

 www.hapetek.co.il

מבוא לעיבוד ספרתי של אותות

044198

סיכום הקורס

ייתכנו שגיאות! נא לשלוח תיקונים ל avi.bandel@gmail.com

עדכון אחרון : 21/7/2010

תוכן עניינים

3	התמרות	.1
3	טור פורייה	.1.1
4	התמרת פורייה לזמן רציף	.1.2
6	התמרת פורייה לזמן בדיד	.1.3
8	התמרת Z	1.4.
10	התמרת פורייה דיסקרטית	.1.5
12	קונבולוציה מחזורית (ציקלית)	.1.6
14	דגימה	.2
17	אנליזה ספקטרלית	.3
18	מסננים ספרתיים	.4
20	תכנון מסנן FIR	.4.2
22	תכנון מסנן IIR	.4.3
24	עיבוד רב-קצבים	5.
24	הורדת קצב	.5.1
24	העלאת קצב	.5.2
25	דברים נוספים	.6
26	נספחים	.7
26	כללי	.7.1
27	מטריצות	.7.2

1. התמרות

1.1. טור פורייה

1.1.1. הגדרה

טור פורייה של אות בזמן רציף $x(t)$ במחזור T_0 :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X^S[n] e^{j\frac{2\pi n}{T_0}t}$$

כאשר הסדרה הבדידה $X^S[k]$ היא סדרת מקדמי פורייה המתאימים:

$$X^S[k] \triangleq \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{T_0}} dt$$

1.1.2. הקשר להתמרת DTFT

התמרת פורייה של אות $x(t)$ במחזור T_0 המיוצג בעזרת טור פורייה $X^S[k]$:

$$X^F(\omega) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} X^S[m] \delta(\omega - m\omega_0)$$

כאשר $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

1.1.3. תכונות התמרת פורייה

ביטוי מתמטי	התכונה	מס
$\int_0^{T_0} x(t) ^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^S[k] ^2$	משפט פרסבל	1
$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{X}^S[k] = X^S[-k]$	ממשיות $x(t)$	2

1.2. התמרת פורייה לזמן רציף

התמרת פורייה (CTFT – Continuous Time Fourier Transform) של אות בזמן רציף $x(t)$:

$$X^F(\omega) = CTFT\{x(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

וההתמרה ההפוכה (ICTFT – Inverse CTFT) :

$$x(t) = ICTFT\{X^F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

1.2.1. תכונות התמרת CTFT

התמרת CTFT	אות בזמן רציף	תכונה	מס
$aX^F(\omega) + bY^F(\omega)$	$ax(t) + by(t)$	ליניאריות	1
$2\pi \cdot x(-\omega)$	$X^F(t)$	דואליות	2
$\frac{1}{ a } X^F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$x(at), a \in \mathbb{R}$	מתיחה וכיווץ (Scaling)	3
$e^{-j\omega t_0} X^F(\omega)$	$x(t - t_0)$	הזזה בזמן	4
$X^F(\omega - \omega_0), \omega_0 \in \mathbb{R}$	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	הזזה בתדר	5
$\frac{1}{2}(X^F(\omega - \omega_0) + X^F(\omega + \omega_0))$	$x(t) \cos(\omega_0 t)$	מכפלה ב \cos	6
$\frac{1}{2j}(X^F(\omega - \omega_0) - X^F(\omega + \omega_0))$	$x(t) \sin(\omega_0 t)$	מכפלה ב \sin	7
$X^F(\omega) \cdot Y^F(\omega)$	$x(t) * y(t)$	קונבולוציה בזמן	8
$\frac{1}{2\pi} X^F(\omega) * Y^F(\omega)$	$x(t) \cdot y(t)$	קונבולוציה בתדר	9
$(j\omega)^n X^F(\omega)$	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	גזירה בזמן	10
$\frac{1}{j\omega} X^F(\omega) + \pi X^F(0) \delta(\omega)$	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	אינטגרציה בזמן	11
$j \frac{d}{d\omega} X^F(\omega)$	$tx(t)$	גזירה בתדר	12
$\bar{X}^F(\omega) = X^F(-\omega)$ \Downarrow $\text{Re}\{X^F(\omega)\} = \text{Re}\{X^F(-\omega)\}$ $\text{Im}\{X^F(\omega)\} = -\text{Im}\{X^F(-\omega)\}$ $ X^F(\omega) = X^F(-\omega) $ $\arg\{X^F(\omega)\} = -\arg\{X^F(-\omega)\}$	$x(t) = \bar{x}(t)$ (אות ממשית)	ממשיות בזמן	13
$\bar{X}^F(\omega) = X^F(\omega)$ (התמרת ממשית)	$\bar{x}(t) = x(-t)$		14
$X^F(\omega) = X^F(-\omega)$	$x(t) = x(-t)$		15
$X^F(\omega) = -X^F(-\omega)$	$x(t) = -x(-t)$		16
$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{y}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^F(\omega) \bar{Y}^F(\omega) d\omega$		משפט פרסבל	17

התמרת CTFT	אות בזמן רציף	מס
1	$\delta(t)$	1
$e^{-j\omega t_0}$	$\delta(t-t_0)$	2
$2\pi\delta(\omega)$	1	3
$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$	4
$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	5
$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$e^{j\omega_0 t}$	6
$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$	$\cos(\omega_0 t)$	7
$\frac{\pi}{j}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$	$\sin(\omega_0 t)$	8
$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \begin{cases} 1, & \omega < \pi \\ 0.5, & \omega = \pi \\ 0, & \omega > \pi \end{cases}$	$\text{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin \pi t}{\pi t}$	9
$\begin{cases} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega), & \omega \neq 0 \\ \pi\delta(\omega), & \omega = 0 \end{cases}$	$u(t) = \frac{\text{sign}(t)+1}{2}$	10
$\frac{1}{a+j\omega}, \quad \text{Re}(a) > 0$	$e^{-at}u(t)$	11
$\frac{1}{(a+j\omega)^2}, \quad \text{Re}(a) > 0$	$te^{-at}u(t)$	12
$\frac{1}{(a+j\omega)^n}, \quad \text{Re}(a) > 0$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t)$	13
$\begin{cases} \frac{2}{j\omega}, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$	$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$	14
$2kt_0 \text{sinc}(t_0\omega)$	$\begin{cases} k, & t < t_0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$	15
$2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$	t^n	16
$\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$	$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	17
$t_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\omega t_0}{2\pi}\right)$	$\begin{cases} 1 - \frac{ t }{t_0}, & t < t_0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$	18

1.3. התמרת פורייה לזמן בדיד

התמרת פורייה (DTFT – Discrete Time Fourier Transform) של אות בזמן בדיד $x[n]$:

$$X^f(\theta) = DTFT\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n}$$

וההתמרה ההפוכה (IDTFT – Inverse DTFT):

$$x[n] = IDTFT\{X^f(\theta)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^f(\theta) e^{j\theta n} d\theta$$

1.3.1. תכונות התמרת DTFT

התמרת DTFT	אות בזמן בדיד	תכונה	מס
$X^f(\theta)$	$x[n]$		1
$Y^f(\theta)$	$y[n]$		2
$aX^f(\theta) + bY^f(\theta)$	$ax[n] + by[n], a, b \in \mathbb{C}$	לינאריות	3
$X^f(-\theta)$	$x[-n]$		4
$e^{-j\theta n_0} X^f(\theta)$	$x[n - n_0]$		5
$X^f(\theta - \theta_0)$	$e^{j\theta_0 n} x[n]$		6
$\bar{X}^f(-\theta)$	$\bar{x}[n]$		7
$X^f(\theta)Y^f(\theta)$	$x[n] * y[n]$	קונבולוציה בזמן	8
$\frac{1}{2\pi} X^f(\theta) * Y^f(\theta)$	$x[n]y[n]$	קונבולוציה בתדר	9
$(1 - e^{-j\theta}) X^f(\theta)$	$x[n] - x[n-1]$	"גזירה"	10
$\frac{1}{1 - e^{-j\theta}} X^f(\theta) + \pi X^f(\theta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k)$	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	"אינטגרציה"	11
$j \frac{d}{d\theta} X^f(\theta)$	$nx[n]$		12
$\begin{cases} X^f(\theta) = \bar{X}^f(-\theta) \\ \operatorname{Re} X^f(\theta) = \operatorname{Re} X^f(-\theta) \\ \operatorname{Im} X^f(\theta) = -\operatorname{Im} X^f(-\theta) \\ X^f(\theta) = X^f(-\theta) \\ \arg X^f(\theta) = -\arg X^f(-\theta) \end{cases}$	$x[n] = \bar{x}[n]$ (אות ממשי)		13
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \bar{y}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^f(\theta) \bar{Y}^f(\theta) d\theta$		משפט פרסבל	14

התמרת DTFT	אות בזמן בדיד	מס
1	$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	1
$e^{-j\theta n_0}$	$\delta[n - n_0]$	2
$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k)$	1	3
$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_0 - 2\pi k)$	$e^{j\theta_0 n}$	4
$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_0 - 2\pi k) + \delta(\theta + \theta_0 - 2\pi k)$	$\cos(\theta_0 n)$	5
$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_0 - 2\pi k) - \delta(\theta + \theta_0 - 2\pi k)$	$\sin(\theta_0 n)$	6
$\frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\theta - 2\pi k)$	$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	7
$\frac{1}{1 - ae^{-j\theta}}$	$a^n u[n], \quad a < 1$	8
$D(\theta, N) \cdot e^{-j\theta \frac{N-1}{2}}$	$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$	9

1.4 התמרת Z

1.4.1 הגדרה

התמרת Z של אות בזמן בדיד $x[n]$:

$$X^Z(z) = Z\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

וההתמרה ההפוכה :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_C X^Z(z) z^{n-1} dz$$

1.4.2 הקשר להתמרת DTFT

אם מעגל היחידה $|z| = |e^{j\theta}| = 1$ שייך לתחום ההתכנסות, אז ניתן לקבל את ה DTFT המתאים :

$$X^f(\theta) = X^Z(z) \Big|_{z=e^{j\theta}} = X^Z(e^{j\theta})$$

1.4.3 תכונות התמרת Z

מס	תכונה	אות בזמן בדיד	התמרת Z	תחום התכנסות
1		$x[n]$	$X^z(z)$	ROC_X
2		$y[n]$	$Y^z(z)$	ROC_Y
3	ליניאריות	$ax[n] + bx[n], a, b \in \mathbb{C}$	$aX^z(z) + bY^z(z)$	לפחות $ROC_X \cap ROC_Y$
4	הזזה בזמן	$x[n - n_0]$	$X^z(z)z^{-n_0}$ (בהתמרה דו-צדדית)	ROC_X בתוספת אולי של $z = 0$
5	הזזה בתדר	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X^z(e^{-j\omega_0} z)$	ROC_X
6		$a^n x[n]$	$X^z(a^{-1} z)$	רדיוסי ההתכנסות מוכפלים ב $ a $
7		$x[-n]$	$X^z(z^{-1})$	רדיוס ההתכנסות הוא ההופכי של הרדיוס המקורי
8		$\begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & else \end{cases}$	$X^z(z^k)$	רדיוס ההתכנסות הוא רדיוס המקורי בחזקת $\frac{1}{k}$
9	קונבולוציה בזמן	$x[n] * y[n]$	$X^z(z)Y^z(z)$	לפחות $ROC_X \cap ROC_Y$
10	אינטגרציה בזמן	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X^z(z)$	לפחות $ROC_X \cap \{z: z > 1\}$
11		$\bar{x}[n]$	$\bar{X}^z(-z)$	
12	גזירה בתדר	$nx[n]$	$-z \frac{d}{dz} X^z(z)$	ROC_X
13	קונבולוציה בתדר	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \int X^z(\mu)Y^z\left(\frac{z}{\mu}\right)\mu^{-1}d\mu$	
14	גזירה בזמן	$x[n] - x[n-1]$		
15	ממשיות בזמן	$x[n]$ ממשי	$\bar{X}^z(z) = X(\bar{z})$	

תחום התכנסות	התמרת Z	אות בזמן בדיד	מס
$z \in \mathbb{C}$	1	$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	1
$z \in \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\}, & m > 0 \\ \mathbb{C}, & m = 0 \\ \mathbb{C} \setminus \{\infty\}, & m < 0 \end{cases}$	z^{-m}	$\delta[n-m] = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$	2
$ z > 1$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	3
$ z < 1$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$-u[-n-1]$	4
$ z > a , \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$a^n u[n]$	5
$ z < a , \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$-a^n u[-n-1]$	6
$ z > a , \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$na^n u[n]$	7
$ z < a , \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$-na^n u[-n-1]$	8
$ z > 1$	$\frac{z^2 - z \cos \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	$\cos[\Omega_0 n] u[n]$	9
$ z > 1$	$\frac{z \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	$\sin[\Omega_0 n] u[n]$	10
$ z > r$	$\frac{z^2 - rz \cos \Omega_0}{z^2 - 2rz \cos \Omega_0 + r^2}$	$r^n \cos[\Omega_0 n] u[n]$	11
$ z > r$	$\frac{rz \sin \Omega_0}{z^2 - 2rz \cos \Omega_0 + r^2}$	$r^n \sin[\Omega_0 n] u[n]$	12
	$\frac{z}{z^2 + 1}$	$\sin\left[\frac{n\pi}{2}\right] u[n]$	13
	$\frac{z^2}{z^2 + 1}$	$\cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] u[n]$	14
	$z^{-b} \frac{z}{z-a} = \frac{z^{1-b}}{z-a}$	$a^{n-b} u[n-b]$	15
$ z > a , \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{z-a}$	$a^{n-1} u[n-1]$	16
$ z < a , \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{z-a}$	$-a^{n-1} u[-n]$	17

1.5. התמרת פורייה דיסקרטית

1.5.1. הגדרה

התמרת פורייה דיסקרטית (DFT – Discrete Fourier Transform) של אות סיבתי וסופי בזמן בדיד $x[n]$ באורך N :

$$X^d[k] = DFT_N \{x[n]\} \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

וההתמרה ההפוכה (IDFT – Inverse DFT):

$$x[n] = IDFT_N \{X^d[k]\} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^d[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

כאשר כיוף לכתוב לעיתים $W_N \triangleq e^{j\frac{2\pi}{N}}$ (Twiddle בלעז) בשביל לקצר, ואז מקבלים

$$X^d[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^d[k] W_N^{kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

למרות שההתמרה מוגדרת על אותות באורך N , ניתן להרחיבה גם לאותות מחזוריים במחזור N , וכך נקבל גם התמרה מחזורית במחזור N .

תכונות ה Twiddles:

$W_N^N = W_N^{Nk} = W_N^0 = 1, \quad k \in \mathcal{Z}$
$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} 0, & k \bmod N \neq 0 \\ N, & k \bmod N = 0 \end{cases} = N\delta[k \bmod N]$

1.5.2. הקשר למקדמי טור פורייה

עבור אות $x(t)$ מחזורי במחזור T_0 בעל $2M+1$ מקדמי טור פורייה $X^s[k]$ (כלומר יש "חסימות סרט" במישור

מקדמי פורייה: $X^s[m] = 0, (\forall |m| > M)$, אזי עבור $N > 2M+1$ דגימות במרווח $T_s = \frac{T_0}{N}$ מתקבל כי:

$$DFT_N \{x[n]\} = X_N^d[k] = N \sum_{m=-\infty}^{\infty} X^s[k + Nm] = \begin{cases} NX^s[k], & 0 \leq k \leq M \\ 0, & M < k < N-M \\ NX^s[k-N], & N-M \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

ניתן לשחזר את האות המחזורי ע"י:

$$x(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] D(\theta_n(t), 2M+1)$$

כאשר

$$\theta_n(t) = 2\pi \left(\frac{n}{N} - \frac{t}{T_0} \right)$$

1.5.3. ריפוד באפסים

ע"י ריפוד אות $x[n]$ באורך N באפסים, כלומר יצירת

$$x_{padded}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

ניתן להגדיל את רזולוציית התדר, שהייתה $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}$, ונהיתה קטנה יותר: $\Delta\theta = \frac{2\pi}{M}$.

1.5.4 תכונות התמרת DFT

התמרת DFT	אות בזמן בדיד	תכונה	מס
$X^d[k]$	$x[n]$		1
$Y^d[k]$	$y[n]$		2
$aX^d[k] + bY^d[k]$	$ax[n] + by[n], a, b \in \mathbb{C}$	ליניאריות	3
$\bar{X}^d[k] = X^d[-k] = X^d[(N-k) \bmod N]$	$x[n] = \bar{x}[n]$ (אות ממשני)	סימטריות	4
$X^d[k] = X^d[k + N]$		מחזוריות	5
$W_N^{km} X^d[k]$	$x[(n-m) \bmod N]$	הזזה בזמן	6
$X^d[(k-m) \bmod N]$	$W_N^{-mn} x[n]$	הזזה בתדר	7
$X^d[k] Y^d[k]$	$(x \otimes y)[n]$	מכפלה בתדר	8
$\frac{1}{N} (X^d \otimes Y^d)[k]$	$x[n] y[n]$	מכפלה בזמן	9
	$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \bar{y}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X^d[k] \bar{Y}^d[k]$	משפט פרסבל	10

1.5.5 התמרות DFT ידועות

התמרת DFT	אות בזמן בדיד	מס
1	$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	1
$(-1)^k$	$\delta\left[\left(n - \frac{N}{2}\right) \bmod N\right]$	2
$\begin{cases} \frac{N}{2} e^{j\varphi_0}, & k = \frac{N\theta_0}{2\pi} \\ \frac{N}{2} e^{-j\varphi_0}, & k = N - \frac{N\theta_0}{2\pi} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$	$\cos(\theta_0 n + \varphi_0)$ $0 \leq \theta_0 \leq \pi$	3

1.6 קונבולוציה מחזורית (ציקלית)

1.6.1 הגדרה

יהיו $x[n]$ ו $y[n]$ אותות סיבתיים בעלי אורך N , אזי הקונבולוציה המחזורית עבורן היא:

$$c[n] = (x \otimes y)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[(n-m) \bmod N]$$

לכל $0 \leq n \leq N-1$.

באופן דומה, ניתן להגדיר את הקונבולוציה על ההרחבה המחזורית של האותות הנ"ל. ניקח את ההרחבות המחזוריות של שני האותות:

$$x_l[n] = x[n \bmod N]$$

$$y_l[n] = y[n \bmod N]$$

כאשר אנחנו מתייחסים לאותות כבעלי תמך סופי N בזמן (האותות המקוריים מוגדרים לכל n אבל מתאפסים מחוץ לתמך $[0, N-1]$), אפשר לכתוב את ההרחבה המחזורית גם כך:

$$x_l[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN]$$

ואז ההגדרה תהיה

$$c[n] = (x \otimes y)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_l[m] y_l[n - m]$$

לכל $0 \leq n \leq N-1$.

אם אורכי הסדרות שונים, ניתן לרפד את הסדרה הקצרה באפסים, ולבצע את הקונבולוציה המחזורית.

1.6.2 הקשר לקונבולוציה הלינארית

יהיו $x[n]$ ו $y[n]$ אותות סיבתיים בעלי תמך סופי N כל אחד, אזי הקונבולוציה המחזורית שווה לקונבולוציה הלינארית של ההרחבות המחזוריות של אותות אלו. כלומר, אם

$$z[n] = \{x * y\}[n]$$

$$c[n] = \{x \otimes y\}[n]$$

אז

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z[n + kN]$$

כאשר $x[n]$ ו $y[n]$ אותות סיבתיים בעלי תמך סופי N_x ו N_y בהתאמה, אזי ניתן לחשב את הקונבולוציה הלינארית שלהם ע"י חישוב הקונבולוציה המחזורית של האותות המקוריים מרופדים באפסים עד לאורך $N = N_x + N_y - 1$.

1.6.3 תכונות הקונבולוציה המחזורית

מס	תכונה	רישום מתמטי
1	קומוטטיביות	$x \otimes y = y \otimes x$
2	אסוציאטיביות	$x \otimes y \otimes z = (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$
3	מכפלה בתדר	$(x \otimes y)[n] \xrightarrow{DFT} X^d[k] Y^d[k]$
4	מכפלה בזמן	$x[n] y[n] \xrightarrow{DFT} \frac{1}{N} (X^d \otimes Y^d)[k]$

1.6.4 אלגוריתם Radix2-FFT מספר הכפלים המרוכבים למימוש האלגוריתם הוא

$$\frac{N}{2} \log_2 N$$

עבור חישוב DFT לסדרה באורך N .

האלגוריתם דורש כי אורך הסדרה יהיה חזקה של 2, כלומר $N = 2^r$ עבור r כלשהו.

ניתן לחשב קונבולוציה לינארית ע"י ביצוע קונבולוציה מחזורית לשני אותו באורך N_x ו N_y :

1. יש להרחיב את שני האותות לאורך $M = N_x + N_y - 1$ ע"י ריפודם באפסים;
2. כעת, נרפד באפסים כדי ששתי הסדרות יהיו באורך שהוא חזקה של 2;
3. נבצע DFT לשני האותות, בעזרת Radix2-FFT, ונכפילים;
4. כעת נותר לבצע התמרה הפוכה, גם בעזרת Radix-FFT, לתוצאה שקיבלנו. התוצאה היא הקונבולוציה המחזורית בין שני האותות, ובגלל ההרחבה הראשונה שעשינו, היא גם הקונבולוציה הלינארית.

אם כבר במספר הכפלים עסקינן, יהיה נחמד לציין את העובדות הבאות:

1. כדי לבצע DTF, נביט בהגדרה ונראה כי יש לבצע N^2 כפלים מרוכבים. אם בוחנים יותר לעומק, יש לנו בעצם 4 פעולות כפל בין שני מספרים ממשיים, מכיוון שה Twiddles הם מספר מרוכב $a + jb$, וסדרה אותה מתמירים יכולה להיות מרוכבת במקרה הכללית, ואז נבצע הכפלה במספר $c + jd$, כך שלכל אחד מ N^2 הכפלים המרוכבים יש לבצע 4 מכפלות ממשיות: $(a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbc + bd$. במקרה שאנחנו מתמירים סדרה ממשית, נבצע רק שני מכפלות ממשיות, כי אז $d = 0$.
2. אם יש לנו שתי התמרות של שני אותות, בד"כ נרצה להכפיל אותן (הכפלה של איבר-איבר), ולכך נדרשים N הכפלות מרוכבות.
3. את ההכפלה נרצה להעביר בחזרה למישור הזמן, כלומר לבצע IDFT, ולכך נדרשים N^2 כפלים מרוכבים.

2. דגימה

2.1.1 דגימה נקודתית

יהי $x(t)$ אות בזמן רציף. הדגימה הנקודתית שלו, במרווח T_s , היא הסדרה $x[n]$, כאשר

$$x[n] = x(nT_s)$$

2.1.2 דגימת הלמים

יהי $x(t)$ אות בזמן רציף. דגימת ההלמים שלו, במרווח T_s , הוא האות הרציף $x_p(t)$ כך ש:

$$x_p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

את התמרת פורייה של האות הדגום ניתן לקבל מתוך תכונת המכפלה בזמן של התמרת פורייה ($\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$):

$$X_p^F(\omega) = \frac{1}{2\pi} X^F(\omega) * \left(\frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T_s}\right) \right) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F\left(\omega - \frac{2\pi k}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(\omega - \omega_s k)$$

2.1.3 הקשר בין שני סוגי הדגימות

כאשר דוגמים אות $x(t)$ במרווח T_s , אז התמרת DTFT של הדגימה הנקודתית שווה לכיווץ בתדר, בפקטור T_s , של התמרת CTFT של דגימת ההלמים של האות.

יהי $x(t)$ אות בזמן רציף (אשר התמרת CTFT שלו היא $X^F(\omega)$) הנדגם במרווחי זמן T_s ליצירת הסדרה $x[n]$, אזי

$$X^f(\theta) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F\left(\omega = \frac{\theta - 2\pi k}{T_s}\right)$$

כאשר אפשר להבין את הסכימה האינסופית כשכפולים – הגורמים לקיפולים כאשר אנו דוגמים בתדר שלא עומד בתנאי נייקוויסט. אם אנחנו אכן עומדים בתנאי, ואנו מסתכלים רק בתחום $\theta \in [-\pi, \pi]$, הרי ש

$$X^f(\theta) = \frac{1}{T_s} X^F\left(\frac{\theta}{T_s}\right)$$

2.1.4 תנאי נייקוויסט

אנו רואים כי התמרת האות הדגום בדגימת הלמים היא שכפול של התמרת האות הנדגם, כאשר השכפולים מתבצעים

$$\text{בהזזות של } \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$X_p^F(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(\omega - \omega_s k)$$

התדרים אשר יקיימו את התנאי:

$$\omega < \frac{1}{2} \omega_s$$

לא ייפגעו, כלומר לא יתווסף להם מידע מאף אחד מאינסוף השכפולים. לכן, כדי לבצע דגימה תקינה של אות אשר חסום סרט בתדר ω_M , יש לקיים את התנאי הבא על תדר הדגימה:

$$\boxed{\omega_s > 2\omega_M}$$

יש לשים לב שכשרוצים לדגום בדיוק בתדר נייקוויסט, $\omega_s = 2\omega_M$, לוודא כי אין פונקציות דלתא בקצוות הסרט של התמרת האות הנדגם – זה קורה בד"כ כשרוצים לדגום אות הרמוני, כלומר אות שהוא סכום של קוסינוסים (כשה קורה כמובן גם כשדוגמים אות מחזורי שמיוצג ע"י טור פורייה – ואז ייצורו בתחום התדר ω הוא סכום של פונקציות דלתא)

2.1.5. משפט הדגימה (משפט Shannon)

יהי $x(t)$ אות בזמן רציף וחסום סרט ($X^F(\omega) = 0, \forall |\omega| > \omega_M$), ונתונות דגימותיו במרווחי זמן T_s . כל עוד עומדים בתנאי נייקוויסט, כלומר $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\omega_M$, ניתן לשחזר את האות בכל רגע t מתוך דגימותיו כך:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right)$$

כאן המשחזר הוא

$$h_r(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \xleftrightarrow{CTFT} H_r^F(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_M \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

נוסחה כללית לאינטרפולציה היא

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h_r(t-nT_s)$$

כאשר $h_r(t)$ הינה פונקצית גרעין האינטרפולציה.

דוגמאות למשחזרים לא אידאליים:

1. משחזר Zero Order Hold:

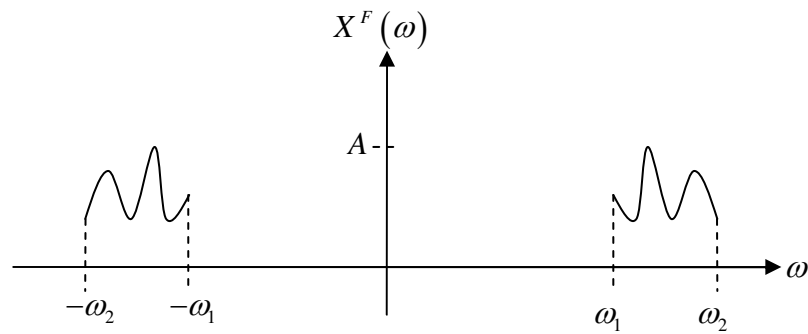
$$h_r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{else} \end{cases} \xleftrightarrow{CTFT} H_r^F(\omega) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

2. משחזר לינארי:

$$h_r(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & \text{else} \end{cases} \xleftrightarrow{CTFT} H_r^F(\omega) = T \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

2.1.6. דגימה בפס מעבר

כאשר התמרת האות הנדגם חסומה באישהו פס תדרים, ניתן להתשמש בשכפולים לטובתנו, ובכך לדגום את האות בתדר נמוך יותר מאשר מציב תנאי נייקוויסט, ובכל זאת לאפשר שחזור מושלם של האות הנדגם.



אנחנו יכולים להתשמש לטובתנו בשכפולים כאשר רוחב הסרט, $\omega_2 - \omega_1$, נכנס לפחות פעם אחת במרווח $[0, \omega_1]$, כי אז השכפולים ייכנסו למרווח זה.

ראשית, נחשב את מספר הפעמים L שרוחב הסרט נכנס במרווח $[0, \omega_2]$:

$$L = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$$

אם קיבלנו מספר שלם, אז נבחר את תדר הדגימה:

$$\omega_s = \frac{2\omega_2}{L}$$

כאשר L אינו שלם, נבצע הרחבה של רוחב הסרט, כך שרוחב הסרט המורחב ייכנס מספר פעמים שלם. אפשר להרחיב ע"י הזזה של ω_1 שמאלה (הרחבה לשמאל) או ע"י הזזה של ω_2 ימינה (הרחבה לימין).

הרחבה לשמאל:

נחפש ω_L כך ש

$$L = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \hat{\omega}_1} = \left\lfloor \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \right\rfloor$$

כאשר $\hat{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_L$, ואז כמקודם, נקבל את אותו תדר הדגימה המופחת:

$$\omega_s = \frac{2\omega_2}{L}$$

הרחבה לימין:

נחפש ω_R כך ש

$$L = \frac{\hat{\omega}_2}{\hat{\omega}_2 - \omega_1} = \left\lceil \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \right\rceil$$

כאשר $\hat{\omega}_2 = \omega_2 + \omega_R$, ואז כמקודם, נקבל את תדר הדגימה המופחת:

$$\omega_s = \frac{2\hat{\omega}_2}{L}$$

3. אנליזה ספקטרלית

3.1.1. מבוא

ברצוננו להסתכל על אות ולהבין מה הם רכיבי התדר המרכיבים אותו. מכיוון שמרכיבי התדר של אות כללי משתנים כל הזמן, נביט בחלון זמן קצר וננתח את תמונת התדר של האות בחלון זמן קצר זה (N דגימות). פעולה זו שקולה להכפלה של האות המקורי בחלון באורך N .

3.1.2. אופן הביצוע

נניח שאנו בוחנים אות המורכב משני רכיבי תדרים, כלומר אנו בוחנים אות מהצורה

$$x(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t)$$

הנדגם במרווח T_s , אזי:

1. נבדוק מה היחס בין אמפליטודת האותות, ונדרוש שהחלון יהיה כזה שמנחית לפחות כמו $20 \log\left(\frac{A}{B}\right)$ [db].

כך נבחר את החלון הקבוע לעבוד איתו (למרות שניתן לעבוד גם עם חלון פרמטרי – של Kaiser, אבל זה כבר סיפור אחר).

2. נבדוק מה המרחק התדרי בין שני מרכיבי התדר, $\Delta\theta = |\theta_1 - \theta_2| = |\omega_1 T_s - \omega_2 T_s|$, ונדרוש שרוחב האונה

הראשית של התמרת החלון לא יעלה על מרחק זה. לדוגמה, עבור חלון Hann נדרוש $\Delta\theta > \frac{8\pi}{N+1}$. כך נבחר

את סדר החלון.

במקרים מסוימים, ניתן לנסות ולהתחכם ע"י בחירה של חלון מלבני פשוט, אשר התמרתו בתדר היא גרעין דיריכלה, ולגרום לדגימות שלנו ($\theta_k = \frac{2\pi}{N} k$) ליפול בדיוק בנקודות שבהם גרעין הדיריכלה מתאפס/מקבל את המקסימום שלו.

3.1.3. חלונות אפשריים

כאשר N הוא סדר המסגן ו $L \triangleq N+1$ הוא אורך החלון, אלו החלונות שניתן להתשמש בהם לצורך אנליזה ספקטרלית:

רמת אונות הצד	רוחב האונה הראשית	סוג החלון
-13.5 [dB]	$\frac{4\pi}{L}$	חלון מלבני
-27 [dB]	$\frac{8\pi}{L}$	חלון משולש (Bartlett)
-32 [dB]	$\frac{8\pi}{L}$	חלון Hann
-43 [dB]	$\frac{8\pi}{L}$	חלון Hamming
-57 [dB]	$\frac{12\pi}{L}$	חלון Blackman

4. מסננים ספרתיים

אנו מתעסקים עם מסננים (מערכות LTI) שהינם בעלי מקדמים ממשיים, סיבתיים, יציבים (יציבות BIBO כפי שנלמד בקורס אותות ומערכות) ובעלי פונקציה תמסורת רציונלית. בלעז, מסנני RCSR – Real, Casual, Stable & Rational.

4.1.1 מסנן IIR

זהו מסנן בעל תגובה להלם אינסופית – Infinite Impulse Response.

מסנן IIR אנלוגי יתואר באופן כללי ע"י התמרת לפלס של תגובתו להלם:

$$H^L(s) = \frac{b_0 s^q + b_1 s^{q-1} + \dots + b_q}{s^p + a_1 s^{p-1} + \dots + a_p}$$

כאשר $p \geq q$, עבור $\text{Re}\{s\} > -\alpha$ כאשר α חיובי כלשהו.

מסנן IIR ספרתי יתואר באופן כללי ע"י התמרת Z של תגובתו להלם:

$$H^Z(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}}$$

עבור $|z| > R$ כאשר R חיובי כלשהו, וכאשר $p > 0, a_p \neq 0$.

4.1.2 מסנן FIR

זהו מסנן בעל תגובה להלם סופית – Finite Impulse Response.

מסנן FIR ספרתי יתואר באופן כללי ע"י התמרת Z של תגובתו להלם:

$$H^Z(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}$$

ניתן לראות שמשך התגובה להלם הוא סופי:

$$h[n] = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq q \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

4.1.3 הגדרת פאזה רציפה

אפשר להוכיח כי ניתן לבטא את תגובת התדר של מערכת RCSR, בעלת פונקציה תמסורת $H^Z(z)$, כך:

$$H^f(\theta) = A(\theta) e^{j\varphi(\theta)}$$

כאשר $A(\theta)$ היא פונקציה האמפליטודה הממשית, אך לא בהכרח חיובית (בניגוד ל $|H^f(\theta)|$ שאליו התרגלנו) ו $\varphi(\theta)$ פונקציה הפאזה, והיא רציפה.

4.1.4. מסנן GLP

מסנן GLP – Generalized Linear Phase הוא מסנן בעל פאזה לינארית, מהצורה:

$$H^f(\theta) = A(\theta)e^{j(\varphi_0 - \theta\tau_g)}$$

כאשר τ_g נקרא השהיית חבורה והוא גודל קבוע במסנני GLP.

מסנני GLP ניתנים לרישום גם כך:

$$H^f(\theta) = F(\theta)G(\theta)e^{j(\varphi_0 - \frac{N}{2}\theta)} = F(\theta)\left(\sum_{k=0}^K g[k]\cos(\theta k)\right)e^{j(\varphi_0 - \frac{N}{2}\theta)}$$

כאשר N סדר המסנן. מסנן זה יכול להיות אחד מארבע סוגים, ולו תכונות מיוחדות:

סוג מסנן	1	2	3	4
סדר	זוגי	אי-זוגי	זוגי	אי-זוגי
פאזה	$\varphi_0 = 0$	$\varphi_0 = 0$	$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$	$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$
סימטריה של $h[n]$ ושל $A(\theta)$	סימטרי	סימטרי	אנטי-סימטרי	אנטי-סימטרי
מחזוריות של $A(\theta)$	2π	4π	2π	4π
$F(\theta)$	1	$\cos\frac{\theta}{2}$	$\sin\theta$	$\sin\frac{\theta}{2}$
K	$\frac{N}{2}$	$\frac{N-1}{2}$	$\frac{N-2}{2}$	$\frac{N-1}{2}$
$H^f(0)$	כלשהו	כלשהו	תמיד 0	תמיד 0
$H^f(\pi)$	כלשהו	תמיד 0	תמיד 0	כלשהו
שימושים	מסנני LP, HP, BP, BS ומסנני Multiband	מסנני LP, BP	גוזרים, מסנני הילברט	

4.1.5. מסנן בעל פאזה מינמלית

למסנן כזה, כל אפסים הם בתוך מעגל היחידה (אין אף אפס על מעגל היחידה וגם אין אף אפס מחוץ למעגל היחידה). בהקשר זה, ניתן להראות כי החלפת אפס ב α (מהצורה $(z - \alpha)$) בפונקציה התמסורת של המסנן באפס מהצורה $|\alpha|(z - \bar{\alpha}^{-1})$ לא משנה את תגובת האמפליטודה של המסנן, עד כדי קבוע.

4.1.6. מסנן מסוג All-Pass

זהו מסנן בעל הגבר קבוע לכל θ . במסנן זה מספר האפסים שווה למספר הקטבים, ולכל אפס ב α יש קוטב ב $\bar{\alpha}^{-1}$.

4.1.7. תכונות ומשפטים

1. מסנן FIR ממשי הוא בעל פאזה לינארית אם ורק אם מקדמיו הינם סימטריים, או אנטי-סימטריים, סביב מרכזו.
2. מסנן FIR ממשי הוא בעל פאזה לינארית אם ורק אם לכל אפס שלו ב α , גם $\bar{\alpha}$, α^{-1} , $\bar{\alpha}^{-1}$ אם אפסים שלו.
3. למסנן FIR מסדר N יש $N + 1$ איברים שונים מאפס בתגובתו לדגם יחידה.
4. מסנן פאזה לינארית \leftarrow מסנן FIR

4.2 תכנון מסנן FIR

4.2.1 תכנון בשיטת IRT

1. נגדיר את תגובת ההלם האידיאלית של המסנן, ע"פ

$$H_d^f(\theta) = A_d^f(\theta) e^{j\left(\mu\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}N\theta\right)}$$

כאשר עבור מסנן סימטרי $\mu = 0$, ועבור מסנן אנטי-סימטרי $\mu = 1$.

האמפליטודה $A_d^f(\theta)$ היא לא יותר מאשר 1 בתחומי ההעברה ו 0 בתחומי החסימה.

יש לשים לב שהתחומים הללו מגיעים עד תדרי הקטעון, שבקורס זה מספיק שיהיו באמצע תחומי המעבר.

כלומר, עבור תדרי מעבר θ_p, θ_s , נקבע את תדר הקיטעון ל $\theta_c = \frac{|\theta_p + \theta_s|}{2}$.

2. נחשב את התגובה להלם האידיאלית בעזרת ההתמרה ההפוכה:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d^f(\theta) e^{j\theta n} d\theta$$

3. נמצא את סוג החלון המתאים איתו יבוצע הקיצוץ, בעזרת הדרישה על הניחות בתחומי החסימה והגליות בתחומי המעבר (ניקח כמובן את הדרישה המחמירה ביותר בכל תחום, אם יש כמה תחומים).

4. נמצא את סדר המסנן N , בעזרת הדרישה לרוחב תחום המעבר (שוב – ניקח כמובן את הדרישה המחמירה ביותר לכל רוחב תחום, אם יש כמה תחומים).

5. נבצע את הקיצוץ – IRT – Impulse Response Truncation – בעזרת החלון שבחרנו $w[n]$ לקבלת תגובה סופית להלם (רשימת חלונות אפשריים בהמשך):

$$h[n] = \begin{cases} w[n]h_d[n], & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

כאשר $L \triangleq N + 1$ הוא אורך החלון, אלו החלונות שניתן להתשמש בהם תכנון מסנן בשיטת IRT, נשתמש באחד מהחלונות הבאים:

ניחות בתחום החסימה A_s	גליות בתחום המעבר A_p	גליות δ_p, δ_s	ניחות אונות צד	רוחב האונה הראשית	סוג החלון
21[dB]	0.75[dB]	0.09	-13.5[dB]	$\frac{4\pi}{L}$	חלון מלבני
26[dB]	0.45[dB]	0.05	-27[dB]	$\frac{8\pi}{L}$	חלון משולש (Bartlett)
44[dB]	0.055[dB]	0.0063	-32[dB]	$\frac{8\pi}{L}$	חלון Hann
53[dB]	0.019[dB]	0.0022	-43[dB]	$\frac{8\pi}{L}$	חלון Hamming
74[dB]	0.0017[dB]	0.0002	-57[dB]	$\frac{12\pi}{L}$	חלון Blackman
$A = -20 \log_{10} \min(\delta_p, \delta_s)$			$N = \frac{A - 7.95}{2.285 \theta_p - \theta_s }$		חלון Kaiser
$\alpha = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$					

4.2.2 תכנון בשיטת Remez Exchange

שיטה זו, שפותחה ע"י בחור בשם יבגני רמז בשנת 1934, היא שיטה מתמטית לאופטימיזציה, ובסופו של דבר היא מניבה לנו מסנן Equiripple – כלומר מסנן אשר הגליות שלו קבועה לאורך תחומי תדרים מסויימים (תחומי המעבר ותחומי החסימה של המסננים אותם נתכנן).

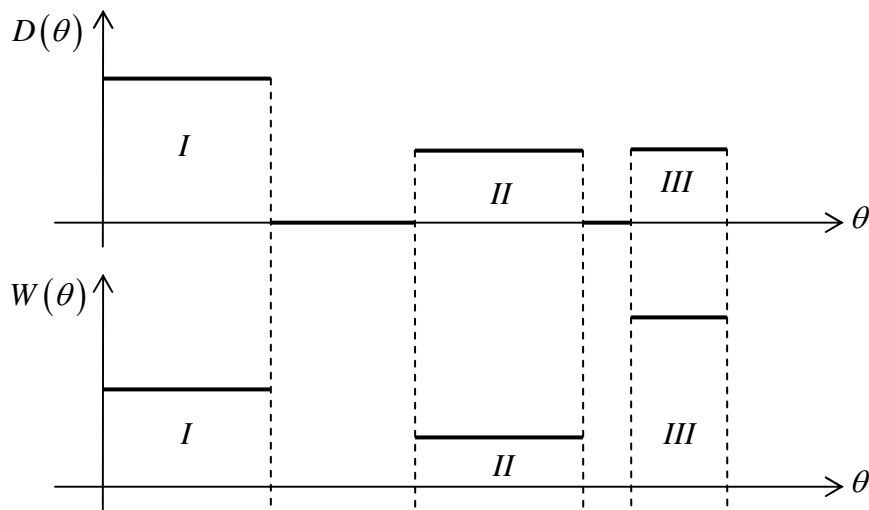
מסנני FIR GLP ניתנים לייצוג בצורה הבאה

$$H(\theta) = A(\theta)e^{j\left(\varphi_0 - \frac{N}{2}\theta\right)} = F(\theta)G(\theta)e^{j\left(\varphi_0 - \frac{N}{2}\theta\right)}$$

כאשר

$$F(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{FIR-GLP-Type-1} \\ \cos \frac{\theta}{2}, & \text{FIR-GLP-Type-2} \\ \sin \theta, & \text{FIR-GLP-Type-3} \\ \sin \frac{\theta}{2}, & \text{FIR-GLP-Type-4} \end{cases}, \quad G(\theta) = \sum_{k=0}^K g_k \cos(k\theta)$$

בניגוד לתכנון שביצענו עד כה, שהתבסס על טורי פורייה (שמקטינים את אינטגרל השגיאה הריבועית בין הפונקציה לבין הייצוג שלה בעזרת הרמוניות), כעת נתכנן את המסנן שלנו ע"י הקטנה (מינימיזציה) של המרחק הגדול ביותר (המקסימלי) בין הפונקציה לייצוג שלה. מכאן השם Minimax. בשיטה זו, אנו מגדירים את תגובת התדר האידיאלית, וגם פונקציית משקל $W(\theta)$, כל שנוכל לתת משקל גדול יותר לאיזורים מסויימים ב $D(\theta)$ כדי ששם הגליות תהיה שונה ביחס לגליות באזורים האחרים ב $D(\theta)$. לדוגמא:



כאן, לאיזור I נתנו משקל כפול מלאזור II, ולכן הגליות בו תהיה קטנה פי 2. הבעיה שתארנו לעיל (מינימיזציה של המרחק המקסימלי בין $D(\theta)$ למסנן, כלומר בעיית Minimax) נקראת בעיית קירוב צ'בישב, והפתרון הוא האלגוריתם שפותח ע"י רמז (ומומש ע"י Parks ו McLellan לראשונה ב Fortran).

מתקבל כי למסנן שלנו יש $K + 2$ נקודות מינימום ומקסימום מקומיים, בסדר מתחלף (מינימום, מקסימום, מינימום, מקסימום וכו'), בעלי ערך $\pm \delta$, ולכן מתקבל מסנן Equiripple – גליות שווה.

פתרון הבעיה כולל ניחוש נקודות האקסטרימום, פתירת מערכת משוואות לינארית ב $K + 2$ נעלמים, ואיטרציות עד אשר מתקבלים $K + 2$ נקודות מינימום ומקסימום מקומיים, בסדר מתחלף.

בניגוד למסננים שתכננו בשיטת IRT, כאן נוכל לשפר את הגליות כאשר ניקח סדר מסנן גדול יותר (N).

4.3 תכנון מסנן IIR

להלן שלבי תכנון מסנן IIR ספרתיים:

1. הכנת הדרישות לתדרי המעבר הספרתיים. שלב זה תלוי בבעיה הניצבת מולנו: אפשרי שידועות הדרישות הספרתיות על התדרים; אפשרי שידועות הדרישות על התדרים האנלוגיים. ניעזר בקשרים הידועים:

$$\theta = \omega T_{\text{sample}} = \frac{\omega}{f_{\text{sample}}} = \frac{2\pi f}{f_{\text{sample}}}$$

2. אנחנו רוצים לקבל בסופו של דבר מסנן ספרתי, אזי יש לבצע עיוות מקדים והפוך של התדרים האנלוגיים, משום שאלו ייתעוותו כאשר נבצע את ההתמרה הבי-לינארית כשנרצה להמיר את המסנן האנלוגי שתכננו למסנן ספרתי. העיוות המקדים יתבצע לפי:

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

3. תכנון מסנן IIR אנלוגי (ראה פירוט בסעיף 4.3.1).
4. ביצוע התמרה בי-לינארית (הממפה את הישר $j\omega$ במישור לפלס למעגל $e^{j\theta}$ במישור Z) לקבלת המסנן הסיפרתי:

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

5. סיימו!

4.3.1 תכנון מסנן IIR האנלוגי

אנחנו נתכנן מסנן LP מסוג Butterworth (ראה פירוט בסעיף 4.3.2), ולאחר מכן, בעזרת התמרת תדר מתאימה, נמיר את המסנן הזה למסנן מסוג אחר (LP, HP, BP, BS), אם יש צורך.

המרת מסנן ה LP מסוג Butterworth האנלוגי למסנן אנלוגי אחר, ע"פ הדרישה, בעזרת התמרות תדר. בטבלה שלהלן סוגי ההמרות, כאשר מסנן ה LP המקורי מיוצג עם פרמטרים ללא גל, ומסנן היעד מיוצג עם פרמטרים עם גל מעליהם.

ולהשתמש בהתמרה	יש לתכנן מסנן LP עם הפרמטרים האלו	כדי להמיר מסנן LP למסנן מסוג
$s = \frac{\tilde{s}}{\omega_c}, \omega = \frac{\tilde{\omega}}{\omega_c}$ $\omega_c = \tilde{\omega}_0$	$\delta_s = \tilde{\delta}_s, \delta_p = \tilde{\delta}_p$	$\omega_0 = 1$ LP
$s = \frac{\omega_c}{\tilde{s}}, \omega = \frac{\omega_c}{\tilde{\omega}}$ $\omega_c = \tilde{\omega}_0$		$\omega_p = \frac{\omega_c}{\tilde{\omega}_p}, \omega_s = \frac{\omega_c}{\tilde{\omega}_s}$ HP
$s = \frac{\tilde{s}^2 + \tilde{\omega}_{p,1}\tilde{\omega}_{p,2}}{\tilde{s}(\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}_{p,1})}$ $\omega = \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}_{p,1}\tilde{\omega}_{p,2}}{\tilde{\omega}(\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}_{p,1})}$	$\delta_s = \min(\tilde{\delta}_{s,1}, \tilde{\delta}_{s,2})$ $\delta_p = \tilde{\delta}_p$	$\omega_p = 1$ $\omega_{s,1} = \frac{\tilde{\omega}_{s,1}^2 - \tilde{\omega}_{p,1}\tilde{\omega}_{p,2}}{\tilde{\omega}_{s,1}(\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}_{p,1})}$ $\omega_{s,2} = \frac{\tilde{\omega}_{s,2}^2 - \tilde{\omega}_{p,1}\tilde{\omega}_{p,2}}{\tilde{\omega}_{s,2}(\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}_{p,1})}$ $\omega_s = \min(\omega_{s,1} , \omega_{s,2})$ BP
$s = \frac{\tilde{s}(\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}_{p,1})}{\tilde{s}^2 + \tilde{\omega}_{p,1}\tilde{\omega}_{p,2}}$ $\omega = \frac{\tilde{\omega}(\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}_{p,1})}{\tilde{\omega}_{p,1}\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}^2}$	$\delta_p = \min(\tilde{\delta}_{p,1}, \tilde{\delta}_{p,2})$ $\delta_s = \tilde{\delta}_s$	$\omega_p = 1$ $\omega_{s,1} = \frac{\tilde{\omega}_{s,1}(\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}_{p,1})}{\tilde{\omega}_{p,1}\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}_{s,1}^2}$ $\omega_{s,2} = \frac{\tilde{\omega}_{s,2}(\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}_{p,1})}{\tilde{\omega}_{p,1}\tilde{\omega}_{p,2} - \tilde{\omega}_{s,2}^2}$ $\omega_s = \min(\omega_{s,1} , \omega_{s,2})$ BS

4.3.2 תכנון מסנן LP מסוג Butterworth

כדי לתכנן מסנן LP מסוג Butterworth, ראשית עלינו להגדיר את מאפייני המסנן:

$$\omega_s, \omega_p, \delta_s, \delta_p$$

ואז שלבי התכנון הם:

1. חישוב האמפליטודה בתחום המעבר, בדציבלים:

$$A_p = -20 \log_{10} (1 - \delta_p) \cong 8.7 \delta_p$$

2. חישוב הניחות בתחום החסימה:

$$A_s = -20 \log_{10} \delta_s$$

3. חישוב פרמטר העזר: גורם ההבחנה:

$$d = \sqrt{\frac{(1 - \delta_p)^{-2} - 1}{\delta_s^{-2} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1}}$$

4. חישוב פרמט העזר: גורם הסלקטיביות:

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_s}$$

5. חישוב סדר המסנן:

$$N \geq \frac{\log d}{\log k}$$

6. חישוב תדר הקיטעון:

$$\omega_p \left((1 - \delta_p)^{-2} - 1 \right)^{\frac{1}{2N}} \leq \omega_0 \leq \omega_s \left(\delta_s^{-2} - 1 \right)^{\frac{1}{2N}}$$

7. פונקצית התמסורת של המסנן:

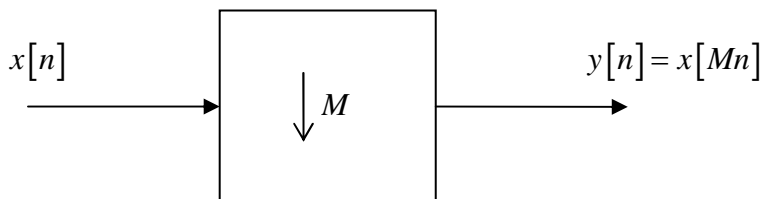
$$H^L(s) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{s_k}{s_k - s}, \quad s_k = \omega_0 e^{j \left(\frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \right)}$$

$$|H^F(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2N}}$$

5. עיבוד רב-קצבים

5.1. הורדת קצב

5.1.1. דיאגרמה



הקשר במישור Z בין המוצא לכניסה:

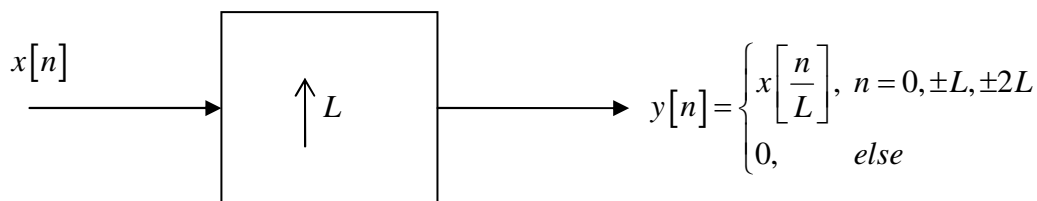
$$Y^Z(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X^Z \left(e^{-j\frac{2\pi k}{M}} z^{\frac{1}{M}} \right)$$

ובמישור DTFT:

$$Y^f(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X^f \left(\frac{\theta + 2\pi k}{M} \right)$$

5.2. העלאת קצב

5.2.1. דיאגרמה



הקשר במישור Z בין המוצא לכניסה:

$$Y^Z(z) = X^Z(z^L)$$

ובמישור DTFT:

$$Y^f(\theta) = X^f(L\theta)$$

6. דברים נוספים

6.1.1 משפט פואסון

יהי אות $x(t)$ מחזורי במחזור T_0 (וכרגיל נסמן $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$). נביט במחזור יחיד שלו, $x_I(t)$:

$$x_I(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

אזי

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(t - nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X^S[k] e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_I^F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

כאן רואים את הקשר בין מקדמי טור פורייה של אות מחזורי לבין התמרת הפורייה של מחזור אחד של האות – מקדמי פורייה הם הדגימות של התמרת פורייה של מחזור אחד של האות המחזורי.

בעצם, המשפט נכון גם לאותות $x(t)$ לא מחזוריים, ואז מסתכלים על ההרחבה המחזורית של $x(t)$, כלומר:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X^S[k] e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

6.1.2 נוסחת פואסון

בהעזרנו במשפט פואסון, עבור רכבת הלמים, $x_I(t) = \delta(t)$, נקבל

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

6.1.3 טכניקות שצריך לדעת

1.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a[m] W_N^{mn} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a[k+1N] W_N^{(k+1N)n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a[k+1N] W_N^{kn}$$

2.

$$\delta[n \bmod M] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W_M^{kn}$$

6.1.4 אות עצמי של מערכת LTI

האות $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ הוא אות עצמי של מערכת LTI, כלומר בהינתן מערכת $H^F(\omega)$, אזי מוצאה הוא

$$y(t) = |H^F(\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + S H^F(\omega_0))}$$

מכאן אפשר להסיק שאם $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, אזי נקבל ביציאה ממערכת LTI:

$$y(t) = |H^F(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + S H^F(\omega_0))$$

6.1.5 שונות

1. אם ממוצע אות $x(t)$ הוא אפס, כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$

$$X^F(\omega=0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$$

7. נספחים

7.1. כללי

עבור f_1, f_2 הגזירות n פעמים בנקודה t מתקיים:

$$\frac{d^n}{dt^n} (f_1(t) f_2(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_1^{(k)}(t) f_2^{(n-k)}(t)$$

7.1.1. זהויות

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega_0 t} = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}, \quad \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

7.1.2. גרעין דיריכלה

הגדרה:

$$D(\theta, N) @ \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

מאפיינים:

1. מקסימום מוחלט ב $\theta = 0$, ושם מתקבל $D(0, N) = N$

2. אפסים ב $\theta = \frac{2\pi}{N} m$ לכל $m \in \mathcal{Z}$

3. רוחב האונה הראשית: $\frac{4\pi}{N}$

4. היחס בין גובה האונה הראשית לגובה אונת הצד הראשונה: $\frac{2}{3\pi} \cong 13.5 [dB]$

7.1.3. מודולו

$x \bmod N$ הוא השארית בחלוקה של x ב N . אם $x = 0$, נקבל תמיד $0 \bmod N = 0$, לכל N . כדי לדעת מה קורה אם $x < 0$, אפשר להתסכל על \bmod כעל מחזיר כמה מספרים צריך להוריד מ x כדי להגיע למספר הראשון שמתחלק ב N . לכן $-1 \bmod 4 = 3$, כי צריך להוריד 3 מ -1 כדי להגיע ל -4 , שמתחלק ב 4 ללא שארית. לכן באופן כללי, נוכל לכתוב שאם $x < 0$, אז $x \bmod N = N - ((-x) \bmod N)$.

7.2. מטריצות

וקטור \underline{y} יקרא וקטור עצמי של מטריצה ריבועית A כאשר

$$A\underline{y} = \lambda\underline{y}$$

ואז λ יקרא הערך העצמי של המטריצה.

חישוב ערכים עצמיים של מטריצה ריבועית:
 נחשב את השורשים של הפולינום האופייני, כלומר את פתרונות המשוואה

$$|sI - A| = 0$$

חישוב וקטורים עצמיים של מטריצה ריבועית בגודל $n \times n$, לאחר מציאת הערכים העצמיים שלה:
 עבור על ערך עצמי, נפתור את המשוואה

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x}$$

כאשר \underline{x} וקטור בגודל $n \times 1$. נקבל n משוואות שיהיו תלויות ליניארית (כי הרי דטרמיננטת המערכת הוא 0, כפי שדרשנו למציאת הערכים העצמיים). הפתרון יהיה משפחה אינסופית של וקטורים עצמיים, ונוכל לבחור אחד.

המטריצה T שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים של A תקרא המטריצה המלכסנת של A , והמטריצה

$$\underline{A} = T^{-1}AT$$

היא אלכסונית.

הפיכת מטריצה בגודל 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$