אפס גם אם השערוך לא מדוייק.
נוכל לבחור קריטריון הגיוני יותר ע"י הפיכת החזקות לזוגיות, כלומר לקיחת

$$e_n^{\min}=E\left[\left(\left(X-aY\right)^2\right)^n\right]=E\left[\left(X-aY\right)^{2n}\right]=0$$

פתרון לשאלה 4

סעיף א

נחשב את $f_{X|Y}(x|y)$:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(u(y)\big[pu(x)+(1-p)u(-x)\big]+u(-y)\big[(1-p)u(x)+pu(-x)\big]\Big)dx$$

$$=u(y)\left(p\int_{y-1}^{1-y}u(x)\,dx+(1-p)\int_{y-1}^{1-y}u(-x)\,dx\right)+u(-y)\left((1-p)\int_{-y-1}^{y+1}u(x)\,dx+p\int_{-y-1}^{y+1}u(-x)\,dx\right)$$

$$=u(y)\left(p\int_{0}^{1-y}dx+(1-p)\int_{y-1}^{0}dx\right)+u(-y)\left((1-p)\int_{0}^{y+1}dx+p\int_{-y-1}^{0}dx\right)$$

$$=u(y)\big(p(1-y)+(1-p)(1-y)\big)+u(-y)\big((1-p)(y+1)+p(y+1)\big)$$

$$=u(y)(1-y)+u(-y)(y+1)$$

$$=1-|y|,\qquad |y|\le 1$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx}=\frac{u(y)\big[pu(x)+(1-p)u(-x)\big]+u(-y)\big[(1-p)u(x)+pu(-x)\big]}{u(y)(1-y)+u(-y)(y+1)}$$

ולכן

$$E[X|Y]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{u(y)\left[pu(x)+(1-p)u(-x)\right]+u(-y)\left[(1-p)u(x)+pu(-x)\right]}{u(y)(1-y)+u(-y)(y+1)}dx$$

$$=\frac{u(y)\left(p\int_{y-1}^{1-y}xu(x)dx+(1-p)\int_{y-1}^{1-y}xu(-x)dx\right)+u(-y)\left((1-p)\int_{-y-1}^{y+1}xu(x)dx+p\int_{-y-1}^{y+1}xu(-x)dx\right)}{u(y)(1-y)+u(-y)(y+1)}$$

$$=\frac{u(y)\left(p\int_{0}^{1-y}xdx+(1-p)\int_{y-1}^{0}xdx\right)+u(-y)\left((1-p)\int_{0}^{y+1}xdx+p\int_{-y-1}^{0}xdx\right)}{u(y)(1-y)+u(-y)(y+1)}$$

$$=\frac{u(y)\left(p\frac{(1-y)^2}{2}-(1-p)\frac{(y-1)^2}{2}\right)+u(-y)\left((1-p)\frac{(y+1)^2}{2}-p\frac{(-y-1)^2}{2}\right)}{u(y)(1-y)+u(-y)(y+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{u(y)(2p-1)(1-y)^2+u(-y)(y+1)^2(1-2p)}{u(y)(1-y)+u(-y)(y+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(2p-1)\left((1-y)^2u(y)-(y+1)^2u(-y)\right)}{u(y)(1-y)+u(-y)(y+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(2p-1)\left(((1-y)u(y))^2-((y+1)u(-y))^2\right)}{u(y)(1-y)+u(-y)(y+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(2p-1)\left((1-y)u(y)-(y+1)u(-y)\right)\left((1-y)u(y)+(y+1)u(-y)\right)}{u(y)(1-y)+u(-y)(y+1)}$$

$$=\frac{1}{2}(2p-1)\left((1-y)u(y)-(1+y)u(-y)\right)=\frac{1}{2}(2p-1)\left(1-|y|\right)$$

שגיאת השערוך היא כמובן :

$$\varepsilon=X-\hat{X}_{opt}=X-E[X|Y]=X-\frac{1}{2}(2p-1)\left((1-Y)u(Y)-(Y+1)u(-Y)\right)$$

$$=X-\frac{1}{2}(2p-1)\left(1-|Y|\right)sign(Y)$$

סעיף ב

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(u(y)\big[pu(x)+(1-p)u(-x)\big]+u(-y)\big[(1-p)u(x)+pu(-x)\big]\Big)dy \\
&= \big(pu(x)+(1-p)u(-x)\big)\int_{0}^{\infty} dy + \big((1-p)u(x)+pu(-x)\big)\int_{-\infty}^{0} dy \\
&= \big(pu(x)+(1-p)u(-x)\big)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1-x} dy, & x>0 \\ \displaystyle\int_0^{1+x} dy, & x<0\end{cases} + \big((1-p)u(x)+pu(-x)\big)\begin{cases}\displaystyle\int_{x-1}^{0} dy, & x>0 \\ \displaystyle\int_{-x-1}^{0} dy, & x<0\end{cases} \\
&= \big(p(1-x)u(x)+(1-p)(1+x)u(-x)\big)+\big((1-p)(1-x)u(x)+p(x+1)u(-x)\big) \\
&= u(x)\big[p(1-x)+(1-p)(1-x)\big]+u(-x)\big[(1-p)(1+x)+p(1+x)\big] \\
&= u(x)\big[p-px+1-x-p+px\big]+u(-x)\big[1+x-p-px+px+p\big] \\
&= u(x)[1-x]+u(-x)[1+x] \\
&= 1-|x|, \qquad \forall |x|\le 1
\end{aligned}
$$

נשתמש בנוסחה

$$
\hat{X}_{opt}^{lin}(Y) = EX + \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var} Y}(Y-EY)
$$

קצת חישובים:

$$EX = EY = 0$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EXEY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)\,dxdy - 0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\Big(u(y)\big[pu(x)+(1-p)u(-x)\big]+u(-y)\big[(1-p)u(x)+pu(-x)\big]\Big)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} pu(x)\,xyu(y)\,dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1-p)u(-x)\,xyu(y)\,dxdy$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyu(-y)(1-p)u(x)\,dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyu(-y)\,pu(-x)\,dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} pxydxdy + \int_{x=-1}^{0}\int_{y=0}^{x+1}(1-p)\,xydxdy + \int_{x=0}^{1}\int_{y=x-1}^{0} xy(1-p)\,dxdy + \int_{x=-1}^{0}\int_{y=-x-1}^{0} xypdxdy$$

$$= p\int_{x=0}^{1} x\frac{(1-x)^2}{2}dx + (1-p)\int_{x=-1}^{0} x\frac{(x+1)^2}{2}dx + (1-p)\int_{x=0}^{1} x\frac{-(x-1)^2}{2}dx + p\int_{x=-1}^{0} x\frac{-(-x-1)^2}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} p\int_{x=0}^{1} x\left(1-2x+x^2\right)dx + (1-p)\int_{x=-1}^{0} x\left(x^2+2x+1\right)dx \\ +(1-p)\int_{x=0}^{1} x\left(2x-x^2-1\right)dx + p\int_{x=-1}^{0} x\left(-x^2-2x-1\right)dx \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} p\int_{x=0}^{1}\left(x-2x^2+x^3\right)dx + (1-p)\int_{x=-1}^{0}\left(x^3+2x^2+x\right)dx \\ +(1-p)\int_{x=0}^{1}\left(2x^2-x^3-x\right)dx + p\int_{x=-1}^{0}\left(-x^3-2x^2-x\right)dx \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} p\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 + (1-p)\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 \\ +(1-p)\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + p\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(p\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+(1-p)\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+(1-p)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+p\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(p\left(1+\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)+(1-p)\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}p-\frac{1}{6}(1-p)\right) = \frac{2p-1}{12}$$

וגם

$$\operatorname{var}Y = EY^2-(EY)^2 = EY^2 = \int_{-1}^{1} y^2\left(1-|y|\right)dy$$

$$= 2\int_0^1 y^2(1-y)\,dy = 2\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

ואז נקבל

$$\hat{X}_{opt}^{lin}(Y) = EX + \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}Y}(Y-EY) = \frac{2p-1}{2}Y$$

ושגיאת השערוך הליניארי

$$\varepsilon = X - \frac{2p-1}{2}Y$$

<u>סעיף ג</u>

לא ברור לנו איך לצייר את השגיאה, מכיוון שהיא פונקציה של X,Y בדיוק כמו שהיא פונקציה של p (אולי רציתם שנצייר את תוחלת ריבוע השגיאה?). בנוסף שגיאת השערוך הליניארית תהיה גדולה ביותר כאשר יוגרל $X=Y=1$ ו $p=0$, ואז $\varepsilon=1.5$.

אם המשורר התכוון שנשרטט את תוחלת ריבוע השגיאה, אזי בעזרנו בחישובים קודמים, נמשיך:

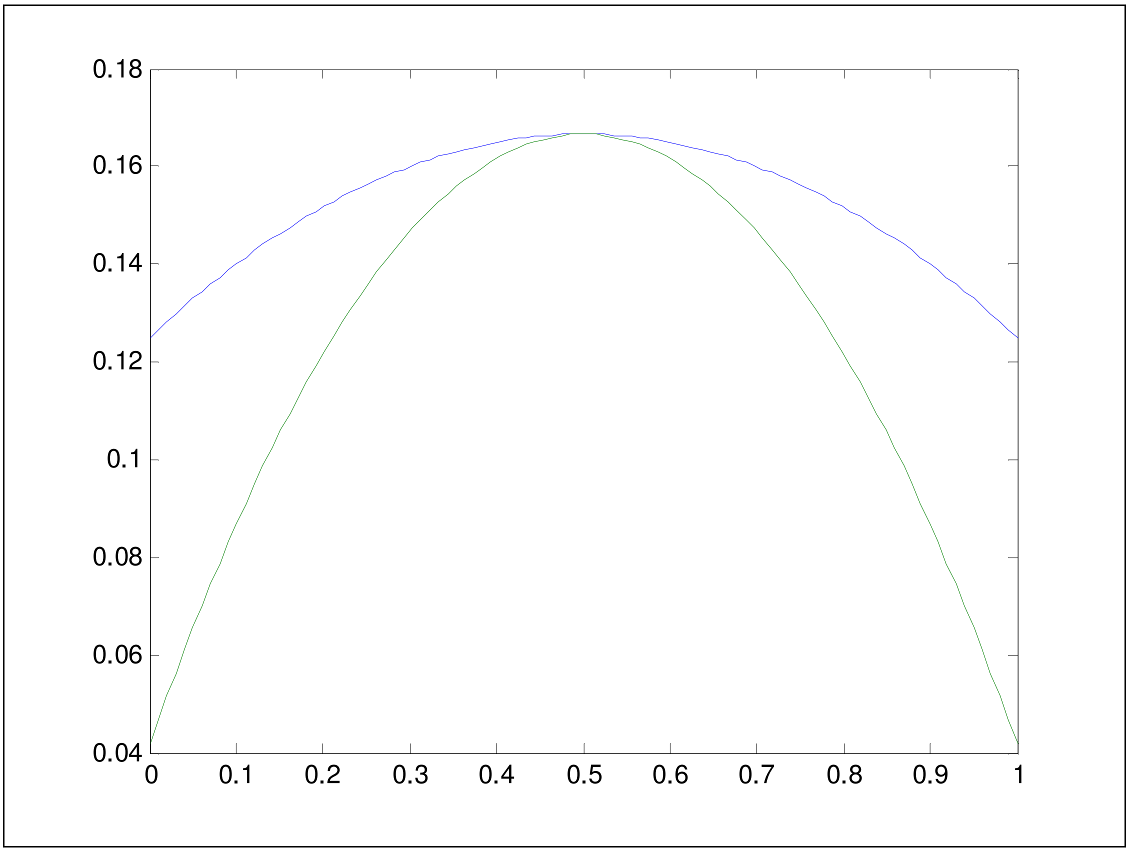
- עבור השערוך האופטימלי מקבלים (גרף ירוק):

$$E\left[\left(X-\hat{X}_{opt}(Y)\right)^2\right]=E\left[X^2\right]-E\left[\left(\hat{X}_{opt}(Y)\right)^2\right]=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{2}\right)^2$$

- עבור השערוך הליניארי האופטימלי מקבלים (גרף כחול):

$$E\left[\left(X-\hat{X}_{opt}^{lin}\right)^2\right]=E\left[\left(X-\left(p-\tfrac{1}{2}\right)Y\right)^2\right]=E\left[X^2\right]-\left(p-\tfrac{1}{2}\right)^2E\left[Y^2\right]=\operatorname{var}X-\left(p-\tfrac{1}{2}\right)^2\operatorname{var}Y$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(p-\frac{1}{2}\right)^2$$



כמובן שעבור $p=\frac{1}{2}$, תוחלת השגיאה הריבועית מקסימלית וערכה $\frac{1}{6}$, ובמצב זה מקבלים כי

$$\hat{X}_{opt}=\hat{X}_{opt}^{lin}=0$$

וגם $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ כלומר X,Y חסרי קורלציה, אך הם אינם בת״ס כי התמך של $f_{X,Y}(x,y)$ אינו מלבני.

פתרון לשאלה 5

$$Z \sim Pois(\lambda) \;\Rightarrow\; P_Z\{Z=k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E[Z|W] = \sum_{k=0}^{\infty} zP\{Z=k|W=w\} = P\{Z=1|W=w\} + \sum_{k=2}^{\infty} zP\{Z=k|W=w\}$$

$$= \begin{cases} 0 + wP\{Z=w|W=w\}, & w>1 \\ P\{W=1|Z=1\}\dfrac{P\{Z=1\}}{P\{W=1\}} \quad , & w=1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} w, & w>1 \\ 1\cdot\dfrac{\lambda e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}} \quad , & w=1 \end{cases} = \begin{cases} w, & w>1 \\ \dfrac{\lambda}{1+\lambda} \quad , & w=1 \end{cases}$$

תוחלת ריבוע שגיאת השערוך:

$$E\left[\varepsilon^2\right] = E\left[\left(Z - E[Z|W]\right)^2\right] = \sum\left(kP\left\{\left(Z-\hat{Z}\right)^2 = k\right\}\right)$$

$$= 0\cdot P\left\{\left(Z-\hat{Z}\right)^2 = 0\right\} + \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 P\left\{\left(Z-\hat{Z}\right)^2 = \frac{1}{1+\lambda}\right\} + \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2 P\left\{\left(Z-\hat{Z}\right)^2 = \frac{\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

$$= 0 + \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 P\{Z=1\} + \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2 P\{Z=0\}$$

$$= \frac{\left(\lambda^2+\lambda\right)e^{-\lambda}}{(1+\lambda)^2} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1+\lambda}$$

פתרון לשאלה 6

סעיף א

$$\hat{X}(z)=E[X|Z]=E[X|X+A=z]=E[X|X+a=z]P(A=a)+E[X|X-a=z]P(A=-a)$$
$$=\frac{1}{2}E[X|X=z-a]+\frac{1}{2}E[X|X=z+a]=\frac{1}{2}(z-a)+\frac{1}{2}(z+a)=z$$

סעיף ב

מכיוון ש (X,Y) וא"ג, המשערך האופטימלי של Y באמצעות X הוא המשערך הליניארי:

$$\hat{Y}_1(x)=E[Y|X=x]=EY+\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}X}(x-EX)=\frac{EXY-EXEY}{EX^2-(EX)^2}x=\frac{\rho\sigma^2}{\sigma^2}x=\rho x$$

סעיף ג

$$\hat{Y}_2(z)=E[Y|Z]=E[Y|X+A=z]=E[Y|X+a=z]P(A=a)+E[Y|X-a=z]P(A=-a)$$
$$=\frac{1}{2}E[Y|X=z-a]+\frac{1}{2}E[Y|X=z+a]=\frac{1}{2}\hat{Y}_1(X=z-a)+\frac{1}{2}\hat{Y}_1(X=z+a)$$
$$=\frac{1}{2}\rho(z-a)+\frac{1}{2}\rho(z+a)=\rho z$$

סעיף ד

הטענה לא נכונה. נבחר מ"א Z כלשהו ו Y המקיים $Y=Z^2$ ו, $X\equiv 0$. ואז:

$$\hat{Y}_1(Z)=E[Y|Z]=E[Z^2|Z]=Z^2$$
$$\hat{X}(Z)=E[X|Z]=0$$
$$\hat{Y}_2(X)=E[Y|X]=E[Y]=E[Z^2]$$

וכמובן ש

$$\hat{Y}_1(\hat{X}(Z))=0\neq E[Z^2]=\hat{Y}_2(X)$$

פתרון לשאלה 7

סעיף א

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=\sum_{v=0}^{\infty}P\{X\le x\mid V=v\}P\{V=v\}$$
$$=\sum_{v=0}^{\infty}F_{X|V}(x\mid v)e^{-\lambda}\frac{\lambda^v}{v!}=\sum_{v=0}^{\infty}\left(1-e^{-(v+1)x}\right)e^{-\lambda}\frac{\lambda^v}{v!}=e^{-\lambda}\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^v}{v!}-e^{-(v+1)x}\frac{\lambda^v}{v!}\right)$$
$$=e^{-\lambda}\left(\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\lambda^v}{v!}-\sum_{v=0}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^{(v+1)}\frac{\lambda^v}{v!}\right)=e^{-\lambda}\left(e^{v}-e^{-x}\sum_{v=0}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^{v}\frac{\lambda^v}{v!}\right)$$
$$=e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-e^{-x}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{-x}\right)^v}{v!}\right)=e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-e^{-x}e^{\lambda e^{-x}}\right)=1-e^{-\lambda-x+\lambda e^{-x}}$$

סעיף ב

$$E[V\mid X]=\sum_{v=0}^{\infty}vP(V=v\mid X=x)=\sum_{v=0}^{\infty}vf_{X|V}(x\mid v)\frac{P(V=v)}{f_X(x)}=\frac{1}{f_X(x)}\sum_{v=0}^{\infty}v(v+1)e^{-(v+1)x}e^{-\lambda}\frac{\lambda^v}{v!}$$
$$=$$
$$=\frac{e^{-\lambda}}{\left(1+\lambda e^{-x}\right)e^{-\lambda-x+\lambda e^{-x}}}\left(\sum_{v=0}^{\infty}v(v+1)\left(e^{-x}\right)^{(v+1)}\frac{\lambda^v}{v!}\right)=$$
$$=\frac{e^{-\lambda}e^{-x}}{\left(1+\lambda e^{-x}\right)e^{-\lambda-x+\lambda e^{-x}}}\left(\sum_{v=0}^{\infty}v(v+1)\frac{\left(\lambda e^{-x}\right)^v}{v!}\right)=$$
$$=\boxed{z=\lambda e^{-x}}=\frac{e^{-\lambda}e^{-x}z}{(1+z)e^{-\lambda-x+z}}\left(\sum_{v=0}^{\infty}v(v+1)\frac{z^{v-1}}{v!}\right)=\frac{z}{(1+z)e^{z}}\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{z^{v+1}}{v!}\right)''$$
$$=\frac{z}{(1+z)e^{z}}\left(z\sum_{v=0}^{\infty}\frac{z^v}{v!}\right)''=\frac{z}{(1+z)e^{z}}\left(ze^{z}\right)''$$
$$=\frac{z}{(1+z)e^{z}}\left(e^{z}+ze^{z}\right)'=\frac{z}{(1+z)e^{z}}\left(e^{z}+e^{z}+ze^{z}\right)=\frac{ze^{z}(2+z)}{(1+z)e^{z}}=\frac{2+z}{1+z}z$$
$$=\boxed{z=\lambda e^{-x}}=\frac{2+\lambda e^{-x}}{1+\lambda e^{-x}}\lambda e^{-x}$$

סעיף ג

עבור $k\le\ell$

$$E[Z_\ell\mid Z_k]=E\left[\sum_{i=1}^{\ell}V_i\mid\sum_{i=1}^{k}V_i\right]=E\left[\sum_{i=1}^{k}V_i+\sum_{i=k+1}^{\ell}V_i\mid\sum_{i=1}^{k}V_i\right]=E\left[\sum_{i=1}^{k}V_i\mid\sum_{i=1}^{k}V_i\right]+E\left[\sum_{i=k+1}^{\ell}V_i\mid\sum_{i=1}^{k}V_i\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{k}V_i+E\left[\sum_{i=k+1}^{\ell}V_i\right]=Z_k+\sum_{i=k+1}^{\ell}E[V_i]=Z_k+(\ell-k)\lambda$$

עבור $k>\ell$

$$E[Z_\ell\mid Z_k=t]=E\left[\sum_{i=1}^{\ell}V_i\mid\sum_{i=1}^{k}V_i=t\right]=\sum_{i=1}^{\ell}\left(E\left[V_i\mid\sum_{i=1}^{k}V_i=t\right]\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{t}{k}\right)=\frac{\ell}{k}t=\frac{\ell}{k}Z_k$$

סעיף ד

קיבלנו כי המשערך האופטימלי הינו ליניארי, ולכן הוא גם המשערך הליניארי האופטימלי.

גליון 4

פתרון לשאלה 1

סעיף א

$$EX_n = E\left[A\cos\omega_0 n + B\sin\omega_0 n\right] = E\left[A\right]\cos\omega_0 n + E\left[B\right]\sin\omega_0 n = 0$$

$$\begin{aligned}
R_X\left(n_1,n_2\right) &= E\left[X_{n_1}X_{n_2}\right] = E\left[\left(A\cos\omega_0 n_1 + B\sin\omega_0 n_1\right)\left(A\cos\omega_0 n_2 + B\sin\omega_0 n_2\right)\right] \\
&= E\left[\left(A^2\cos\omega_0 n_2\cos\omega_0 n_1 + AB\cos\omega_0 n_1\cos\omega_0 n_2 + BA\sin\omega_0 n_1\cos\omega_0 n_2 + B^2\sin\omega_0 n_2\sin\omega_0 n_1\right)\right] \\
&= E\left[A^2\right]\cos\omega_0 n_2\cos\omega_0 n_1 + E\left[B^2\right]\sin\omega_0 n_2\sin\omega_0 n_1 \\
&= \sigma^2\left(\cos\omega_0 n_2\cos\omega_0 n_1 + \sin\omega_0 n_2\sin\omega_0 n_1\right) = \sigma^2\cos\left(\omega_0\left(n_2-n_1\right)\right) \\
&= \sigma^2\cos\left(\omega_0\left|n_2-n_1\right|\right) \\
&\Rightarrow\ R_X\left(\tau\right) = \sigma^2\cos\left(\omega_0\left|\tau\right|\right)
\end{aligned}$$

סעיף ב

אם $k\in\mathbb{N}$, $\omega_0 = 2\pi k$ אזי

$$E\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}A\right]^2 = \left(\frac{2N}{2N+1}\right)^2 E\left[A^2\right] = \left(\frac{2N}{2N+1}\right)^2\sigma^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} \sigma^2$$

ולכן התהליך אינו ארגודי בממוצע ריבועי במומנט הראשון. אבל לכל ω_0 אחר:

$$\begin{aligned}
E\left[\hat{\mu}_N-\mu\right]^2 &= E\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}X_n - 0\right]^2 = \frac{1}{\left(2N+1\right)^2}E\left[\sum_{n=-N}^{N}X_n\right]^2 = \frac{1}{\left(2N+1\right)^2}E\left[\sum_{n=-N}^{N}A\cos\left(\omega_0 n\right)+B\sin\left(\omega_0 n\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{\left(2N+1\right)^2}E\left[A\sum_{n=-N}^{N}\cos\left(\omega_0 n\right)+B\sum_{n=-N}^{N}\sin\left(\omega_0 n\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{\left(2N+1\right)^2}E\left[A\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{Re}\left\{e^{j\omega_0 n}\right\}+B\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{Im}\left\{e^{j\omega_0 n}\right\}\right]^2 \\
&= \frac{1}{\left(2N+1\right)^2}E\left[A\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=-N}^{N}e^{j\omega_0 n}\right\}+B\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{n=-N}^{N}e^{j\omega_0 n}\right\}\right]^2 \\
&= \frac{1}{\left(2N+1\right)^2}E\left[A\,\mathrm{Re}\left\{e^{-j\omega_0 N}\frac{e^{j\omega_0 2N}-1}{e^{j\omega_0}-1}\right\}+B\,\mathrm{Im}\left\{e^{-j\omega_0 N}\frac{e^{j\omega_0 2N}-1}{e^{j\omega_0}-1}\right\}\right]^2 \\
&= \frac{1}{\left(2N+1\right)^2}\left(E\left[A^2\right]\mathrm{Re}^2\left\{\frac{e^{j\omega_0 N}-e^{-j\omega_0 N}}{e^{j\omega_0}-1}\right\}+E\left[B^2\right]\mathrm{Im}^2\left\{\frac{e^{j\omega_0 N}-e^{-j\omega_0 N}}{e^{j\omega_0}-1}\right\}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\left(2N+1\right)^2}\left(\mathrm{Re}^2\left\{\frac{e^{j\omega_0 N}-e^{-j\omega_0 N}}{e^{j\omega_0}-1}\right\}+\mathrm{Im}^2\left\{\frac{e^{j\omega_0 N}-e^{-j\omega_0 N}}{e^{j\omega_0}-1}\right\}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\left(2N+1\right)^2}\left|\frac{e^{j\omega_0 N}-e^{-j\omega_0 N}}{e^{j\omega_0}-1}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{\left(2N+1\right)^2}\left|e^{-j\omega_0 N}\right|\left|\frac{e^{j\omega_0 2N}-1}{e^{j\omega_0}-1}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{\left(2N+1\right)^2}\left|\frac{e^{j\omega_0 2N}-1}{e^{j\omega_0}-1}\right|^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{\left(2N+1\right)^2}\frac{\left|e^{j\omega_0 2N}-1\right|^2}{\left|e^{j\omega_0}-1\right|^2} = \frac{\sigma^2}{\left(2N+1\right)^2}\frac{\left(\cos 2N\omega_0-1\right)^2+\sin^2 2N\omega_0}{\left(\cos\omega_0-1\right)^2+\sin^2\omega_0} \\
&= \frac{\sigma^2}{\left(2N+1\right)^2}\frac{2-2\cos 2N\omega_0}{2-2\cos\omega_0} = \frac{\sigma^2}{\left(2N+1\right)^2}\frac{1-\cos 2N\omega_0}{1-\cos\omega_0}\xrightarrow[N\to\infty]{}0
\end{aligned}$$

התהליך כן ארגודי בממוצע ריבועי במומנט הראשון.

פתרון לשאלה 2

נראה כי X_n סמ״ר. ע״פ משפט, ת״א גאוסי שהוא סמ״ר, הוא סטציונרי. כעת

$$EX_n = \mu$$

$$R_X(n,m) = EX_nX_m - EX_nEX_m + EX_nEX_m = \operatorname{cov}(n,m) + \mu^2 = \tilde{g}(|n-m|)$$

ולכן מש״ל.

פתרון לשאלה 3

סעיף א

עבור מטריצה סטוכסטית A, כלומר כזו המקיימת:

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}A^n = \begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}, \quad A^n\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}A^n = \begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}AA^{n-1} = \begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}A^{n-1} = \begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}A^{n-2} = \ldots = \begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$A^n\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = A^{n-1}A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = A^{n-2}A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = A^{n-2}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

סעיף ב

ניקח מטריצה P סטוכסטית. מסעיף קודם, גם P^n סטוכסטית, ולכן אם נתחיל מפילוג אחיד:

$$v_0 = \begin{pmatrix}\frac{1}{n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix} = \tfrac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

נקבל כי

$$v_n = v_0P = \tfrac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}P^n = \tfrac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix} = v_0$$

ולכן פילוג זה סטציונרי.

סעיף ג

ראשית, מטריצת מעברים של שרשרת מרקוב הומוגנית היא סטוכסטית (אך לא בהכרח סטוכסטית כפולה).

אם מטריצת המעברים P הינה סימטרית אזי $P^T = P$, ואז

$$P\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \left[P\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right]^T = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right]^T$$

$$\left(P\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}^T \quad P^T = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}P = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

ולכן P סטוכסטית כפולה, ולכן לפי סעיף קודם, מש״ל.

סעיף ד

נכתוב באופן כללי:

$$(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)P = v_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

ואז, מכיוון שמטריצת המעבר של תהליך מקרובי היא סטוכסטית:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n}\pi_j p_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\pi_i p_{ij} = \pi_i\sum_{j=1}^{n}p_{ij} = \pi_i$$

ולכן נוכל לכתוב כי

$$\pi P^n = \pi PP^{n-1} = \pi P^{n-1} = \ldots = \pi$$

$$v_n = \pi$$

ולכן פילוג זה סטציונרי.

פתרון לשאלה 4

סעיף א

ראשית נכתוב:

$$Y_k = \alpha Y_{k-1} + n_k = \alpha\left(\alpha Y_{k-2} + n_{k-1}\right) + n_k = \alpha\left(\alpha\left(\alpha Y_{k-3} + n_{k-2}\right) + n_{k-1}\right) + n_k = \ldots$$

$$= \alpha^k Y_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{k-i} n_i$$

ולכן, מכיוון ש Y_0 בת"ס ב n_i ומכיוון ש n_i סדרה בת"ס עם תוחלת 0:

$$R_Y\left(k,k+\tau\right) = E\left[Y_k Y_{k+\tau}\right] = E\left[\left(\alpha^k Y_0 + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha^{k-i}n_i\right)\left(\alpha^{k+\tau}Y_0 + \sum_{i=1}^{k+\tau-1}\alpha^{k+\tau-i}n_i\right)\right]$$

$$= E\left[\alpha^{k+k+\tau}Y_0^2 + \alpha^k Y_0 \sum_{i=1}^{k+\tau-1}\alpha^{k+\tau-i}n_i + \alpha^{k+\tau}Y_0\sum_{i=1}^{k-1}\alpha^{k-i}n_i + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha^{k-i}n_i\sum_{i=1}^{k+\tau-1}\alpha^{k+\tau-i}n_i\right] =$$

$$= \alpha^{2k+\tau}\sigma_0^2 + E\left[\sum_{i=1}^{k-1}\alpha^{k-i}n_i\sum_{i=1}^{k+\tau-1}\alpha^{k+\tau-i}n_i\right]$$

$$= \alpha^{2k+\tau}\sigma_0^2 + \begin{cases} E\left[\sum_{i=1}^{k-1}\alpha^{k-i}\alpha^{k+\tau-i}n_i^2\right], & \tau \ge 0 \\ E\left[\sum_{i=1}^{k+\tau-1}\alpha^{k-i}\alpha^{k+\tau-i}n_i^2\right], & \tau < 0 \end{cases} = \alpha^{2k+\tau}\sigma_0^2 + \alpha^{\tau-2i}\begin{cases} E\left[\sum_{i=1}^{k-1}\alpha^{2k}n_i^2\right], & \tau \ge 0 \\ E\left[\sum_{i=1}^{k+\tau-1}\alpha^{2k}n_i^2\right], & \tau < 0 \end{cases}$$

$$= \alpha^{2k+\tau}\sigma_0^2 + \alpha^{\tau-2i}\begin{cases} \sigma^2\sum_{i=1}^{k-1}\alpha^{2k}, & \tau \ge 0 \\ \sigma^2\sum_{i=1}^{k+\tau-1}\alpha^{2k}, & \tau < 0 \end{cases} = \alpha^{2k+\tau}\sigma_0^2 + \alpha^{\tau-2i}\begin{cases} \sigma^2\alpha^2\dfrac{\alpha^{2(k-1)}-1}{\alpha^2-1}, & \tau \ge 0 \\ \sigma^2\alpha^2\dfrac{\alpha^{2(k+\tau-1)}-1}{\alpha^2-1}, & \tau < 0 \end{cases}$$

$$= \alpha^{2k+\tau}\sigma_0^2 + \frac{\sigma^2\alpha^{\tau-2i+2}}{\alpha^2-1}\begin{cases} \alpha^{2(k-1)}-1, & \tau \ge 0 \\ \alpha^{2(k-1)+2\tau}-1, & \tau < 0 \end{cases}$$

עבור $\tau > 0$ קיבלנו

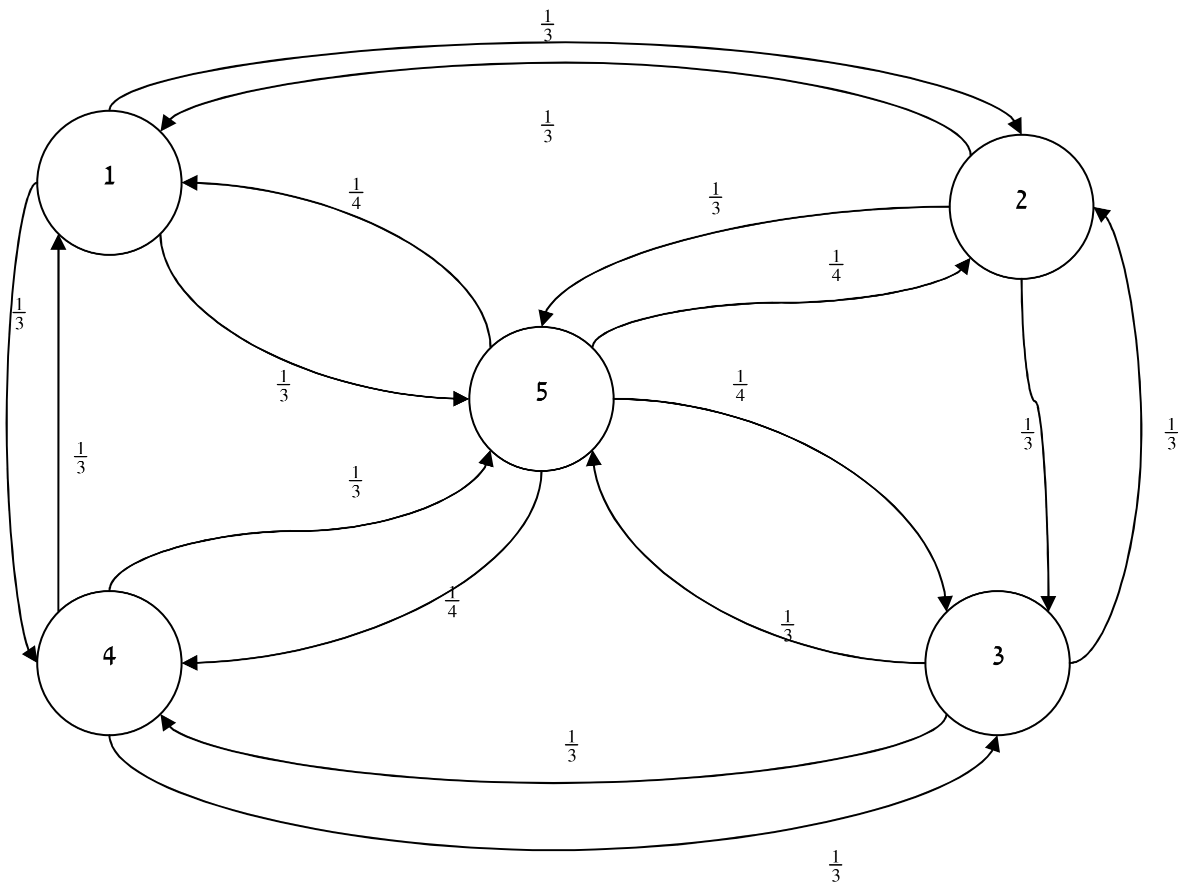
$$R_Y\left(k,k+\tau\right) = \alpha^{2k+\tau}\sigma_0^2 + \frac{\sigma^2\alpha^{\tau-2i+2}}{\alpha^2-1}\left(\alpha^{2(k-1)}-1\right)$$

סעיף ב

עבור $\alpha = 0$, התהליך Y_k הוא תהליך iid ולכן סטציונרי, לכל σ, σ_0.

פתרון לשאלה 5

סעיף א



סעיף ב

בשרשרת שלהלן כל המצבים נשנים, ולכן השרשרת אינה חולפת.

סעיף ג

נכתוב את מטריצת המעבר:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} & 0 & \frac{1}{\alpha_2} & 0 & \frac{1}{\alpha_2} \\ 0 & \frac{1}{\alpha_3} & 0 & \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\alpha_3} \\ \frac{1}{\alpha_4} & 0 & \frac{1}{\alpha_4} & 0 & \frac{1}{\alpha_4} \\ \frac{1}{\alpha_5} & \frac{1}{\alpha_5} & \frac{1}{\alpha_5} & \frac{1}{\alpha_5} & 0 \end{pmatrix}$$

מכיוון שקיים פילוג סטציונרי ומכיוון שהתהליך ההומוגני אינו פריק, הפילוג הסטציונרי הוא יחיד. יש להראות כי הפילוג הנתון הינו הפילוג הסטציונרי. ואכן:

$$v_n=v_0P=\frac{1}{2\beta}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} & 0 & \frac{1}{\alpha_2} & 0 & \frac{1}{\alpha_2} \\ 0 & \frac{1}{\alpha_3} & 0 & \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\alpha_3} \\ \frac{1}{\alpha_4} & 0 & \frac{1}{\alpha_4} & 0 & \frac{1}{\alpha_4} \\ \frac{1}{\alpha_5} & \frac{1}{\alpha_5} & \frac{1}{\alpha_5} & \frac{1}{\alpha_5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3 & 3 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3 & 3 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

<u>סעיף ד</u>

נסמן ב u_i את ההסברות שהתחלנו ממצב i והגענו למצב 3, מבלי לעבור במצב 5.

ולכן מתקיים

$$\begin{cases} u_1=\frac{1}{3}u_2+\frac{1}{3}u_4 \\ u_2=\frac{1}{3}u_1+\frac{1}{3} \\ u_4=\frac{1}{3}u_1+\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u_1=2u_2 \\ 3u_2=u_1+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3u_2-1)=2u_2 \\ 3u_2-1=u_1 \end{cases} \Rightarrow 9u_2-3=2u_2 \Rightarrow u_2=\frac{3}{7} \Rightarrow u_1=\frac{2}{7}$$

<u>סעיף ה</u>

נגדיר u_i תוחלת מספר הביקורים במצב 5 לפני הגעה למצב 3, כאשר מתחילים ממצב i.

ולכן מתקיים

$$\begin{cases} u_1=\frac{1}{3}u_2+\frac{1}{3}(u_5+1)+\frac{1}{3}u_4 \\ u_2=\frac{1}{3}u_1+\frac{1}{3}(u_5+1) \\ u_4=\frac{1}{3}u_1+\frac{1}{3}(u_5+1) \\ u_5=\frac{1}{4}u_2+\frac{1}{4}u_4+\frac{1}{4}u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u_1=u_2+u_5+1+u_4 \\ 3u_2=u_1+u_5+1 \\ 3u_4=u_1+u_5+1 \\ 5u_5=u_1+u_2+u_4 \end{cases}$$

מפתרון המשוואות נקבל

$$u_1=\frac{4}{3}$$

פתרון לשאלה 6

<u>סעיף א</u>

מצב	סיווג
1	נשנה
2	חולף
3	נשנה
4	חולף
5	נשנה
6	נשנה
7	חולף

מחלקות שקילות:

$$\{1,3,5\},\{7\},\{2,4\},\{6\}$$

קבוצות סגורות:

$$\{1,3,5\},\{6\}$$

השרשרת פריקה מכיוון שיש יותר מקבוצה סגורה אחת.

<u>סעיף ב</u>

ע"פ משפט, מכיוון שזוהי שרשרת הומוגנית סופית, אזי קיים עבורה פילוג סטציונרי. בנוסף, מכיוון ששרשרת זו היא אי פריקה, אזי פילוג זה אינו יחיד.

פילוג סטציונרי:

$$v_0=(0,0,0,0,0,1,0)$$

גליון 5

פתרון לשאלה 1

<u>סעיף א</u>

מהצגת הבעיה, אנו למדים כי מספר המכוניות בבוקר תלוי רק במספר המכוניות בבוקר שלפני ומשני משתנים אקראיים:

1. A: החניון אותו בוחר ביל גייטס בבוקר.
2. B: החניון בו בוחר ביל גייטס בערב אליו יחזיר את מכוניתו.

כלומר,

$$X_{n+1} = f\left(X_n, A, B\right)$$

כאשר A, B בת"ס ובת"ס ב X_n.

ולכן

$$\begin{aligned}
&P\left\{X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\right\} \\
&= P\left\{f\left(X_n, A, B\right) = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\right\} \\
&= P\left\{f\left(i_n, A, B\right) = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\right\} \\
&= P\left\{f\left(i_n, A, B\right) = j \mid X_n = i_n\right\} \\
&= P\left\{X_{n+1} = j \mid X_n = i_n\right\}
\end{aligned}$$

ולכן התהליך מרקובי.

<u>סעיף ב</u>

ראשית, מקרה הקצה:

$$P\left\{X_n = j \mid X_{n-1} = 0\right\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = K \\ \frac{1}{2}, & j = 0 \end{cases}$$

ואז

$$P\left\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\right\} = \begin{cases} \frac{1}{2}p, & j = i \\ \frac{1}{2}p, & j = K - i \\ \frac{1}{2}\left(1-p\right), & j = i-1 \\ \frac{1}{2}\left(1-p\right), & j = K - \left(i-1\right) \end{cases} = \frac{1}{2}\begin{cases} p, & j = i, K-i \\ \left(1-p\right), & j = i-1, K-\left(i-1\right) \end{cases}$$

הסתברויות אלו לא תלויות בזמן ולכן התהליך המרקובי הומוגני.

מטריצת המעברים, ממימד $\left(k+1\right)\times\left(k+1\right)$:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
1-p & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 1-p \\
0 & 1-p & p & 0 & 0 & p & \iddots & 0 \\
0 & 0 & 1-p & p & p & 1-p & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\
0 & 0 & p & 1-p & 1-p & p & 0 & 0 \\
0 & \iddots & 1-p & 0 & 0 & 1-p & p & 0 \\
p & 1-p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-p & p
\end{pmatrix}$$

<u>סעיף ג</u>

עבור $0<p<1$ השרשרת אינה פריקה, מכיוון שכל המצבים מקושרים לכל המצבים. כלומר, קבוצת הקשירות היחידה היא

$$\{0,1,2,\ldots,K\}$$

כל המצבים נשנים, ומכיוון שהשרשרת אינה פריקה קיים פילוג סטציונרי יחיד. ננחש אותו:

$$v_0=\begin{pmatrix}\alpha & \cdots & \alpha & \alpha\end{pmatrix}$$

כאשר $\alpha=\frac{1}{K+1}$. נוודא שפילוג זה סטציונרי:

$$v_0P=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ 1-p & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 1-p\\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 & p & \iddots & 0\\ 0 & 0 & 1-p & p & p & 1-p & 0 & 0\\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & p & 1-p & 1-p & p & 0 & 0\\ 0 & \iddots & 1-p & 0 & 0 & 1-p & p & 0\\ p & 1-p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-p & p\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\begin{pmatrix}1+(1-p)+p & p+(1-p)+p+(1-p) & \cdots & p+(1-p)+p+(1-p) & 1+(1-p)+p\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}=v_0$$

ומכיוון שאמרנו כבר כי הפילוג הסטציונרי יחיד, אז זהו הפילוג הסטציונרי.

עבור $p=1$, ביל גייטס יחזיר את מכונית תמיד לחניון שממנו היא נלקחה. נקבל

$$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \iddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \iddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ואנו רואים כי ישנן $\frac{K}{2}+1$ קבוצות קשירות סגורות מהצורה $\{i,K-i\}$ עבור $i=0,1,\ldots,\frac{K}{2}$ (כאשר הקבוצה $\left\{\frac{K}{2},\frac{K}{2}\right\}$ היא הקבוצה $\left\{\frac{K}{2}\right\}$, כלומר בעלת מצב יחיד. לכן שרשרת זו פריקה.

כל המצבים נשנים.

כל פילוג $v_0=(v_0,v_1,\ldots,v_k)$ המקיים

$$v_i=v_{K-i}=\frac{1}{2}\ ,\ 0\le i\le K \text{ ו } v_j=0 \text{ אחרת,}$$

יהיה סטציונרי.

עבור $p=0$, ביל גייטס יחזיר את מכונית תמיד לחניון שממנו היא לא נלקחה. נקבל

$$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0&1\\1&0&0&0&\cdots&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&\iddots&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\\vdots&0&0&\ddots&\ddots&0&0&\vdots\\0&0&0&1&1&0&0&0\\0&\iddots&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}$$

ממבנה המטריצה ניתן לראות כי ניתן להגיע מכל מצב לכל מצב אחר. לכן נסיק כי קבוצת הקשירות היחידה כוללת את כל המצבים, והשרשרת אי פריקה. כל המצבים נשנים. לכן ישנו פילוג סטציוני יחיד, והוא

$$v_0=\begin{pmatrix}\alpha&\cdots&\alpha&\alpha\end{pmatrix}$$

כאשר $\alpha=\frac{1}{K+1}$. נוודא שפילוג זה סטציונרי:

$$v_0P=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0&1\\1&0&0&0&\cdots&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&\iddots&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\\vdots&0&0&\ddots&\ddots&0&0&\vdots\\0&0&0&1&1&0&0&0\\0&\iddots&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\begin{pmatrix}1+1&1+1&\cdots&1+1&1+1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\end{pmatrix}=v_0$$

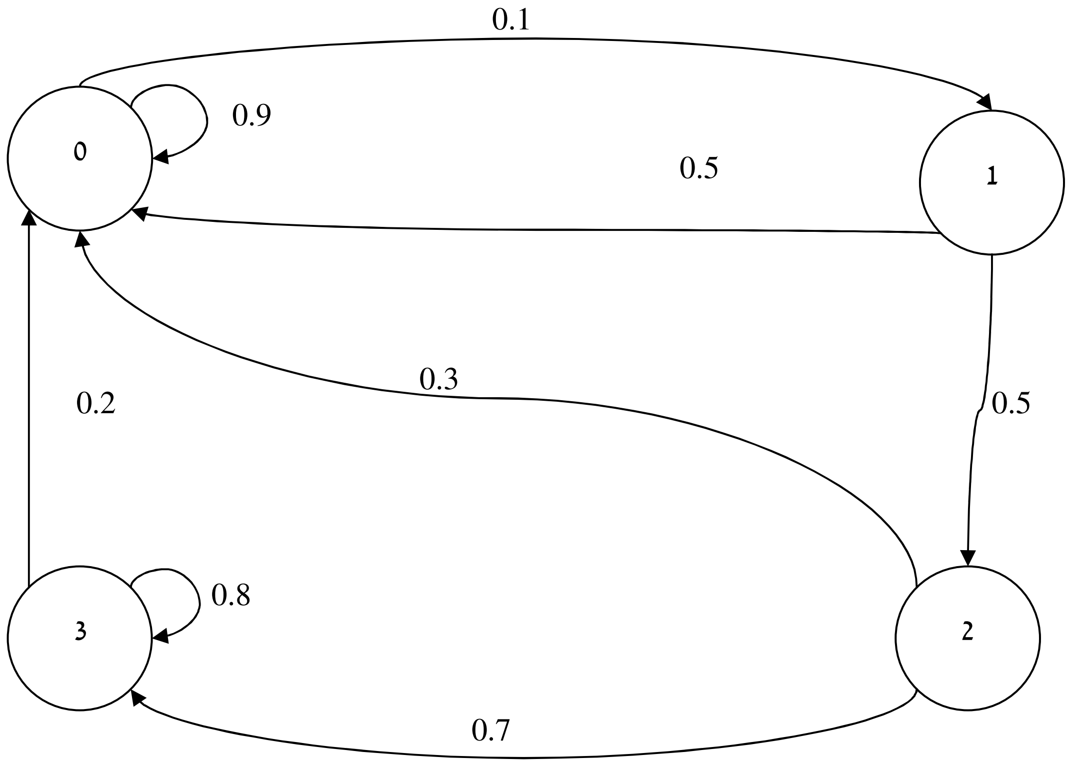
<u>סעיף ד</u>

$$P\left\{X_3=K\mid X_1=K\right\}=\left\{P^2\right\}_{(k+1,k+1)}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}p&1-p&0&\cdots&0&0&1-p&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1-p\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\p\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\left(p+(1-p)^2+p^2\right)=\frac{2p^2-p+1}{4}$$

פתרון לשאלה 2

סעיף א



סעיף ב

ישנה כאן קבוצת קשירות בודדת, ולכן השרשרת אי פריקה. כל המצבים בשרשרת נשנים.

סעיף ג

$$\begin{aligned}P\{X_2=0,X_1=3\mid X_0=2\}&=P\{X_2=0\mid X_1=3,X_0=2\}P\{X_1=3\mid X_0=2\}\\&=P\{X_2=0\mid X_1=3\}P\{X_1=3\mid X_0=2\}\\&=p_{30}p_{23}=0.2\cdot 0.7=0.14\end{aligned}$$

סעיף ד

זו בעצם הסתברות המעבר ממצב 0 למצב 2 בשני צעדים :

$$P\{X_2=0\mid X_0=2\}=\{P^2\}_{2,0}=\left\{\begin{pmatrix}0.9&0.1&0&0\\0.5&0&0.5&0\\0.3&0&0&0.7\\0.2&0&0&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.9&0.1&0&0\\0.5&0&0.5&0\\0.3&0&0&0.7\\0.2&0&0&0.8\end{pmatrix}\right\}_{2,0}$$

$$=\begin{pmatrix}0.3&0&0&0.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.9\\0.5\\0.3\\0.2\end{pmatrix}=0.3\cdot 0.9+0.7\cdot 0.2=0.27+0.14=0.41$$

סעיף ה

$$P\{S=n\}=\begin{cases}0.1, & n=1\\ 0.9\cdot 0.1, & n=2\\ 0.9^2\cdot 0.1, & n=3\end{cases}$$

ובאופן כללי, זהו משתנה אקראי גיאמטרי כאשר $p=0.1$:

$$P\{S=n\}=(0.9)^{n-1}(0.1)$$

ולכן

$$ES=\frac{1}{p}=10$$

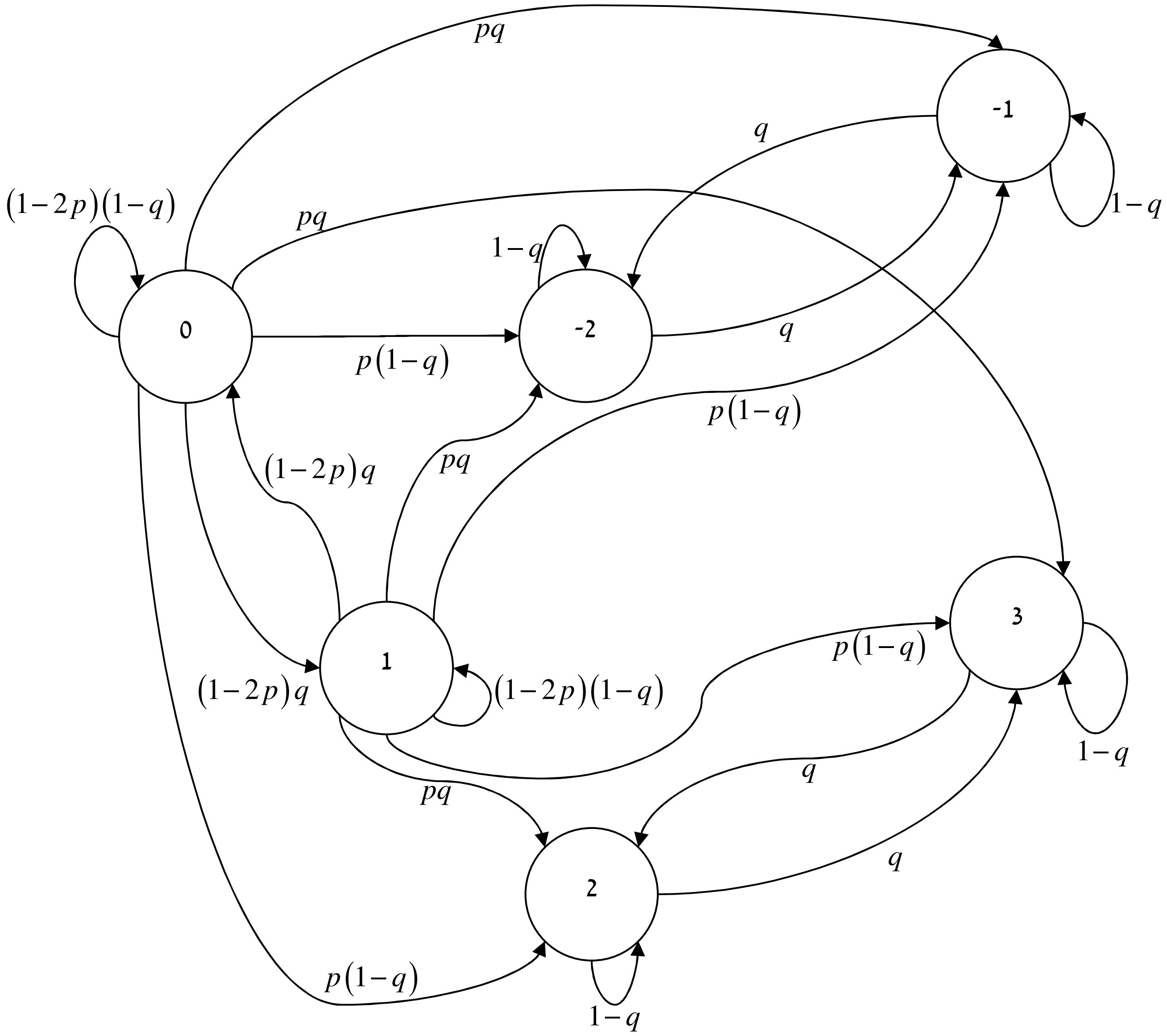
פתרון לשאלה 3

סעיף א

מטריצת המעברים :

$$P=\begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p(1-q) & pq & (1-2p)(1-q) & (1-2p)q & p(1-q) & pq \\ pq & p(1-q) & (1-2p)q & (1-2p)(1-q) & pq & p(1-q) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1-q \end{pmatrix}$$

וממנה שרטוט הדיאגרמה :



ולכן

$$P\{Z_n=0 \mid Z_{n-1}=0\}=p_{00}=(1-2p)(1-q)$$
$$P\{Z_n=-1 \mid Z_{n-1}=0\}=p_{0,-1}=pq$$
$$P\{Z_n=-1 \mid Z_{n-1}=-2\}=p_{-2,-1}=q$$

קבוצות קשירות :

$$\{-2,-1\},\{0,1\},\{2,3\}$$

ומתוכן, $\{-2,-1\}$ ו $\{2,3\}$ סגורות.

סעיף ב

Z_n שרשרת הומוגנית סופית, ולכן יש לה פילוג סטציונרי. פילוג זה אינו יחיד מכיוון ששרשרת זו פריקה.

מטריצה המעברים:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נחפש פילוגים

$$v=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{pmatrix}$$

שיקיימו

$$vP=v$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_2+\frac{1}{2}v_4 & v_1+\frac{1}{2}v_3 & 0 & 0 & v_6+\frac{1}{2}v_4 & v_5+\frac{1}{2}v_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2+\frac{1}{2}v_4=v_1 \\ v_1+\frac{1}{2}v_3=v_2 \\ 0=v_3 \\ 0=v_4 \\ v_6+\frac{1}{2}v_4=v_5 \\ v_5+\frac{1}{2}v_3=v_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=v_1 \\ v_6=v_5 \\ v_3=v_4=0 \end{cases}$$

כלומר הפילוגים הסטציונרים הם מהצורה

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\alpha & \frac{1}{2}-\alpha \end{pmatrix}$$

כאשר $0\le\alpha\le\frac{1}{2}$.

סעיף ג

מכיוון ש -1 הוא מצב נשנה, אזי

$$E\left[N_{-1}\mid Z(0)=-1\right]=\infty$$

כאשר N_{-1} מספר הביקורים במצב -1.

מכיוון ש

$$P\left\{Z(n)=-1\mid Z(0)=0\right\}=\left(P^n\right)_{0,-1}>0$$

כלומר ישנה הסתברות חיובית ממש להגיע ממצב 0 למצב -1, הרי שגם

$$E\left[N_{-1}\mid Z(0)=0\right]=\infty$$

גליון 5 – חלק שני

סעיף א

```
function X = markov (x0, P, n)
   X (1) = x0;
   for i=2 : n+1
      X (i) = markov_next_state (X(i-1),P);
   end
end

function X = markov_next_state(x0, P)
   vec = P(x0,:);
   temp(1) = 0;

   for i=2 : length(vec) + 1
      temp (i) = temp (i-1) + vec(i-1);
   end

   r = rand;

   for i=1 : length(temp) - 1
      if r > temp(i) && r < temp(i+1)
         X = i;
      end
   end
end
```

סעיף ב

מצב	סיווג
1	חולף
2	נשנה
3	נשנה

סעיף ג

מטריצת המעברים:

$$P=\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

חישוב ההתפלגות באופן כללי:

$$P\left\{X\left(k\right)=n\right\}=\begin{cases}\left\{P^k\right\}_{11}, n=1\\ \left\{P^k\right\}_{12}, n=2\\ \left\{P^k\right\}_{13}, n=3\end{cases}$$

ובעזרת $Matlab$ מקבלים

$$P\{X(5)=n\}=\begin{cases}\{P^5\}_{11}, & n=1\\ \{P^5\}_{12}, & n=2\\ \{P^5\}_{13}, & n=3\end{cases}=\begin{cases}0.7738, n=1\\ 0.1217, n=2\\ 0.1045, n=3\end{cases}$$

$$P\{X(50)=n\}=\begin{cases}\{P^{50}\}_{11}, & n=1\\ \{P^{50}\}_{12}, & n=2\\ \{P^{50}\}_{13}, & n=3\end{cases}=\begin{cases}0.0769, n=1\\ 0.3123, n=2\\ 0.6107, n=3\end{cases}$$

$$P\{X(100)=n\}=\begin{cases}\{P^{100}\}_{11}, & n=1\\ \{P^{100}\}_{12}, & n=2\\ \{P^{100}\}_{13}, & n=3\end{cases}=\begin{cases}0.0059, n=1\\ 0.3317, n=2\\ 0.6624, n=3\end{cases}$$

$$P\{X(999)=n\}=\begin{cases}\{P^{999}\}_{11}, & n=1\\ \{P^{999}\}_{12}, & n=2\\ \{P^{999}\}_{13}, & n=3\end{cases}=\begin{cases}0, & n=1\\ 0.3333, & n=2\\ 0.6667, & n=3\end{cases}$$

$$P\{X(1000)=n\}=\begin{cases}\{P^{1000}\}_{11}, & n=1\\ \{P^{1000}\}_{12}, & n=2\\ \{P^{1000}\}_{13}, & n=3\end{cases}=\begin{cases}0, & n=1\\ 0.3333, & n=2\\ 0.6667, & n=3\end{cases}$$

<u>סעיף ד</u>

חישוב הפילוג הסטציונרי:

$$vP=v$$

$$(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}0.95 & 0.05 & 0\\ 0 & 0.6 & 0.4\\ 0 & 0.2 & 0.8\end{pmatrix}=(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$(0.95\alpha, 0.05\alpha+0.6\beta+0.2\gamma, 0.4\beta+0.8\gamma)=(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\begin{cases}0.95\alpha=\alpha\\ 0.05\alpha+0.6\beta+0.2\gamma=\beta\\ 0.4\beta+0.8\gamma=\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ 0.6\beta+0.2\gamma=\beta\\ 0.4\beta+0.8\gamma=\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \gamma=\dfrac{0.4}{0.2}\beta=2\beta\\ \alpha+\beta+\gamma=1\end{cases}$$

ולכן הפילוג הסטציונרי היחיד הוא

$$v_0=\left(0,\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)$$

נבדוק האם ישנה התכנסות:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} v_0 P^n = v_0 \lim_{n\to\infty}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0.081 & -0.5774 \\ 0 & -0.8915 & -0.5774 \\ 0 & 0.4457 & -0.5774 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -0.2727 & -0.7273 \\ 0 & -0.7478 & 0.7478 \\ 0 & -0.5774 & -1.1547 \end{pmatrix}\right]^n$$

$$= v_0 \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0.081 & -0.5774 \\ 0 & -0.8915 & -0.5774 \\ 0 & 0.4457 & -0.5774 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1 & -0.2727 & -0.7273 \\ 0 & -0.7478 & 0.7478 \\ 0 & -0.5774 & -1.1547 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix} 1 & 0.081 & -0.5774 \\ 0 & -0.8915 & -0.5774 \\ 0 & 0.4457 & -0.5774 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -0.2727 & -0.7273 \\ 0 & -0.7478 & 0.7478 \\ 0 & -0.5774 & -1.1547 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(0, \alpha+\beta+\gamma, 2(\alpha+\beta+\gamma)\right) \underset{\alpha+\beta+\gamma=1}{=} \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

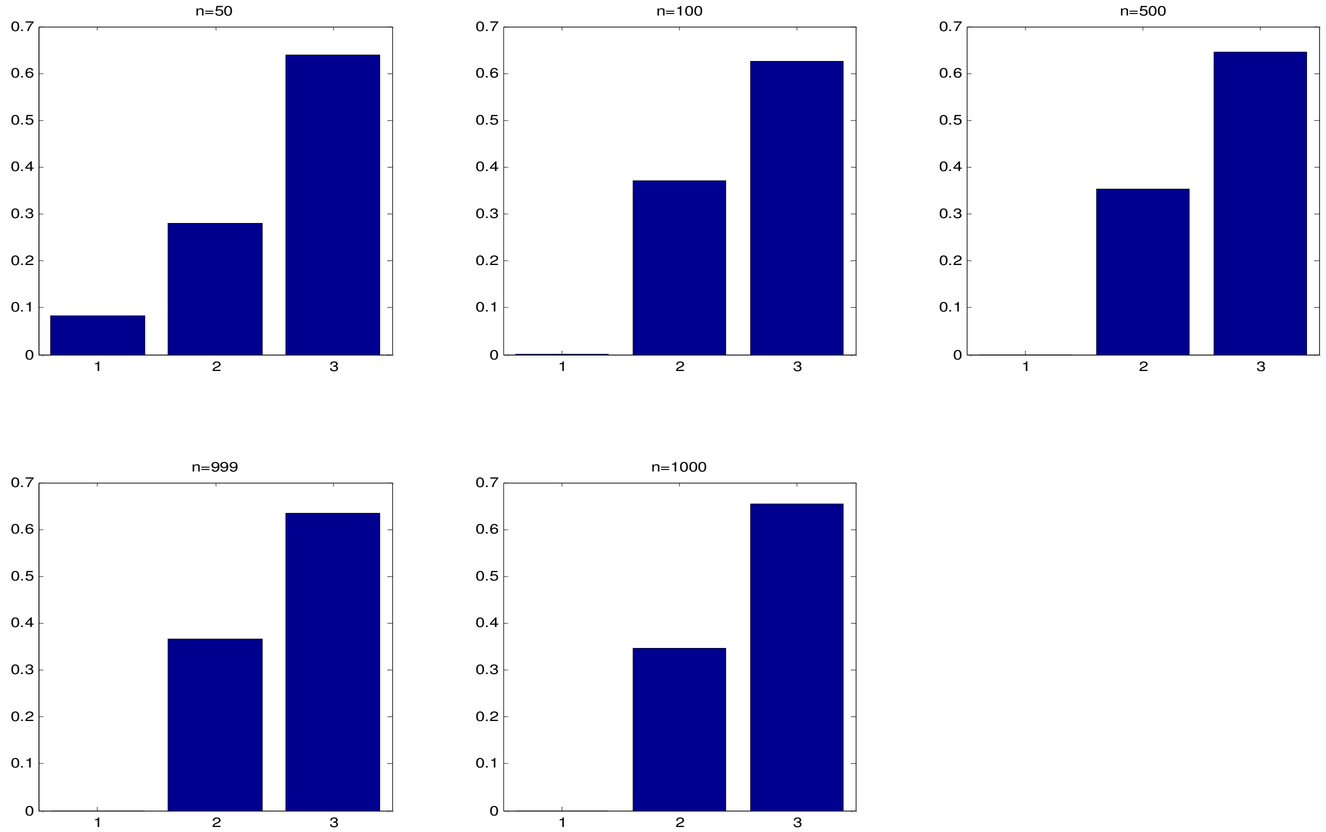
כלומר אכן ישנה התכנסות לפילוג הסטציונרי $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

סעיף ה

בעזרת הקוד הבא:

```
P = [ 0.95 , 0.05 , 0 ; 0 , 0.6 , 0.4 ; 0 , 0.2 , 0.8 ];
for i = 1 : 500
   X (i,:) = markov (1, P, 1000);
end

N=hist (X(:,50),3);
N=N/sum(N);
subplot(2,3,1);
bar(N);
title('n=50');

N=hist (X(:,100),3);
N=N/sum(N);
subplot(2,3,2);
bar(N);
title('n=100');

N=hist (X(:,500),2);
N=N/sum(N);
N= [0,N];
subplot(2,3,3);
bar(N);
title('n=500');

N=hist (X(:,999),2);
N=N/sum(N);
N= [0,N];
subplot(2,3,4);
bar(N);
title('n=999');

N=hist (X(:,101),2);
N=N/sum(N);
N= [0,N];
subplot(2,3,5);
bar(N);
title('n=1000');
```

קיבלנו את הפילוגים :

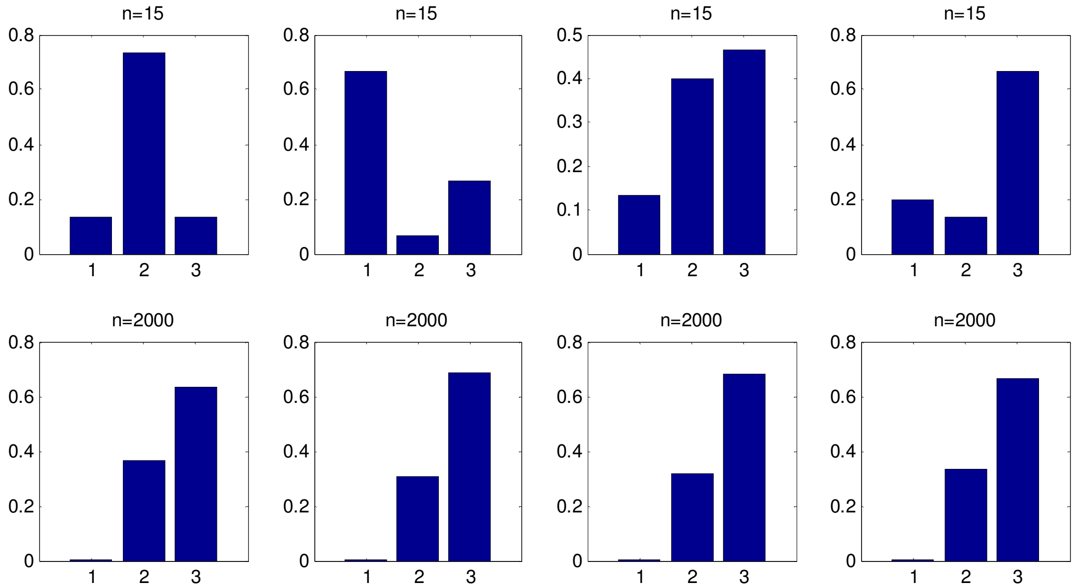


אנו רואים תוצאות אמפיריות המאשרות את החישובים האנליטיים של הסעיפים הקודמים :
קיים פילוג סטציונרי $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, וישנה התכנסות אליו.

<u>סעיף ו</u>
בעזרת הקוד הבא :

```
P = [ 0.95 , 0.05 , 0 ; 0 , 0.6 , 0.4 ; 0 , 0.2 , 0.8 ];
for i = 1 : 4
   X (i,:) = markov (1, P, 2000);

   X(i,1:15)
   N=hist (X(i,1:15),[1,2,3]);
   N;
   N=N/sum(N);
   subplot(2,4,i);
   bar(N);
   title('n=15');

   N=hist (X(i,:),[1,2,3]);
   N=N/sum(N);
   subplot(2,4,i+4);
   bar(N);
   title('n=2000');

end
```

קיבלנו את הפילוגים :



עבור $n=1,2,...,2000$ אנו עוברים על הרבה מאוד שלבים בשרשרת, ולכן הפילוגים המתקבלים בכל ניסוי קרובים מאוד לפילוג הסטציונרי שחושב בסעיפים הקודמים.
עבור $n=1,2,...,15$ אנו עוברים על מעט מדי מצבים כדי לקבל תאור מדוייק של פילוג השרשרת, ולכן בכל ניסוי קיבלנו פילוג שונה מאוד.

<u>סעיף ז</u>
כעת, מטריצת מעברים היא

$$P=\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

חישוב ההתפלגות באופן כללי :

$$P\{X(k)=n\}=\begin{cases} \{P^k\}_{11}, n=1 \\ \{P^k\}_{12}, n=2 \\ \{P^k\}_{13}, n=3 \end{cases}$$

ולכן

$$P\{X(1)=n\}=\begin{cases}\{P\}_{11}, & n=1\\ \{P\}_{12}, & n=2\\ 0, & n=3\end{cases}=\begin{cases}0.95, & n=1\\ 0.05, & n=2\\ 0, & n=3\end{cases}$$

$$P\{X(2)=n\}=\begin{cases}\{P^2\}_{11}, n=1\\ \{P^2\}_{12}, n=2\\ \{P^2\}_{13}, n=2\end{cases}=\begin{cases}0.9025, n=1\\ 0.0475, n=2\\ 0.05, \quad n=3\end{cases}$$

$$P\{X(3)=n\}=\begin{cases}\{P^3\}_{11}, n=1\\ \{P^3\}_{12}, n=2\\ \{P^3\}_{13}, n=2\end{cases}=\begin{cases}0.8574, n=1\\ 0.0951, n=2\\ 0.0475, n=3\end{cases}$$

$$P\{X(999)=n\}=\begin{cases}\{P^3\}_{11}, n=1\\ \{P^3\}_{12}, n=2\\ \{P^3\}_{13}, n=2\end{cases}=\begin{cases}0, n=1\\ 0.5128, n=2\\ 0.4872, n=3\end{cases}$$

$$P\{X(1000)=n\}=\begin{cases}\{P^3\}_{11}, n=1\\ \{P^3\}_{12}, n=2\\ \{P^3\}_{13}, n=2\end{cases}=\begin{cases}0, n=1\\ 0.4872, n=2\\ 0.5128, n=3\end{cases}$$

בסעיף ג' ראינו כי הפילוג מתכנס לפילוג סטציונרי, אך כאן, מכיוון שהשרשרת עוברת תמיד בין מצבים 2 ו 3, לא קיים פילוג סטציונרי.

__סעיף ח__

מטריצת המעברים :

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0\\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

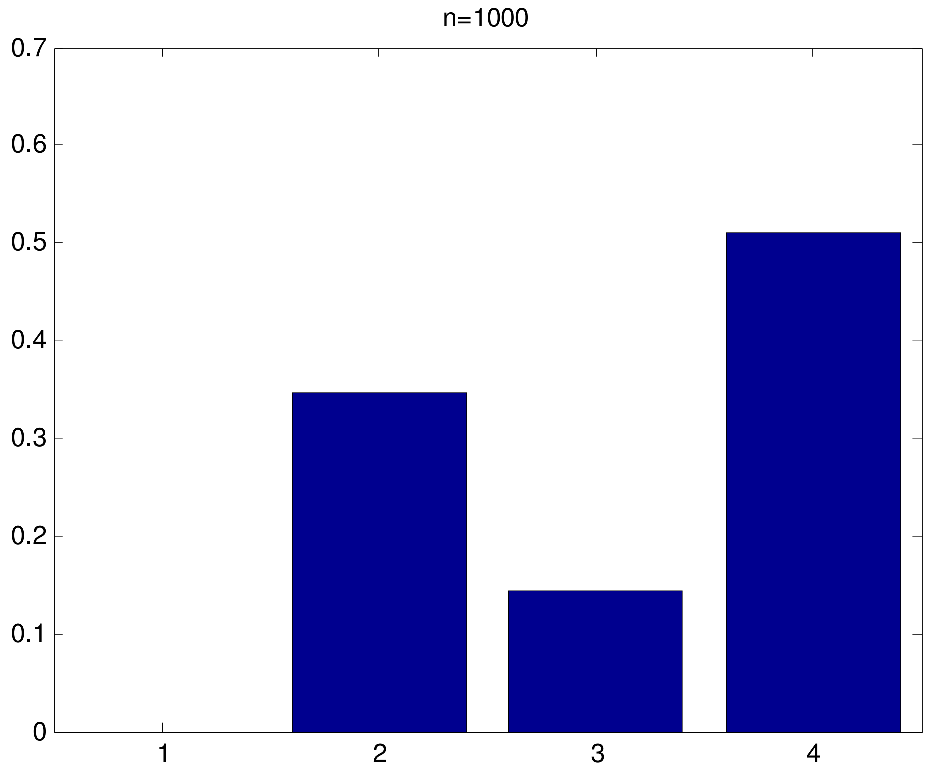
חישוב ההתפלגות :

$$P\{X(1000)=n\}=\begin{cases}\{P^{1000}\}_{11}, & n=1\\ \{P^{1000}\}_{12}, & n=2\\ \{P^{1000}\}_{13}, & n=3\\ \{P^{1000}\}_{14}, & n=3\end{cases}=\begin{cases}0, & n=1\\ \frac{1}{3}, & n=2\\ \frac{1}{6}, & n=3\\ \frac{1}{2}, & n=3\end{cases}$$

בעזרת הקוד הבא :

```
P = [ 0,0.5,0,0.5 ; 0,0.6,0.4,0 ; 0,0.8,0.2,0 ; 0,0,0,1 ];
for i = 1 : 500
   X (i,:) = markov (1, P, 1000);
end

N=hist (X(:,1000),[1,2,3,4]);
N=N/sum(N);
bar(N);
title('n=1000');
```

קיבלנו את הפילוג:



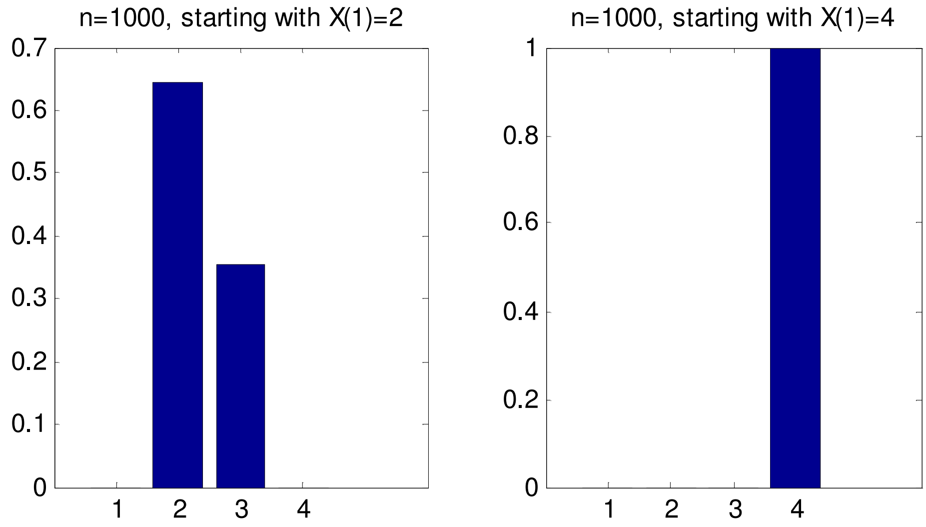
הפילוג האמפירי מאמת את תוצאות החישוב האנליטיות, כלומר הפילוג אושש להיות $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

<u>סעיף ט' ואחרון</u>

בעזרת הקוד הבא:

```
P = [ 0,0.5,0,0.5 ; 0,0.6,0.4,0 ; 0,0.8,0.2,0 ; 0,0,0,1 ];
X = markov (2, P, 1000);

N=hist (X,[1,2,3,4]);
N=N/sum(N);
subplot(1,2,1);
bar(N);
title('n=1000, starting with X(1)=2');

Y = markov (4, P, 1000);
N=hist (Y,[1,2,3,4]);
N=N/sum(N);
subplot(1,2,2);
bar(N);
title('n=1000, starting with X(1)=4');
```

קיבלנו את הפילוגים:



כצפוי, אם אנו מתחילים ממצב 4, לא ניתן לצאת ממנו, ואם אנו מתחילים במצב 2 (או 3), לא ניתן לצאת מהקבוצה $\{2,3\}$, מכיוון ש $\{2,3\},\{4\}$ קבוצות סגורות. מה שמצאנו בסעיף זה את שני הפילוגים הסטציונרים של השרשרת.

ראינו שפילוג התחלתי כלשהו יתכנס לאחד משני פילוגים אלו.
בסעיף הקודם חישבנו פילוג אמפירי של הרבה ניסויים, כאשר נקודת ההתחלה היא מצב 1.

גליון 6

פתרון לשאלה 1

אם N_t הוא מספר המאורעות שקרו באיטרוול הזמן t, אזי מכיוון שהתהליך פואסוני, מתקיים

$$P\{N_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

לכן,

$$F_{\Delta t_i}(\alpha) = P\{\Delta t_i \le \alpha\} = 1 - P\{\Delta t_i > \alpha\} = 1 - P\{N_\alpha = 0\} = 1 - \frac{(\lambda \alpha)^0}{0!} e^{-\lambda \alpha} = 1 - e^{-\lambda \alpha}$$

ואז

$$f_{\Delta t_i}(\alpha) = \lambda e^{-\lambda \alpha}$$

משי"ל.

פתרון לשאלה 2

$$F_\tau(\alpha \mid X_{t_0} = 1) = P\{\tau \le \alpha \mid X_{t_0} = 1\} = \begin{cases} 1, & \alpha > t_0 \\ \dfrac{P\{N_\alpha = 1, N_{t_0 - \alpha} = 0\}}{P\{N_{t_0} = 1\}}, & 0 \le \alpha \le t_0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \alpha > t_0 \\ \dfrac{P\{N_\alpha = 1\} P\{N_{t_0 - \alpha} = 0\}}{P\{N_{t_0} = 1\}}, & 0 \le \alpha \le t_0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \alpha > t_0 \\ \dfrac{\dfrac{(\lambda\alpha)^1}{1!} e^{-\lambda\alpha} \dfrac{(\lambda(t_0 - \alpha))^0}{0!} e^{-\lambda(t_0 - \alpha)}}{\dfrac{(\lambda t_0)^1}{1!} e^{-\lambda t_0}}, & 0 \le \alpha \le t_0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \alpha > t_0 \\ \dfrac{\lambda \alpha e^{-\lambda\alpha} e^{-\lambda(t_0 - \alpha)}}{\lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}, & 0 \le \alpha \le t_0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \alpha > t_0 \\ \dfrac{\alpha}{t_0}, & 0 \le \alpha \le t_0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$$

ולכן משי"ל.

פתרון לשאלה 3

סעיף א

$$R_Y(k)=E\left[Y(n)Y(n+k)\right]=E\left[\sum_{s=-\infty}^{\infty}X(n-s)h(s)\cdot\sum_{t=-\infty}^{\infty}X((n+k)-t)h(t)\right]$$
$$=E\left[\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}X(n-s)X((n+k)-t)h(s)h(t)\right]$$
$$=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}E\left[X(n-s)X(n+k-t)\right]h(s)h(t)$$
$$=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}R_X(k+s-t)h(s)h(t)$$
$$S_Y(Z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_Y(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}R_X(k+s-t)h(s)h(t)\right)z^{-k}$$
$$=\sum_{t=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_X(k+s-t)z^{-k}\right)h(s)h(t)$$
$$=\sum_{t=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}z^{s-t}S_X(z)h(s)h(t)$$
$$=S_X(z)\sum_{t=-\infty}^{\infty}h(t)z^{-t}\sum_{s=-\infty}^{\infty}h(s)z^{-(-s)}=S_X(z)H(z)H\left(\frac{1}{z}\right)$$

סעיף ב

אם נביט לרגע בסעיף א' נוכל לומר ש

$$S_Y(z)=\frac{\sigma^2}{\left(z-\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i z^{-i}\right)\left(z^{-1}-\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i z^{i}\right)}=S_X(z)H(z)H\left(z^{-1}\right)$$

כאשר

$$H(z)=\frac{1}{z-\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i z^{-i}},\quad S_X(z)=\sigma^2$$

לכן, נביט במערכת LTI בזמן בדיד, אשר פונקצית התמסורת שלה היא

$$H(z)=\frac{1}{z-\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i z^{-i}}$$

כלומר, כאשר כניסת המערכת היא $x[n]$ ויציאתה $y[n]$, אזי

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{1}{z-\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i z^{-i}}$$
$$\Rightarrow\ Y(z)\left(z-\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i z^{-i}\right)=X(z)$$
$$\Rightarrow\ Y(z)z-\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i z^{-i}Y(z)=X(z)$$

ובמישור הזמן:

$$y[n+1]-\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i y[n-i]=x[n]$$
$$y[n+1]=\alpha_0 y[n]+\alpha_1 y[n-1]+\ldots+\alpha_{N-1}y[n-(N-1)]+x[n]$$

נמשיך ונקבל:

$$y[n+1]=\alpha_0 y[n]+\alpha_1 y[n-1]+\ldots+\alpha_{N-1} y[n-(N-1)]+x[n]$$

$$\underline{X}[n+1]=\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{N-1}\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\underline{X}+\begin{pmatrix}v[n]\\ 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$y[n+1]=\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{N-1}\end{pmatrix}\underline{X}[n+1]$$

כאשר $w[n]\equiv 0$, כלומר קיבלנו

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{N-1}\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}[n]=\begin{pmatrix}v[n]\\ 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$R_v=\sigma^2$$

$$R_w=0$$

פתרון לשאלה 4

סעיף א

נביט במקרה שבו $k=2$, ואז

$$E[X(t)]=1\cdot P\{X(t)=1\}+0\cdot P\{X(t)=0\}=P\{X(t)=1\}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)=f(t)$$

כלומר התהליך אינו סמ"ר.

סעיף ב

כאשר $k=1$ אזי X_t מקבל את הערכים 0 או 1. בעזרנו ברמז:

$$p_{01}=P\left\{X_{nT}=1\,|\,X_{(n-1)T}=0\right\}=1-\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda T}\right)$$

$$p_{11}=P\left\{X_{nT}=1\,|\,X_{(n-1)T}=1\right\}=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda T}\right)$$

$$p_{10}=P\left\{X_{nT}=0\,|\,X_{(n-1)T}=1\right\}=1-\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda T}\right)$$

$$p_{00}=P\left\{X_{nT}=0\,|\,X_{(n-1)T}=0\right\}=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda T}\right)$$

כלומר

$$\underline{\underline{P}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+e^{-2\lambda T} & 1-e^{-2\lambda T}\\ 1-e^{-2\lambda T} & 1+e^{-2\lambda T}\end{pmatrix}$$

סעיף ג

$$P\left\{Y(t_1)=i,Y(t_2)=j\right\}$$
$$=P\left\{Y(t_1)=i\,|\,Y(t_2)=j\right\}P\left\{Y(t_2)=j\right\}$$
$$=\begin{cases} P\left\{Y(t_1)=0\,|\,Y(t_2)=0\right\}P\left\{Y(t_2)=0\right\}, & i=0,j=0\\ P\left\{Y(t_1)=1\,|\,Y(t_2)=0\right\}P\left\{Y(t_2)=0\right\}, & i=1,j=0\\ P\left\{Y(t_1)=0\,|\,Y(t_2)=1\right\}P\left\{Y(t_2)=1\right\}, & i=0,j=1\\ P\left\{Y(t_1)=1\,|\,Y(t_2)=1\right\}P\left\{Y(t_2)=1\right\}, & i=1,j=1 \end{cases}$$
$$=\begin{cases} P\left\{Y(t_1)=0\,|\,Y(t_2)=0,A=0\right\}P\left\{A=0\right\}P\left\{Y(t_2)=0\right\}+P\left\{Y(t_1)=0\,|\,Y(t_2)=0,A=1\right\}P\left\{A=1\right\}P\left\{Y(t_2)=0\right\}, & i=0,j=0\\ P\left\{Y(t_1)=1\,|\,Y(t_2)=0,A=0\right\}P\left\{A=0\right\}P\left\{Y(t_2)=0\right\}+P\left\{Y(t_1)=1\,|\,Y(t_2)=0,A=0\right\}P\left\{A=0\right\}P\left\{Y(t_2)=0\right\}, & i=1,j=0\\ P\left\{Y(t_1)=0\,|\,Y(t_2)=1,A=0\right\}P\left\{A=0\right\}P\left\{Y(t_2)=1\right\}+P\left\{Y(t_1)=0\,|\,Y(t_2)=1,A=0\right\}P\left\{A=0\right\}P\left\{Y(t_2)=1\right\}, & i=0,j=1\\ P\left\{Y(t_1)=1\,|\,Y(t_2)=1,A=0\right\}P\left\{A=0\right\}P\left\{Y(t_2)=1\right\}+P\left\{Y(t_1)=1\,|\,Y(t_2)=1,A=0\right\}P\left\{A=0\right\}P\left\{Y(t_2)=1\right\}, & i=1,j=1 \end{cases}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{cases} P\left\{Y(t_1)=0\,|\,Y(t_2)=0\right\}P\left\{Y(t_2)=0\right\}+P\left\{Y(t_1)=1\,|\,Y(t_2)=1\right\}P\left\{Y(t_2)=0\right\}, & i=0,j=0\\ P\left\{Y(t_1)=1\,|\,Y(t_2)=0\right\}P\left\{Y(t_2)=0\right\}+P\left\{Y(t_1)=0\,|\,Y(t_2)=1\right\}P\left\{Y(t_2)=0\right\}, & i=1,j=0\\ P\left\{Y(t_1)=0\,|\,Y(t_2)=1\right\}P\left\{Y(t_2)=1\right\}+P\left\{Y(t_1)=1\,|\,Y(t_2)=0\right\}P\left\{Y(t_2)=1\right\}, & i=0,j=1\\ P\left\{Y(t_1)=1\,|\,Y(t_2)=1\right\}P\left\{Y(t_2)=1\right\}+P\left\{Y(t_1)=0\,|\,Y(t_2)=0\right\}P\left\{Y(t_2)=1\right\}, & i=1,j=1 \end{cases}$$

ואז

$$P\left\{Y(t_1)=i,Y(t_2)=j\right\}=\frac{1}{8}\begin{cases} \left(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1-e^{-2\lambda t_2}\right)+\left(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1-e^{-2\lambda t_2}\right), & i=0,j=0\\ \left(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1-e^{-2\lambda t_2}\right)+\left(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1-e^{-2\lambda t_2}\right), & i=1,j=0\\ \left(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1+e^{-2\lambda t_2}\right)+\left(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1+e^{-2\lambda t_2}\right), & i=0,j=1\\ \left(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1+e^{-2\lambda t_2}\right)+\left(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1+e^{-2\lambda t_2}\right), & i=1,j=1 \end{cases}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{cases} \left(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1-e^{-2\lambda t_2}\right), & i=0,j=0\\ \left(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1-e^{-2\lambda t_2}\right), & i=1,j=0\\ \left(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1+e^{-2\lambda t_2}\right), & i=0,j=1\\ \left(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right)\left(1+e^{-2\lambda t_2}\right), & i=1,j=1 \end{cases}$$

(תכל'ס יכלנו להגיע לתוצאה זו יותר מוקדם, בגלל הסימטריה של $\underline{\underline{P}}$ שקיבלנו בסעיף ב')

<u>סעיף ד</u>

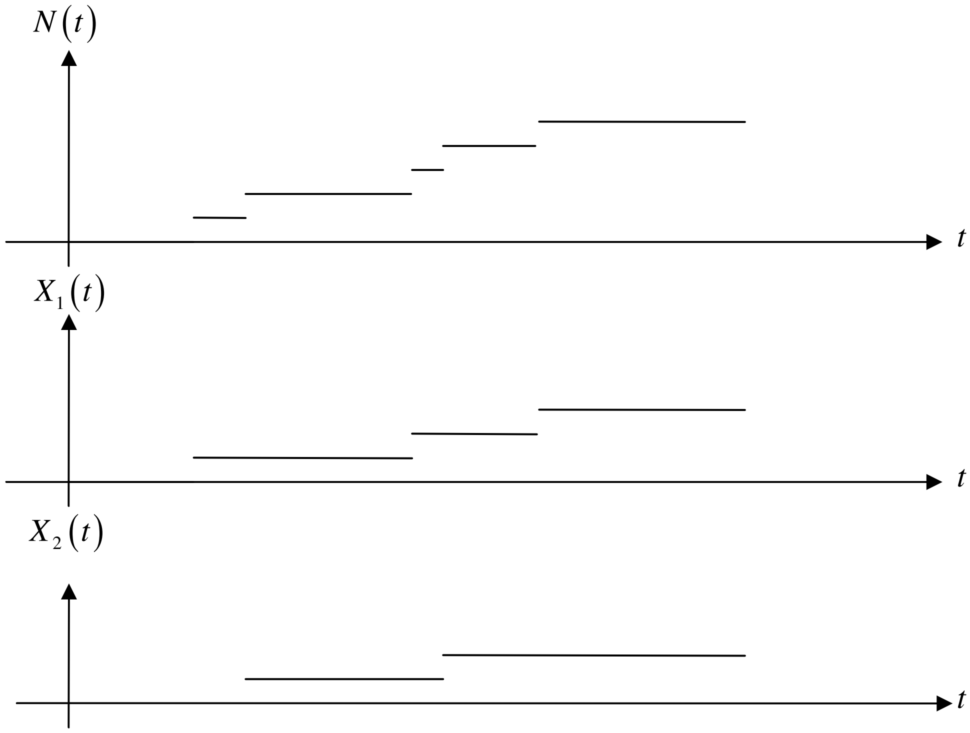
$$E\left[Y(t)\right]=1\cdot P\left\{Y(t)=1\right\}+0\cdot P\left\{Y(t)=0\right\}=P\left\{Y(t)=1\right\}$$
$$=P\left\{A=0\right\}P\left\{N\,is\,even\right\}+P\left\{A=1\right\}P\left\{N\,is\,odd\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)+\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda t}\right)\right)=\frac{1}{2}$$
$$E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right]=1\cdot P\left\{Y(t)Y(t+\tau)=1\right\}+0\cdot P\left\{Y(t)Y(t+\tau)=0\right\}$$
$$=P\left\{Y(t)Y(t+\tau)=1\right\}$$
$$=P\left\{Y(t)=1,Y(t+\tau)=1\right\}=\frac{1}{4}\left(1+e^{-2\lambda(t+\tau-t)}\right)\left(1+e^{-2\lambda(t+\tau)}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+e^{-2\lambda\tau}\right)\left(1+e^{-2\lambda(t+\tau)}\right)$$

לכן התהליך אינו סמ"ר.

פתרון לשאלה 5

סעיף א

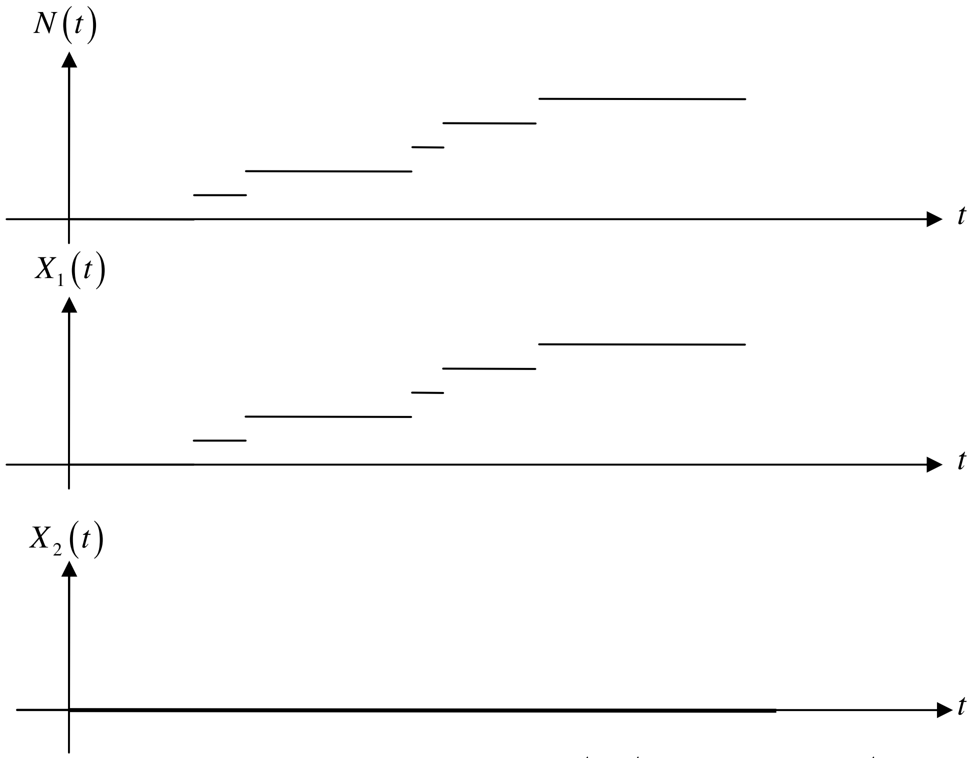
פונקציית מדגם ל$N(t)$, $X_1(t)$ ו $X_2(t)$:



סעיף ב

המרחק בין כל קפיצה של $N(t)$ מפולג מעריכי עם פרמטר λ. המרחק בין כל קפיצה של $X_1(t)$ הוא סכום של שני מרחקי קפיצה של $N(t)$, כלומר הוא מפולג כמו סכום של שני מ״א המפולגים מעריכית עם פרמטר λ. מכיוון שסכום של שני מ״א המפולגים מעריכית עם פרמטר λ הוא אינו מ״א מעריכי, המרחק בין הקפיצות של תהליך $X_1(t)$ אינו מפולג מעריכית, ולכן התהליך לא יכול להיות פואסוני.

סעיף ג



כאן ישנה הסתברות שכל המהנדסים יועברו למחלקה מסויימת, בעוד שבסעיף א׳ מהנדסים מופנים באופן דטרמיניסטי למחלקות לסרוגין.

סעיף ד

ראשית, מכיוון ש $N(t)$ פואסוני, אז $N(0)=0$, ולכן $X_1(0)=0$.

שנית, מכיוון ש $N(t)$ פואסוני אזי גם תוספות בזמנים שונים ל $X_1(t)$ אינן תלויות.

שלישית:

$$P\{X_1(t)-X_1(s)=n\}=\sum_{k=n}^{\infty}P\{X_1(t)-X_1(s)=n\mid N(t)=k\}P\{N(t)=k\}$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{k-n}P\{N(t)=k\}$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{k-n}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-n}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-\lambda t}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{n!(k-n)!}\left(\frac{2}{3}\right)^k\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\lambda t}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\lambda t\right)^k}{(k-n)!}=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\lambda t\right)^m\left(\frac{2}{3}\lambda t\right)^n}{m!}$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\lambda t\right)^n e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\lambda t\right)^m}{m!}=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\lambda t\right)^n e^{-\lambda t}e^{\frac{2}{3}\lambda t}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{3}\lambda t\right)^n}{n!}e^{-\frac{1}{3}\lambda t}$$

ולכן $X_1(t)$ פואסוני עם פרמטר $\frac{1}{3}\lambda$.

סעיף ה

באותו אופן שקיבלנו ש $X_1(t)$ פואסוני עם פרמטר $\frac{1}{3}\lambda$, ניתן לקבל בקלות כי $X_2(t)$ פואסוני עם פרמטר $\frac{2}{3}\lambda$, ואז

$$P\{X_2(t)=1\}=P\{X_2(t)-X_2(0)=1-0\}=P\{X_2(t)-X_2(0)=1\}=\frac{\left(\frac{2}{3}\lambda(t-0)\right)^1}{1!}e^{-\frac{2}{3}\lambda(t-0)}$$

$$=\frac{2}{3}\lambda te^{-\frac{2}{3}\lambda t}$$