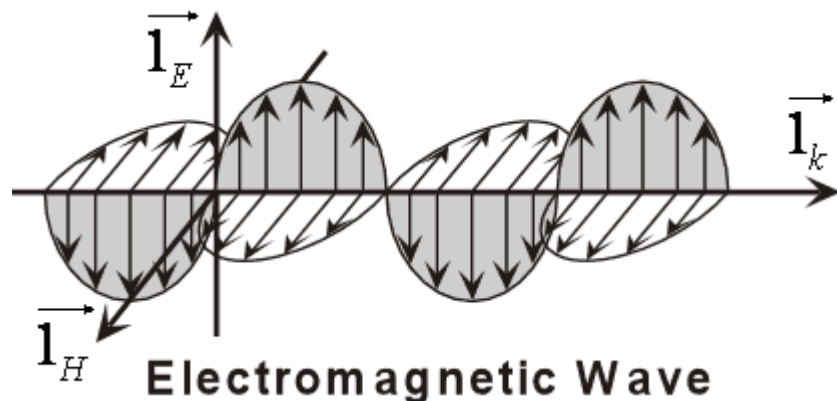


$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{a}$ $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{a} + \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{D} \cdot d\vec{a}$ $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = \iiint \rho dv$ $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ $\oiint \vec{S} \cdot d\vec{a} + \frac{\partial}{\partial t} (\iiint w_e dv + \iiint w_m dv) = -\iiint \vec{J} \cdot \vec{E} dv$ $\oiint \vec{J} \cdot d\vec{a} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dv = 0$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_m) = -\vec{J} \cdot \vec{E}$ $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

ב. רישום פאזורי:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -j\omega \iint \vec{B} \cdot d\vec{a}$ $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{a} + j\omega \iint \vec{D} \cdot d\vec{a}$ $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = \iiint \rho dv$ $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ $\oiint \vec{S} \cdot d\vec{a} + 2j\omega (\iiint \langle w_m \rangle_t dv - \iiint \langle w_e \rangle_t dv) = -\frac{1}{2} \iiint \vec{J}^* \cdot \vec{E} dv$ $\oiint \vec{J} \cdot d\vec{a} + j\omega \iiint \rho dv = 0$	$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}$ $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\nabla \cdot \vec{S} + 2j\omega (\langle w_m \rangle_t - \langle w_e \rangle_t) = -\frac{1}{2} \vec{J}^* \cdot \vec{E}$ $\nabla \cdot \vec{J} + j\omega \rho = 0$
$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ $\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\langle \vec{S} \rangle_t = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$ $\langle w_e \rangle_t = \frac{1}{4} \vec{D} \cdot \vec{E}^*$ $\langle w_m \rangle_t = \frac{1}{4} \vec{B} \cdot \vec{H}^*$



2. משוואות הגלים בתווך הומוגני ואיזוטרופי

בתווך זה הפתרונות של המשוואה הם גלים מישוריים: גלים בעלי פאזה ואמפליטודה קבועה על פני מישור, כאשר השדות ניצבים לכיוון ההתקדמות: $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ יוצרים שלשה מינית. $\nabla \Leftrightarrow -jk$.
א. רישום זמני:

$$\nabla^2 \vec{E}(t) = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}(t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{H}(t) = \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}(t)}{\partial t^2}$$

ב. רישום פאזורי:

$$\nabla^2 \vec{E} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E} = \gamma^2 \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{H} = \gamma^2 \vec{H}$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \eta e^{j\theta_\eta}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \quad \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}$$

3. צורת הפתרון הכללית עבור גל מישורי שמתקדם בכיוון z:

א. רישום זמני:

$$E_x = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) + E_m^- e^{\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^-)$$

$$H_y = \frac{E_m^+}{\eta} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+ - \theta_\eta) - \frac{E_m^-}{\eta} e^{\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^- - \theta_\eta)$$

ב. רישום פאזורי:

$$\hat{E}_x = \hat{E}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{E}_m^- e^{\gamma z} = \hat{E}_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \hat{E}_m^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}$$

$$\hat{H}_y = \frac{\hat{E}_m^+}{\hat{\eta}} e^{-\gamma z} - \frac{\hat{E}_m^-}{\hat{\eta}} e^{\gamma z} = \frac{\hat{E}_m^+}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\theta_\eta} - \frac{\hat{E}_m^-}{\eta} e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{-j\theta_\eta}$$

ג זרימת הספק:

$$\vec{S}_{av} = \left(\frac{1}{2} \frac{(E_m^+)^2}{\eta} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta - \frac{1}{2} \frac{(E_m^-)^2}{\eta} e^{2\alpha z} \cos \theta_\eta - \frac{1}{2} \frac{E_m^+ E_m^-}{\eta} \sin \theta_\eta \sin(2\beta z + \theta^- - \theta^+) \right) \hat{z}$$

4. צורת הפתרון עבור חומר חסר הפסדים ($\sigma = 0$):

הגדרות כלליות:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(j\omega\varepsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\hat{\eta} = \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \quad \theta_\eta = 0$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u}{f}$$

א. רישום זמני:

$$E_x = E_m^+ \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) + E_m^- \cos(\omega t - \beta z + \theta^-)$$

$$H_y = \frac{E_m^+}{\eta} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) - \frac{E_m^-}{\eta} \cos(\omega t - \beta z + \theta^-)$$

$$\hat{E}_x = \hat{E}_m^+ e^{-j\beta z} + \hat{E}_m^- e^{j\beta z}$$

$$\hat{H}_y = \frac{\hat{E}_m^+}{\eta} e^{-j\beta z} - \frac{\hat{E}_m^-}{\eta} e^{j\beta z}$$

ג. זרימת הספק:

$$\bar{S}_{av} = \left(\frac{1}{2} \frac{(E_m^+)^2}{\eta} e^{-2\alpha z} - \frac{1}{2} \frac{(E_m^-)^2}{\eta} e^{2\alpha z} \right) \bar{1}_z$$

5. צורת הפתרון עבור חומר עם הפסדים ($\sigma \neq 0$):

הגדרות כלליות:

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon'' \underset{\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}}{=} \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_R - j\varepsilon_I = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}$$

$$n = n_R - jn_I \underset{\mu_r=1}{=} \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{\varepsilon_R - j\varepsilon_I} = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}}$$

$$n_R = \sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2} + \varepsilon_R}{2}} \quad n_I = \sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2} - \varepsilon_R}{2}}$$

$$\varepsilon_R = n_R^2 - n_I^2 \quad \varepsilon_I = 2n_R n_I$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \sqrt{-\mu\varepsilon\omega^2 \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)} =$$

$$= j \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_R - j\varepsilon_I} = jk_0 n = jk_0 (n_R - jn_I) = k_0 n_I + jk_0 n_R$$

$$\alpha = k_0 n_I \quad \beta = k_0 n_R$$

א. רישום זמני:

$$E_x = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) + E_m^- e^{\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^-)$$

$$H_y = \frac{E_m^+}{\eta} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) - \frac{E_m^-}{\eta} e^{\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^-)$$

ב. רישום פאזוררי:

$$\hat{E}_x = \hat{E}_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \hat{E}_m^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}$$

$$\hat{H}_y = \frac{\hat{E}_m^+}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - \frac{\hat{E}_m^-}{\eta} e^{\alpha z} e^{j\beta z}$$

ג. קירובים:

$\sigma \gg \omega\varepsilon$: הפסדים גבוהים	$\sigma \ll \omega\varepsilon$: הפסדים נמוכים
$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$	$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$
$u = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$	$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$
$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1+j) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \eta e^{j\theta_\eta}$	$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$
$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$	$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$
עומק החזירה (אפקט הקרום):	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$
$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}}$	
ההספק הנימטר למוליך:	
$P = \frac{1}{2} E_m^+ ^2 \frac{e^{-2\alpha z}}{\eta} \cos\theta_\eta$	

6. קיטוב גלים מישוריים

קיטוב הגל: כיוון השדה החשמלי של הגל האלקטרומגנטי.
 נבחן פתרון של גל מישורי הנע בכיוון z וכיוון השדה החשמלי שלו הינו כיוון כללי במישור xy :

$$E_x(z, t) = E_x^0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_y(z, t) = E_y^0 \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$$

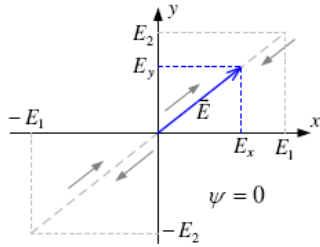
א. קיטוב קרי:

כיוון השדה החשמלי של הגל אינו משתנה עם הזמן ועם המקום.

התנאי לקיטוב קרוי: $\varphi = \pm n\pi, n \in \{-1, 0, 1\}$

השדה החשמלי הכולל מקיים:

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} \varphi = 0 \\ E_x^0 \hat{x} \pm E_y^0 \hat{y} \\ \varphi = \pm \pi \end{pmatrix} \cos(\omega t - \beta z)$$

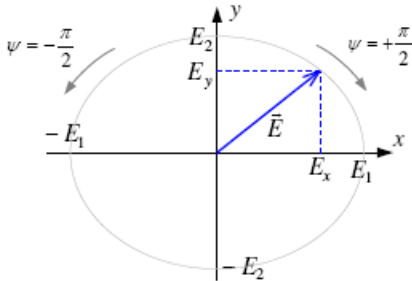


ב. קיטוב מעגלי: קצה וקטור השדה החשמלי מתאר מעגל במשור xy . גודל השדה החשמלי של הגל אינו משתנה עם הזמן ועם המקום.

התנאי לקיטוב מעגלי: $E_x^0 = E_y^0$ $\varphi = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad n \in Z$

השדה החשמלי הכולל מקיים:

$$\vec{E}(z, t) = E_x^0 \begin{pmatrix} \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ (right)} \\ \cos(\omega t - \beta z) \hat{x} \pm \sin(\omega t - \beta z) \hat{y} \\ \varphi = +\frac{\pi}{2} \text{ (left)} \end{pmatrix} \text{ רישום זמני:}$$



$$\vec{E}(z) = E_x^0 e^{-j\beta z} \begin{pmatrix} \varphi = +\frac{\pi}{2} \text{ (left)} \\ \hat{x} \pm j \hat{y} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ (right)} \end{pmatrix} \text{ רישום פאזורי:}$$

ג. קיטוב אליפטי: קצה וקטור השדה החשמלי מתאר אליפסה במשור xy .

מקרה פרטי לקיטוב אליפטי: $E_x^0 \neq E_y^0$ $\varphi = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad n \in Z$ (למעשה כל מקרה ששונה

מהנ"ל יתן קיטוב אליפטי).

השדה החשמלי הכולל מקיים:

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ (right)} \\ E_x^0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{x} \pm E_y^0 \sin(\omega t - \beta z) \hat{y} \\ \varphi = +\frac{\pi}{2} \text{ (left)} \end{pmatrix} \text{ רישום זמני:}$$

$$\vec{E}(z) = e^{-j\beta z} \begin{pmatrix} \varphi = +\frac{\pi}{2} \text{ (left)} \\ E_x^0 \cdot \hat{x} \pm j E_y^0 \cdot \hat{y} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ (right)} \end{pmatrix} \text{ רישום פאזורי:}$$

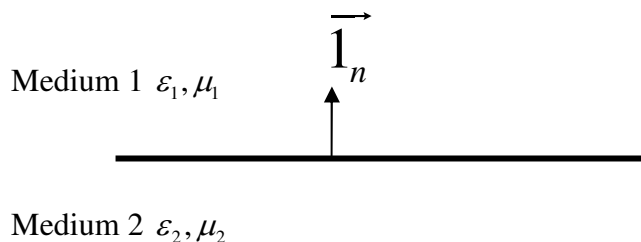
7. תנאי שפה של משוואות מקסוול

$$\vec{l}_n \cdot (\epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2) = \rho_s$$

$$\vec{l}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\vec{l}_n \cdot (\mu_1 \vec{H}_1 - \mu_2 \vec{H}_2) = 0$$

$$\vec{l}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$



8. דיספרסיה

<p>סביב תדר קרוב ל-ω_0 ניתן לפתח את β לטור:</p> $\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right _{\omega_0} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right _{\omega_0} = \frac{\omega_0}{v_p} + \frac{\omega - \omega_0}{v_g} + \frac{1}{2} \beta_2 (\omega - \omega_0)^2$ <p>נגדיר: $\Omega = \omega - \omega_0$, לכן: $\beta(\Omega) = \beta_0(0) + \beta_1(0)\Omega + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2$</p>	<p>מהירות החבורה</p> $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)}$	<p>מהירות הפאזה</p> $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{n}$
---	---	--

- β_0 איבר קבוע שאינו משפיע על הפאזה וניתן להתעלם ממנו.
 - β_1 לינארי בתדר, מתייחס למהירות החבורה והופך לאחר התמרה הפוכה להזזה בזמן:
- $$a(z,t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\tilde{A}(z=0,\omega) \cdot e^{-j\beta_1 z \omega} \right) = a(z=0, t - \beta_1 z) = a(z=0, t - z/v_g)$$
- β_2 נקרא מקדם הדיספרסיה, הוא ריבועי בתדר ומתאר התרחבות זמנית של הפולס תוך כדי התפשטות, בשל השינוי במהירות החבורה כפונקציה של התדר (כלומר דיספרסיה של מהירות החבורה).
 - ניתן לנתח את תופעת ההתרחבות בשני מישרים:
 - במישור התדר: תוספת של פאזה שונה, ריבועית בתדר, לכל רכיב תדר. תוספת הפאזה אינה באה לידי ביטוי בספקטרום העוצמה, אך מתבטאת בתחום הזמן ע"י התרחבות הפולס. חשוב לזכור שלא נוספים תדרים חדשים, שכן הדיספרסיה היא תופעה לינארית.
 - בתחום הזמן: קבוצות תדרים שונות בפולס מתקדמות במהירויות חבורה שונות. לכן ככל שהפולס מתקדם רכיבי תדר שונים מתרחקים זה מזה (בזמן ובמרחב), ונוצרת הפרדה של התדרים לרוחב הפולס בזמן. בחלק הקידמי של הפולס יהיו תדרים "מהירים" יותר ובחלק האחורי של הפולס יהיו תדרים "איטיים" יותר. ככל שימשיכו להתרחק זה מזה נקבל הרחבה של הפולס.

קיזוז הפרשי פאזה: שני גלים בתדרים ω_1, ω_2 , שעוברים דרך מקוז מהצורה $e^{j\chi(\omega - \omega_1)}$

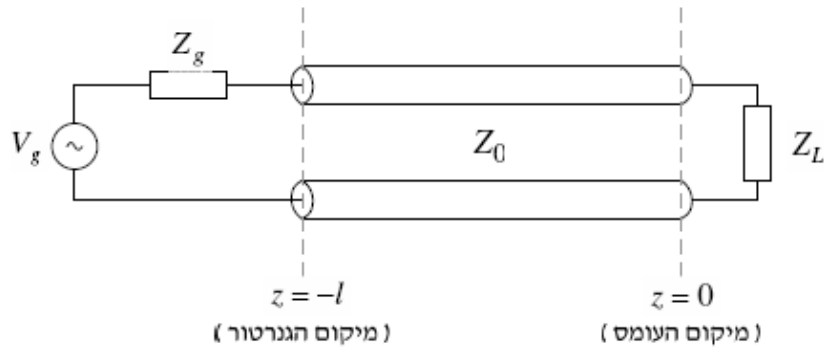
פאזה זמנית	פאזה מרחבית
$\Delta T_{12}(L) = L \left(\frac{1}{v_g^1} - \frac{1}{v_g^2} \right) \quad f(t-t_0) \Leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$ $\frac{L}{v_g^1} - \left(\frac{L}{v_g^2} + \chi \right) = 0 \quad \chi = L \left(\frac{1}{v_g^1} - \frac{1}{v_g^2} \right)$	$\Delta \phi_{12}(L) = (\beta_1 - \beta_2) L = 2\pi L \left(\frac{n_1}{\lambda_1} - \frac{n_2}{\lambda_2} \right)$ $\beta_1 L - [\beta_2 L - \chi(\omega_2 - \omega_1)] = 0 \quad \chi = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\omega_2 - \omega_1} L$

13. פלסמה

<p>מהירות חבורה ופאזה</p> $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}}$ $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}$ $v_g \cdot v_p = c^2$	<p>מקדם דיאלקטרי</p> $\epsilon_{plasma} = \epsilon_0 \left(1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right) \quad \beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}$	<p>תדר אפייני לפלסמה</p> $\omega_p = \sqrt{\frac{N_e q^2}{\epsilon_0 m_e}} = 56.4 \sqrt{N_e} \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$ <p>מוליכות הפלסמה</p> $\sigma = -j \frac{q^2}{m_e \omega} N_e$
<p>מדומה ויש דעיכה: $\omega < \omega_p$</p> <p>ממשי ויש התפשטות: $\omega > \omega_p$</p> <p>כמו בריק: $\beta \approx \frac{\omega}{c} : \omega \gg \omega_p$</p>		

14. פולס גאוסי

<p>רוחב הפולס:</p> $2\tau_1 = 2\tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_2 z}{\tau_0^2} \right)^2}$	<p>פילוג בזמן:</p> $A(z,t) = A_0 \frac{\tau_0}{\sqrt{\tau_0^2 - j\beta_2 z}} \exp \left\{ -\frac{(t - \beta_1 z)^2}{2 \left(\tau_0^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{\tau_0} \right)^2 \right)} \right\}$	<p>פילוג התחלתי:</p> $A(z=0,t) = A_0 e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}$
---	--	--



א. משוואות הטלגרפיה בתחום הזמן והתדר:

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 I(z,t)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 I(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = -\omega^2 LC V(z) \quad \frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = -\omega^2 LC I(z) \quad LC = \mu\epsilon$$

צורת הפתרון על קו התמסורת בתחום התדר:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} = V^+ e^{-j\beta z} (1 + \Gamma(z)) = V_+ e^{-j\beta z} (1 + |\Gamma_L| e^{j\phi_L} e^{+2j\beta z})$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{j\beta z} = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} (1 - \Gamma(z)) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-}$$

1. בקוי תמסורת ללא הפסדים ההספק שמתפתח על אימפדנס הכניסה של הקו שווה להספק המתפתח על העומס.
2. כל קטע של קו תמסורת עבור תדר נתון ניתן להחליף ברכיב מקובץ אשר מתאר את אימפדנס הכניסה לקטע.
3. קטע המסתיים בקצר, נתק, קבל או סליל אינו צורך הספק.
4. מקדם החזרה $\Gamma(z)$ מחזורי בחצי אורך גל, וכך גם האימפדנס $Z(z)$ והאדמיטנס $Y(z)$, אך למתח $V(z)$ ולזרם $I(z)$ יש מחזור של אורך גל שלם.
5. אם יש במעגל יותר ממקור מתח יחיד אזי ניתן לעבוד בסופרפוזיציה:
 - מקורות בתדרים שונים – מחברים הספקים.
 - מקורות בתדר זהה – מחברים מתחים.

מקדם החזרה:

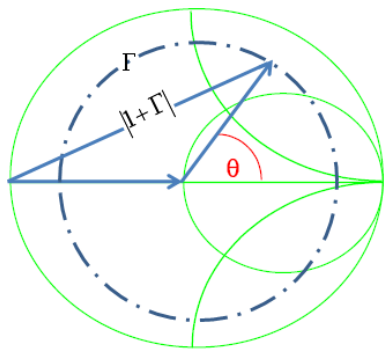
$$\Gamma_L \equiv \frac{V_L^-}{V_L^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad \Gamma(z) = \Gamma_L e^{2j\beta z}$$

מתח מנורמל וזרם מנורמל (מחזוריים $\frac{\lambda}{2}$):

$$\bar{V}(z) = \frac{V(z)}{V_+ e^{-j\beta z}} = 1 + \Gamma_L e^{2j\beta z} = 1 + \Gamma(z)$$

$$\bar{I}(z) = \frac{I(z)}{I_+ e^{-j\beta z}} = 1 - \Gamma_L e^{2j\beta z} = 1 - \Gamma(z)$$

מציאת המתח המנורמל



האימפדנס לאורך הקו:

$$\bar{Z}(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{\bar{Z}_L - j \tan(\beta z)}{1 - j \bar{Z}_L \tan(\beta z)} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

$$Z_{in} = Z(-l)$$

לאימפדנס הכניסה חשיבות גדולה, כי מבחינת המעגל הקודם לקו התמסורת, ניתן להמיר את קו התמסורת בתוספת המעגלים שאחריהם (העומס) באימפדנס שקול מקובץ שהינו אימפדנס הכניסה.

גלים עומדים:

$$V(z) = V_+ e^{-j\beta z} (1 + |\Gamma_L| e^{j\phi_L} e^{+2j\beta z})$$

נקודות מקסימום ומינימום והמתח בהן:

$$2\beta z_{\max} + \phi_L = -2\pi n \Rightarrow z_{\max} = -\frac{2\pi n + \phi_L}{2\beta} = \frac{2\pi n + \phi_L}{4\pi} \lambda$$

$$V_{\max} \triangleq |V(z_{\max})| = |V_+| (1 + |\Gamma_L|)$$

$$2\beta z_{\min} + \phi_L = -(2n+1)\pi \Rightarrow z_{\min} = -\frac{(2n+1)\pi + \phi_L}{2\beta} = \frac{(2n+1)\pi + \phi_L}{4\pi} \lambda$$

$$V_{\min} \triangleq |V(z_{\min})| = |V_+| (1 - |\Gamma_L|)$$

$$VSWR = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \quad |\Gamma_L| = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1}$$

בקו מקוצר או מנותק בקצה יג"ע הוא אינסוף

הספק הנמסר לעומס:

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} (1 - |\Gamma_L|^2)$$

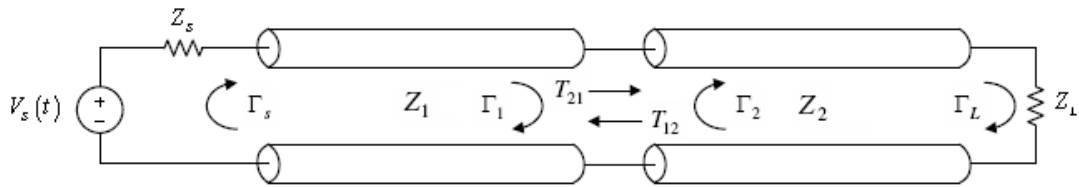
ההספק הנכנס לקו:

$$V_{in} = V_S \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_S} \quad I_{in} = \frac{V_{in}}{Z_{in}}$$

$$P_{in} = \frac{1}{2} \text{Re}\{V_{in} I_{in}^*\} = |V_S|^2 \frac{1}{2|Z_{in} + Z_S|^2} \text{Re}\{Z_{in}\}$$

בקו חסר הפסדים שני ההספקים הנ"ל שווים. גם אם בדרך מהמקור לעומס יש גזמים מקוצרים, מנותקים או עם אימפדנס מדומה בקצה.

דיאגרמת קפיצות עבור שני קווים בעלי אימפדנס אופייני Z שונה המחוברים בטור:



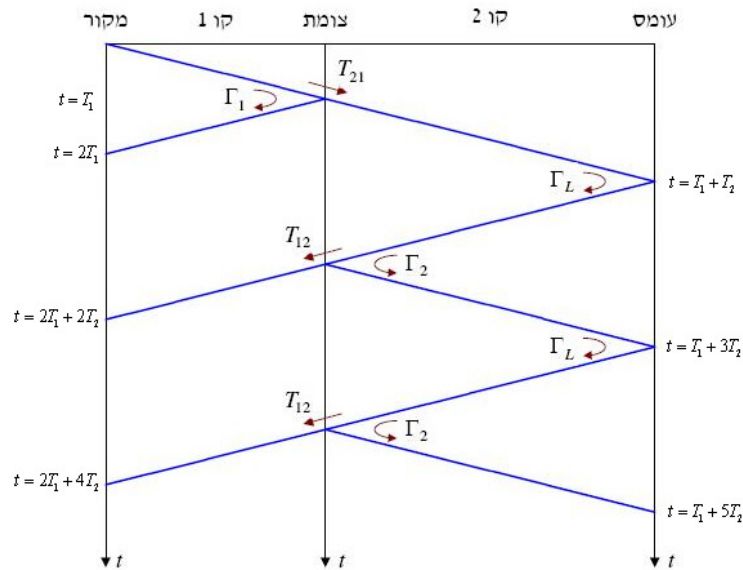
$$Z_1 \quad \Gamma_1 \equiv \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad T_{21} \equiv \frac{V_2^+}{V_1^+} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = 1 + \Gamma_1 \quad \Gamma_s = \frac{Z_s - Z_1}{Z_s + Z_1} \quad \text{מאפייני קו 1:}$$

$$Z_2 \quad \Gamma_2 \equiv \frac{V_2^-}{V_2^+} = \frac{Z_L - Z_2}{Z_L + Z_2} = -\Gamma_1 \quad T_{12} \equiv \frac{V_1^+}{V_2^+} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = 1 - \Gamma_1 \quad \text{מאפייני קו 2:}$$

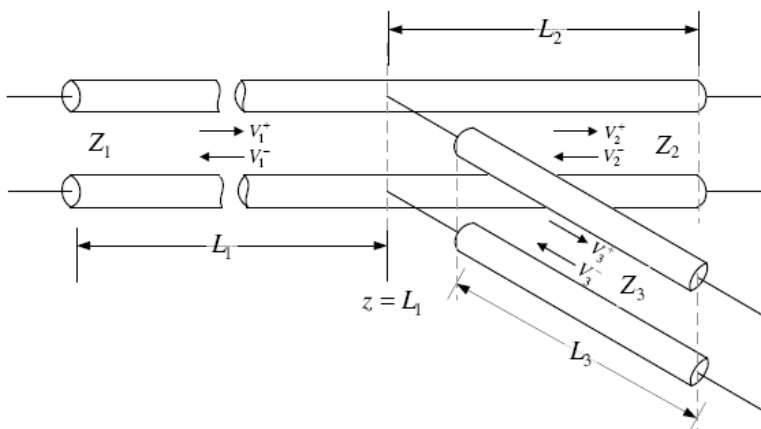
זמני מעבר בקווים: T_1, T_2 .

המתח בכניסה לקו ברגע $t = 0$ הינו $V(z = -l, t = 0) = V_s \frac{Z_0}{Z_g + Z_0}$ ובכל פעם מוכפל

במקדם המתאים בדיאגרמת הקפיצות.
שים לב: בשירטוט הנ"ל המקור מתואם.



ג. ניתוח תופעות מעבר כשיש הסתעפויות בקווי תמסורת



Z_1, Z_2, Z_3 הוא אימפדנס אופייני של הקווים

$$\Gamma_1 \equiv \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{R_p - Z_1}{R_p + Z_1}$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

$$T_{21} \equiv \frac{V_2^+}{V_1^+} = \frac{2R_p}{R_p + Z_1}$$

$$T_{31} \equiv \frac{V_3^+}{V_1^+} = \frac{2R_p}{R_p + Z_1}$$

ד. דיאגרמת סמית

א. בניית הדיאגרמה:

נגדיר את מקדם ההחזרה לאורך הקו והאימפדנס לאורך הקו:

$$\Gamma(z) = \Gamma_L e^{j4\pi \frac{z}{\lambda}} \triangleq p(z) + jq(z) \quad Z(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \triangleq r + jx$$

לכן נקבל:

$$\frac{1 + p + jq}{1 - p - jq} = r + jx$$

פתרון המשוואה הנ"ל:

$$\frac{1}{(r+1)^2} = \left(p - \frac{r}{r+1}\right)^2 + q^2 \quad \frac{1}{x^2} = (p-1)^2 + \left(q - \frac{1}{x}\right)^2$$

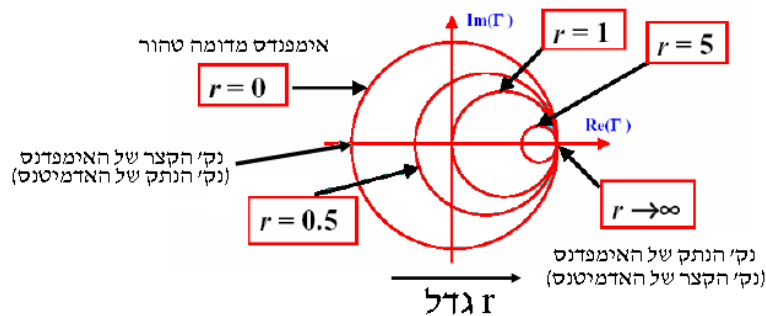
א. תכונות הדיאגרמה:

מעגלי החלק הממשי r

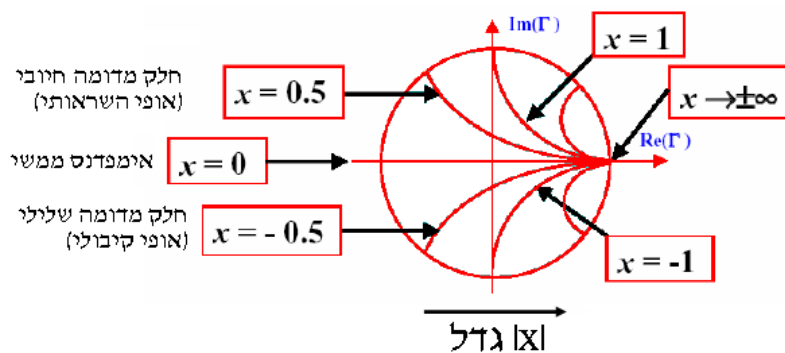
אימפדנס ואדמיטנס
מנורמל:

$$\bar{Y} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Z_0}{Z}$$

$$\bar{Z} = \frac{Z}{Z_0}$$



מעגלי החלק המדומה x



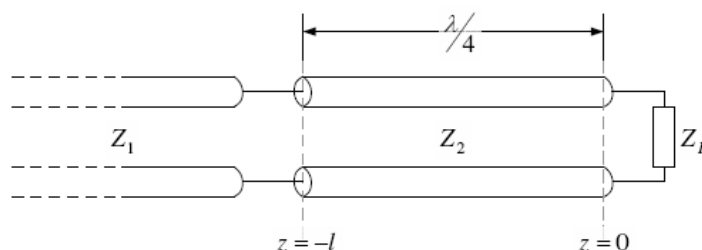
בהנתן אימפדנס העומס או $|\Gamma|$ נשרטט מעגל על הדיאגרמה כך שהיחס בין רדיוס המעגל להיקף הדיאגרמה יהיה $|\Gamma|$. מעגל זה מייצג מעגל שווה $|\Gamma|$, כי בתנועה לאורך קו תמסורת חסר הפסדים גודלו של מקדם ההחזרה קבוע, אך הוא משתנה לפי הקשור הנתון בסעיף א.

מקדם ההחזרה מחזורי $\frac{\lambda}{2}$, לכן הקפה אחת של מעגל שווה $|\Gamma|$ מתארת תנועה של $\frac{\lambda}{2}$ לכיוון העומס (עם כיוון השעון) או לכיוון המקור (נגד כיוון השעון). תנועה מנקודה מסויימת לנקודה הנמצאת $\frac{\lambda}{4}$ ממנה (כלומר חצי סיבוב על הדיאגרמה) תתן את האדמיטנס באותה נקודה. לחישוב מרחקים בין נקודות על המעגל יש לחבר קו ישר שיוצא מהראשית ועובר דרך הנקודה הרצויה לעבר המעגל ההיקפי, וזה מיקום הנקודה. כנ"ל לנקודה השניה ולחסר.

א. תיאום עומסים

תאום העומס נועד למנוע החזרות גלים למקור.

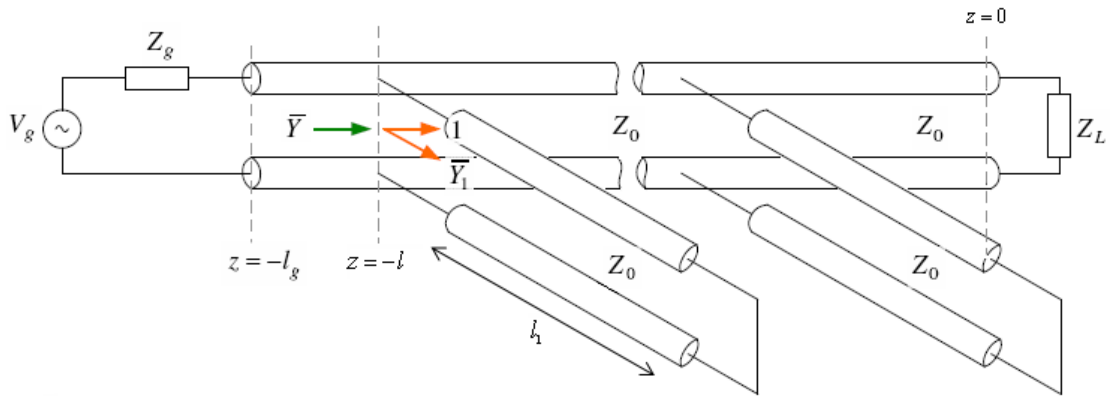
תיאום באמצעות שנאי $\frac{\lambda}{4}$:



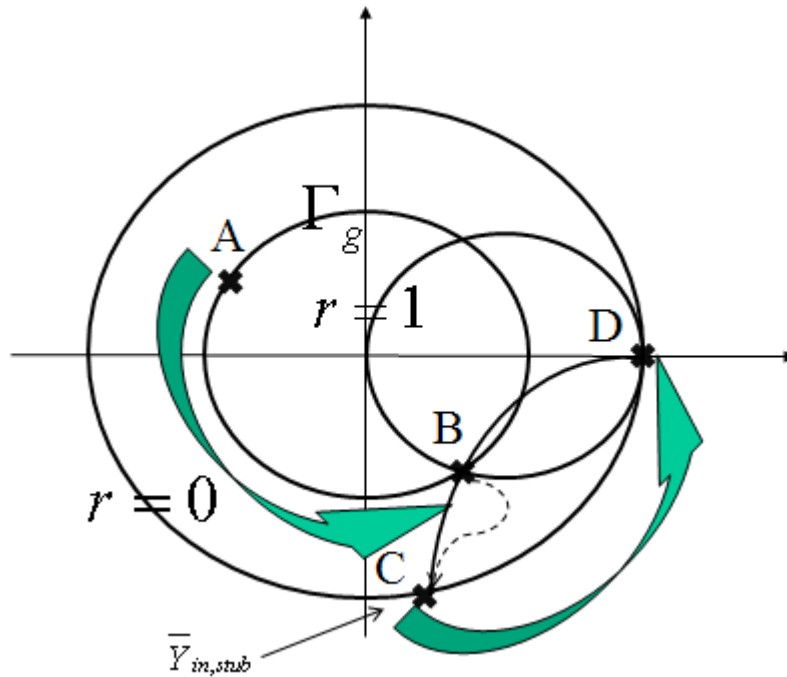
תיאום להעברת מקסימום הספק:

נרצה להעביר מקסימום הספק לעומס Z_L . לשם כך נצטרך שיתקיים: $Z_{in} = Z_g^*$. במקרה זה

ההספק שימסר לקו יהיה $\langle P_{in} \rangle = \frac{|V_g|^2}{8R_g}$. ניתן לבצע התיאום הנ"ל על ידי גדם נוסף מקוצר בקצהו, לאחר תיאום העומס לקו.



נניח שתיאמנו את העומס לקו למניעת החזרות. בנקודה $z = -l$ צריך להתקיים: $\bar{Y} = 1 + \bar{Y}_1$. ולכן: $Re\{\bar{Y}\} = 1$ $Im\{\bar{Y}\} = \bar{Y}_1$. נמקם את Y_g^* על הדיאגרמה, בנק' A, ובכך נקבל את $\Gamma(-l_g)$. נתקדם על מעגל Γ_g לכיוון העומס (נגד כיוון השעון) עד לנק' החיתוך עם המעגל $r = 1$, שנסמן B. מתקיים $\widehat{AB} = l_g - l$ (מרחק הגדם מהמקור). מהנק' B נמצא את \bar{Y}_1 . מתקיים: $\bar{Y}_1 = Im\{\bar{Y}_B\}$, נסמן C. נתקדם מהנק' C לנק' הקצר D ונקבל $\widehat{CD} = l_1$.



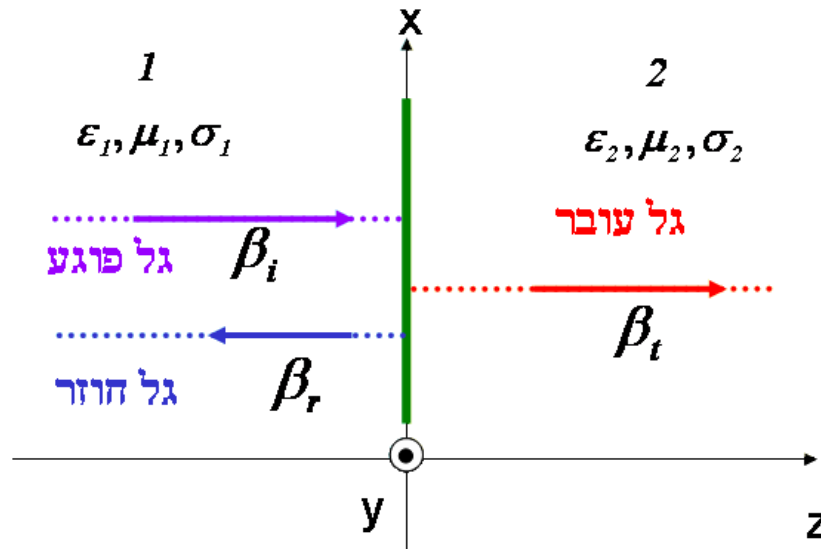
10. מעבר של גלים מישוריים בין תווכים

א. הגדרות:

משטח ההפרדה: משטח במרחב בו קיימת אי רציפות בתווך.

מישור הפגיעה: המישור המוגדר על ידי וקטור ההתקדמות של הגל הפוגע ווקטור הנורמל למשטח ההפרדה.

א. פגיעה ניצבת



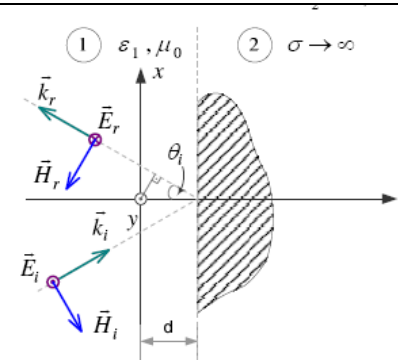
צורת הפתרון	מקדמי העברה והחזרה
$\vec{E}_i = E_1 e^{-\gamma_1 z} \hat{x}$	$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \Gamma$
$\vec{H}_i = \frac{E_1}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \hat{y}$	$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = T$
$\vec{E}_r = \Gamma E_1 e^{\gamma_1 z} \hat{x}$	$1 + \Gamma = T$
$\vec{H}_r = -\Gamma \frac{E_1}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} \hat{y}$	
$\vec{E}_t = T E_1 e^{-\gamma_2 z} \hat{x}$	
$\vec{H}_t = T \frac{E_1}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \hat{y}$	

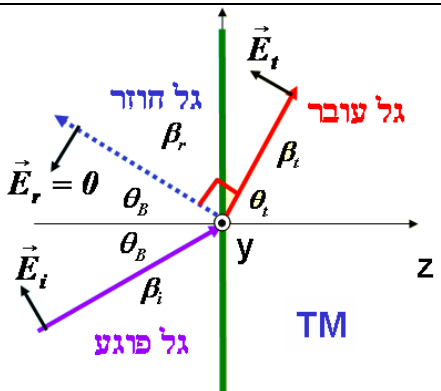
<p>קיטוב מקביל (transverse magnetic) TM: השדה המגנטי ניצב למישור הפגיעה ומשיק למשטח ההפרדה.</p>	<p>קיטוב ניצב (transverse electric) TE: השדה החשמלי ניצב למישור הפגיעה ומשיק למשטח ההפרדה.</p>	
$\vec{E}_i(z, x) = E_i^0 (\cos \theta_i \hat{x} - \sin \theta_i \hat{z}) e^{-j\beta_1 (\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}$ $\vec{H}_i(z, x) = \frac{E_i^0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \hat{y}$ $\vec{E}_r(z, x) = E_r^0 (\cos \theta_r \hat{x} + \sin \theta_r \hat{z}) e^{-j\beta_1 (\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}$ $\vec{H}_r(z, x) = -\frac{E_r^0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)} \hat{y}$ $\vec{E}_t(z, x) = E_t^0 (\cos \theta_t \hat{x} - \sin \theta_t \hat{z}) e^{-j\beta_2 (\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)}$ $\vec{H}_t(z, x) = \frac{E_t^0}{\eta_2} e^{-j\beta_2 (\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)} \hat{y}$	$\vec{E}_i(z, x) = E_i^0 e^{-j\beta_1 (\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \hat{y}$ $\vec{H}_i(z, x) = \frac{E_i^0}{\eta_1} (-\cos \theta_i \hat{x} + \sin \theta_i \hat{z}) e^{-j\beta_1 (\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}$ $\vec{E}_r(z, x) = E_r^0 e^{-j\beta_1 (\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)} \hat{y}$ $\vec{H}_r(z, x) = \frac{E_r^0}{\eta_1} (\cos \theta_r \hat{x} + \sin \theta_r \hat{z}) e^{-j\beta_1 (\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}$ $\vec{E}_t(z, x) = E_t^0 e^{-j\beta_2 (\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)} \hat{y}$ $\vec{H}_t(z, x) = \frac{E_t^0}{\eta_2} (-\cos \theta_t \hat{x} + \sin \theta_t \hat{z}) e^{-j\beta_2 (\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)}$	<p>צורת הפתרון</p>
$r_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - n^2 \cos \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} + n^2 \cos \theta_1} = \frac{E_r^0}{E_i^0}$ $t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{2n \cos \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} + n^2 \cos \theta_1} = \frac{E_t^0}{E_i^0}$ $1 + r_{\parallel} = t_{\parallel} \left(\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \right) = t_{\parallel} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}{n \cos \theta_1}$	$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{E_r^0}{E_i^0}$ $t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{E_t^0}{E_i^0}$ $1 + r_{\perp} = t_{\perp} \quad n = \frac{n_2}{n_1}$	<p>משוואות פרנל</p>
$R = r ^2 \quad T = n \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} t ^2 = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1} t ^2$ $R + T = r ^2 + n \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} t ^2 = 1$		<p>מקדם העברה והחזרה להספק</p>
$(Z_z)_{TE} = -\frac{E_{y+}}{H_{x+}} = \frac{E_{y-}}{H_{x-}} = \frac{\eta_1}{\cos \theta}$	$(Z_z)_{TM} = \frac{E_{x+}}{H_{y+}} = -\frac{E_{x-}}{H_{y-}} = \eta_1 \cos \theta \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$	<p>אימפדנס</p>
<p>עבור חומר דיאלקטרי בו $\mu_r = 1$ מתקיים $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{n_2}{n_1}$, לכן אם $\mu_r \neq 1$ ניתן להחליף את n ב- $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 \mu_2}}$ ניתן לחשב מקדמי העברה והחזרה על ידי נוסחא זה לזו של קורי תמסורת</p>		
$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \theta_2 = \sin^{-1} \left(\frac{1}{n} \sin \theta_1 \right)$ $\theta_i = \theta_r$		<p>חוק סנל</p>

ג. פגיעה בזווית במוליך מושלם ($\sigma_2 \rightarrow \infty$)

TE	
$\Gamma = -1 \quad T = 0$	מקדמי החזרה והעברה
$\vec{E}_1(z, x) = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_i^0 e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \left(e^{-j\beta_1 \cos \theta_i z} - e^{j\beta_1 \cos \theta_i z} \right) \hat{y} =$ $= -2jE_i^0 e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \sin(\beta_1 \cos \theta_i z) \hat{y}$ $\vec{H}_1(z, x) = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \frac{E_i^0}{\eta_1} (-\cos \theta_i) e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \left(e^{-j\beta_1 \cos \theta_i z} + e^{j\beta_1 \cos \theta_i z} \right) \hat{x} +$ $+ \frac{E_i^0}{\eta_1} \sin \theta_i e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \left(e^{-j\beta_1 \cos \theta_i z} - e^{j\beta_1 \cos \theta_i z} \right) \hat{z} =$ $= -2 \frac{E_i^0}{\eta_1} \cos \theta_i e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \cos(\beta_1 \cos \theta_i z) \hat{x} -$ $-2j \frac{E_i^0}{\eta_1} \sin \theta_i e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \sin(\beta_1 \cos \theta_i z) \hat{z}$	צורת הפתרון
$\vec{S}_{av} = 2 \frac{ E_i^0 ^2}{\eta_1} \sin \theta_i \sin^2(\beta_1 \cos \theta_i z) \hat{x}$	הספק
TM	
$\Gamma = -1 \quad T = 0$	מקדמי החזרה והעברה
$\vec{E}_1(z, x) = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_i^0 \cos \theta_i e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \left(e^{-j\beta_1 \cos \theta_i z} - e^{j\beta_1 \cos \theta_i z} \right) \hat{x} +$ $- E_i^0 \sin \theta_i e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \left(e^{-j\beta_1 \cos \theta_i z} - e^{j\beta_1 \cos \theta_i z} \right) \hat{z} =$ $= -2jE_i^0 \cos \theta_i e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \sin(\beta_1 \cos \theta_i z) \hat{x} -$ $-2E_i^0 \sin \theta_i e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \cos(\beta_1 \cos \theta_i z) \hat{z}$ $\vec{H}_1(z, x) = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \frac{E_i^0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \left(e^{-j\beta_1 \cos \theta_i z} + e^{j\beta_1 \cos \theta_i z} \right) \hat{y} =$ $= 2 \frac{E_i^0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 \sin \theta_i x} \cos(\beta_1 \cos \theta_i z) \hat{y}$	צורת הפתרון
$\vec{S}_{av} = 2 \frac{ E_i^0 ^2}{\eta_1} \sin \theta_i \cos^2(\beta_1 \cos \theta_i z) \hat{x}$	הספק

ד. מציאת פתרון של פגיעה בחומר דיאלקטרי על ידי פגיעה במוליך מושלם
נחליף את משטח ההפרדה במוליך מושלם במרחק d ותווך n_1 . הפתרון תקף עבור $z < 0$.

<p>מקדם ההחזרה לקיטוב ניצב מעבר לזווית הקריטית:</p> $r_{\perp} = \frac{\cos \theta_1 - jn\sqrt{\sin^2 \theta_2 - 1}}{\cos \theta_1 + jn\sqrt{\sin^2 \theta_2 - 1}}$ <p>המכנה הוא צמוד קומפלקסי של המונה, לכן הפאזה שצובר הגל היא פעמיים הפאזה של המונה, וזאת הפאזה שנרצה להשיג בעזרת המראה והמרחק d:</p> $\tan \frac{\psi}{2} = \frac{n\sqrt{\sin^2 \theta_2 - 1}}{\cos \theta_1}$ <p>לכן:</p> $2k_1 d \cos \theta_1 + \pi = \psi$ <p>ומכאן נחליף את d.</p>	 <p>הדרך הנוספת אותה עושה הגל היא $2d \cos \theta_1$, לכן צבר פאזה של $2k_1 d \cos \theta_1$. לכך נוסיף פאזה של π מהמוליך המושלם, לכן סך הכל צבר פאזה של $2k_1 d \cos \theta_1 + \pi$.</p>
---	--

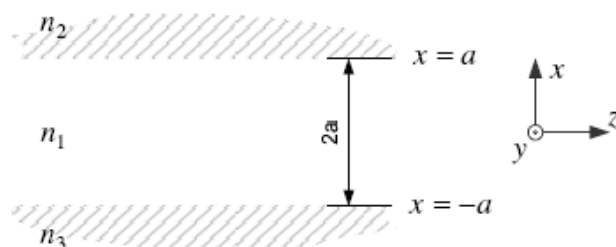
$\sin \theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}} \quad \tan \theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = n$ $r_{\parallel} = 0 \quad t_{\parallel} = \frac{1}{n} \quad r_{\perp} = \frac{1-n^2}{1+n^2} \quad t_{\perp} = \frac{2}{1+n^2}$	<p>בחומרים לא מגנטיים ובקיטוב מקביל (TM) הסימן של מקדם ההחזרה משתנה. ההחזרה מתאפסת עבור זווית פגיעה הקרויה זווית ברוסטר. זוית זו קיימת עבור כל יחס של מקדמי שבירה.</p>
	<p>בפגיעה בזווית ברוסטר – הגל העובר והגל החוזר (שלא קיים) היו יוצרים ביניהם זווית של 90°.</p> $\theta_t = \frac{\pi}{2} - \theta_B$

1. זווית קריטית

$\sin 90^\circ = \sin \theta_C \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \quad t_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_2}{\cos \theta_1 - j \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}$ $\theta_C = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1} \quad t_{\parallel} = \frac{2n \cos \theta_1}{n^2 \cos \theta_1 - j \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}$	<p>מעבר מחומר "צפוף" אלקטרומגנטית לחומר פחות "צפוף" ($n_1 > n_2$) מתאפיין בכך שקיימת זווית פגיעה (קטנה מ-90°) שעבורה זווית ההעברה הינה 90°.</p>
$\sin \theta_1 > \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 > 1$ $\alpha_2 = \cos \theta_2 = \pm j \sqrt{\sin^2 \theta_2 - 1} = \pm \frac{j}{n} \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}$ $\vec{E}_2 = E_2^0 e^{-j\beta_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)} = E_2^0 e^{\pm \alpha_2 z} e^{-j\beta_2 x \sin \theta_2}$	<p>בזווית פגיעה הגדולות מהזווית הקריטית, קוסינוס זווית הגל העובר הופך למדומה (יש לשים לב בבחירת סימן השורש כך שתתקבל דעיכה) ויש החזרה פנימית גמורה.</p>
$r_{\parallel} = -\frac{1 - j \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{n^2 \cos \theta_1}}{1 + j \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{n^2 \cos \theta_1}} = e^{j(\pi - 2\psi_{TM})} \quad r_{\perp} = \frac{1 - j \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\cos \theta_1}}{1 + j \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\cos \theta_1}} = e^{-j2\psi_{TE}}$ $\psi_{TM} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{n^2 \cos \theta_1} \right) \quad \psi_{TE} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\cos \theta_1} \right)$ $\tan(\psi_{TM} - \psi_{TE}) = \frac{\chi - n^2 \chi}{n^2 + \chi^2} \quad \chi = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\cos \theta_1} \quad \frac{r_{\perp}}{r_{\parallel}} = e^{j(2\psi_{TM} - 2\psi_{TE} - \pi)}$	<p>מקדמי ההחזרה וההעברה הופכים להיות מרוכבים (גם בחומרים ללא הפסדים). גל שפוגע במשטח ההפרדה מוחזר באותה אמפליטודה אך מקבל תוספת פאזה ששווה לפאזה של מקדם ההחזרה. לגל העובר יש רכיב דועך בכיוון ניצב למשטח ההפרדה. בין רכיב TE לרכיב TM יש הפרש פאזה.</p>

11. מוליכי גלים

א. מוליך גלים דיאלקטרי סימטרי



$$n_2 = n_3 \quad n_1 > n_2$$

אופן קורן – תצורת גל בה ההספק נישא בעיקרו בשכבות המעטה ומיעוטו בשכבת הליבה. אופן זה אינו מקיים את תנאי הקרינה – אך הדרישה הינה כי הוא יהיה סופי עבור $x \rightarrow \pm\infty$

אופן מולך – תצורת גל בה ההספק נישא בעיקרו בתוך שכבת הליבה של מוליך הגל. אופן זה מקיים

$$\vec{E}(x)_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$$

נוסחאות שנכונות עבור TE ו- TM

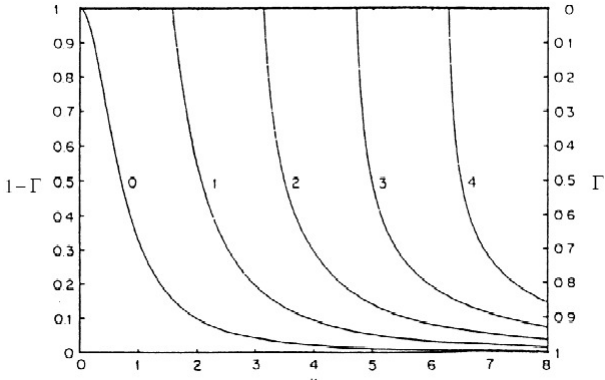
$$p^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2 = k_0^2 (n_{eff}^2 - n_2^2)$$

$$q^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_{eff}^2) \quad \beta = \frac{\omega}{c} n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{q}{n_1 k_0}\right)^2} = \frac{\omega}{c} n_1 \cos \theta \quad n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} = n_1 \cos \theta$$

$$h^2 = \beta^2 - n_3^2 k_0^2 = k_0^2 (n_{eff}^2 - n_3^2)$$

הגדרות

עבור אופני TE :



$$\Gamma = \frac{\int_{-a}^a \langle S \rangle_z dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \langle S \rangle_z dx} = \frac{\int_{-a}^a \text{Re}\{E_y H_x^*\} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}\{E_y H_x^*\} dx}$$

$$\Gamma = 1 - \frac{\cos^2 aq}{1 + ap} : TE_0 \text{ עבור אופן } TE_0$$

מקום כליאה

$$\sqrt{(ap)^2 + (aq)^2} = V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

לערך V חשיבות רבה - כיוון שבאמצעותו נקבל את ערך הקיטעון של האופנים השונים

תדר מנוורמל

תנאי לקיטעון: $p = 0$. לכן:

תנאי שקול:

$$V_c = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = m \frac{\pi}{2}$$

$$k_{0,cutoff} = \frac{m\pi}{2a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

$$\beta = n_2 k_0 \Rightarrow q = \frac{V}{a} = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$\tan(2aq) = \tan(2V) = 0$$

$$2ak_{0,cutoff} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = m\pi \Rightarrow k_{0,cutoff} = \frac{m\pi}{2a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

קיטעון

מספר כולל של אופנים (TE וגם TM): $2M + 2$ (אופני TE_0, TM_0 תמיד קיימים במוליך סימטרי) אין אופן TEM .

עבור אופנים מסוג אחד (TE או TM):

$$N = M + 1 = \left\lfloor \frac{4a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{\lambda_0} \right\rfloor + 1$$

מספר אופנים

$$n_{eff} = \sqrt{b(n_1^2 - n_2^2) + n_2^2} \quad n_2 \leq n_{eff} \leq n_1$$

$$b = \frac{n_{eff}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad 0 \leq b \leq 1 \quad b = \left(\frac{ap}{V}\right)^2$$

$$\sqrt{1-b} \tan(V\sqrt{1-b}) = \sqrt{b} \quad aq = V\sqrt{1-b}$$

מקום התפשטות מנוורמל

אופן TE : $E_z = 0 \quad E_x = 0 \quad H_y = 0$

אופן איזוגי

אופן זוגי

$$\tan(2aq) = \frac{2pq}{q^2 - p^2}$$

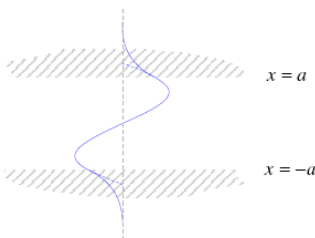
$$\tan(aq) = -\frac{q}{p}$$

$$\tan(aq) = \frac{p}{q}$$

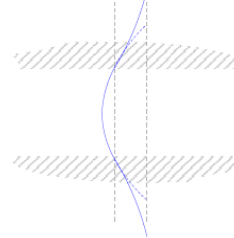
$$E_y = \begin{cases} Ae^{-px} e^{-j\beta z} & x > a \\ B \sin(qx) e^{-j\beta z} & -a \leq x \leq a \\ -Ae^{px} e^{-j\beta z} & x < -a \end{cases}$$

$$E_y = \begin{cases} Ae^{-px} e^{-j\beta z} & x > a \\ B \cos(qx) e^{-j\beta z} & -a \leq x \leq a \\ Ae^{px} e^{-j\beta z} & x < -a \end{cases}$$

אופן אי-זוגי TE_1



אופן זוגי TE_0

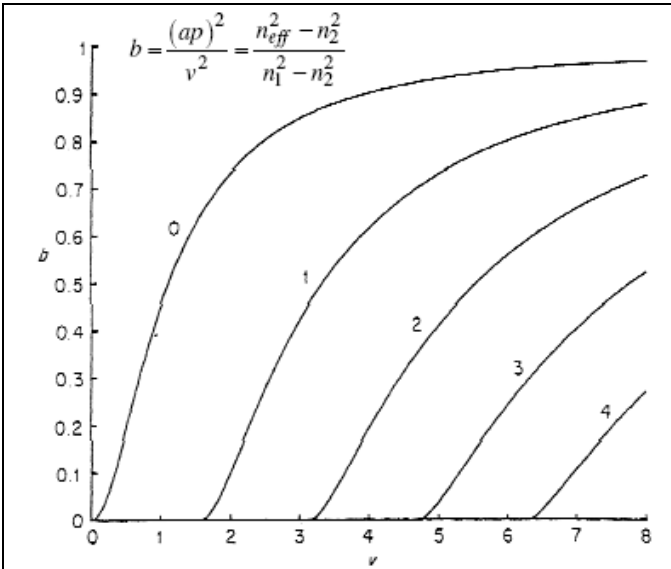


הצגה גרפית

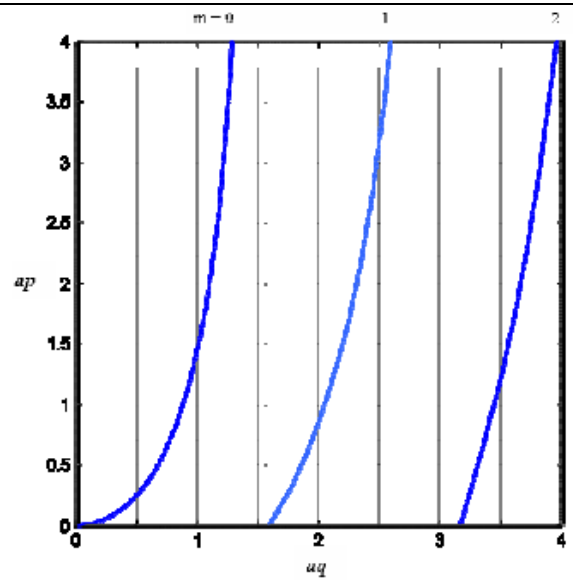
נ"ע

הפתרון

פתרון גרפי עבור אופני TE:



מוצאים את התדר המנורמל V שמייצג ישר המקביל לציר y . מנקודות החיתוך מוצאים את b ומתוכו את n_{eff} וגם את β .



מוצאים את התדר המנורמל V שמייצג מעגל במישור הנ"ל. מנקודות החיתוך של המעגל עם הקווים נמצא את p, q ומתוכם את β (מספיק אחד מהם). כשרדיוס המעגל לא חותך קו מסויים, אופן זה לא מולך.

עבור אופן TM הגרפים יותר נמוכים (על פי משוואת הע"ע) ולכן p קטן יותר והכליאה פחות טובה (כי הדעיכה מחוץ למוליך קטנה יותר). עבור מוליך לא סימטרי כל הגרף מקבל הזזה ימינה.

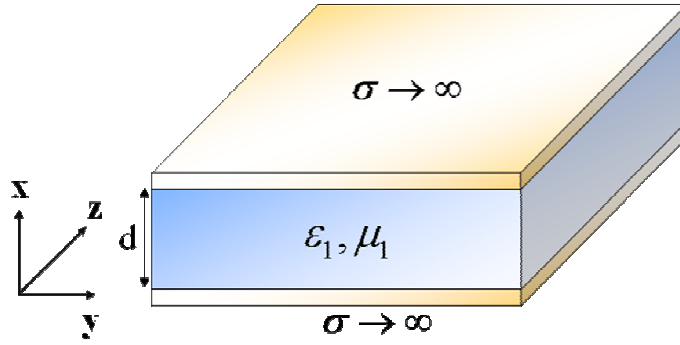
ככל ש- V קטן פחות קווים נחתכים, לכן פחות אופנים מולכים.

אופן TM $H_z = 0 \quad H_x = 0 \quad E_y = 0$		
אופן איזוגי	אופן זוגי	
$\tan(2aq) = \frac{2pq}{q^2 - p^2}$		ע"ע
$\tan(aq) = -\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{q}{p}$	$\tan(aq) = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{p}{q}$	

ב. מוליך גלים דיאלקטרי לא סימטרי

TM	TE	
$V_C = m \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \sqrt{\frac{(n_2^3 - n_3^3)}{(n_1^3 - n_2^3)}} \right)$	$V_C = m \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{(n_2^3 - n_3^3)}{(n_1^3 - n_2^3)}} \right)$	תדר קטעון אופן TE_0 לא תמיד קיים

ב. מוליך גלים בעל שפות העשויות מוליך מושלם



<p>אופן TM</p> <p>$H_z = 0 \quad H_x = 0 \quad E_y = 0$</p>	<p>אופן TE</p> <p>$E_z = 0 \quad E_x = 0 \quad H_y = 0$</p>	
$\beta_m = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \frac{m^2 \pi^2}{d^2}} = \frac{\omega}{c} n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{n_1 k_0 d}\right)^2} = \frac{\omega}{c} n_1 \cos \theta \quad m = 0, 1, 2, \dots$		<p>ערכים עצמיים</p>
<p>הצגה על ידי שדה חשמלי:</p> $\vec{E} = E_0 \left[\hat{z} \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) - j \frac{\beta_m d}{m\pi} \hat{x} \cos\left(\frac{m\pi}{d}x\right) \right] e^{-j\beta_m z}$ $H_y = -\frac{j\omega d \epsilon}{m\pi} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{d}x\right) e^{-j\beta_m z}$ <p>הצגה על ידי שדה מגנטי:</p> $H_y = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{d}x\right) e^{-j\beta_m z}$ $\vec{E} = \frac{H_0}{\omega \epsilon} \left[\hat{x} \beta_m \cos\left(\frac{m\pi}{d}x\right) + \hat{z} j \frac{m\pi}{d} \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) \right] e^{-j\beta_m z}$	<p>הצגה על ידי שדה חשמלי:</p> $E_y = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) e^{-j\beta_m z}$ $\vec{H} = \frac{E_0}{\omega \mu} \left[-\hat{x} \beta_m \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) + \hat{z} \frac{j m \pi}{d} \cos\left(\frac{m\pi}{d}x\right) \right] e^{-j\beta_m z}$ <p>הצגה על ידי שדה מגנטי:</p> $E_y = -H_0 \frac{j\omega \mu d}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) e^{-j\beta_m z}$ $\vec{H} = H_0 \left[\hat{x} \frac{j\beta_m d}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) + \hat{z} \cos\left(\frac{m\pi}{d}x\right) \right] e^{-j\beta_m z}$	<p>השדה במוליך</p>
$n_1^2 k_0^2 - \frac{m^2 \pi^2}{d^2} > 0 \Rightarrow m < \frac{n_1 k_0 d}{\pi} \quad \omega_{c,m} = \frac{m\pi c}{n_1 d}$		<p>קייטעו</p>
<p>מקדם ההתקדמות β_m תלוי בתדר הגל בצורה לא טריוויאלית – גם אם מקדמי החומר לא תלויים בתדר. נפיצה זו נגרמת ע"י מבנה מוליך הגל (עוביו וסוג תנאי השפה) ולכן נקראת נפיצה מבנית</p> $\beta_m = \sqrt{\left(\frac{n_1 \omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} = \frac{n_1 \omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,m}}{\omega}\right)^2}$		<p>דיספרסיה מבנית</p>
<p>זו נפיצה הקורית במוליכי גל רב אופניים – כאשר האות משוגר על מספר אופניים. אפילו בתדר יחיד – כל אופן מתקדם עם קבוע התקדמות שונה. נפיצה זו הינה הגורם המגביל את קצב העברת המידע למשל בסיבים אופטיים רב אופניים. תנאי מוליך גלים חד אופני: $\frac{\lambda_0}{2n_1} < d < \frac{\lambda_0}{n}$. במקרה בו נרצה להעביר הספק גבוה, נרצה מוליך רב אופני.</p>		<p>דיספרסיה אופנית</p>
$v_{p,m} = \frac{c}{n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,m}}{\omega}\right)^2}} \quad v_{g,m} = \frac{c}{n_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,m}}{\omega}\right)^2}$		<p>מהירות</p>
<p>$N = M + 1$ תמיד קיים אופן TM_0 (זהו אופן TEM)</p>	$M = \left\lfloor \frac{d}{\lambda_0 / 2n_1} \right\rfloor$	<p>$N = M$ אופן TE_0 לא קיים</p>

$$\tan^{-1} \alpha \pm \tan^{-1} \beta = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha \beta} \right)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

12. זהויות טריגונומטריות שימושיות

Del in cylindrical and spherical coordinates

Table with the del operator in cylindrical and spherical coordinates

Operaion	Cartesian coordinates (x, y, z)	Cylindrical coordinates (ρ, ϕ, z)	Spherical coordinates (r, θ, ϕ)
Definition of coordinates		$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \text{atan2}(y, x) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos(z/r) \\ \phi = \text{atan2}(y, x) \end{cases}$
	$A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$	$A_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$	$A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$
∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
$\nabla \times \mathbf{A}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{y}} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{z}}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} +$ $\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\Delta f = \nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$\Delta \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A}$	$\Delta A_x \hat{\mathbf{x}} + \Delta A_y \hat{\mathbf{y}} + \Delta A_z \hat{\mathbf{z}}$	$\left(\Delta A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $\left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\left(\Delta A_z \right) \hat{\mathbf{z}}$	$\left(\Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2A_\theta \cos \theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} +$ $\left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $\left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}$
Differential displacement	$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$
Differential normal area	$d\mathbf{S} = dydz \hat{\mathbf{x}} +$ $dx dz \hat{\mathbf{y}} +$ $dx dy \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $d\rho dz \hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\rho d\rho d\phi \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} +$ $r \sin \theta dr d\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $r dr d\theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$
Differential volume	$dv = dx dy dz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Non-trivial calculation rules:

1. $\text{div grad } f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f$ (Laplacian)
2. $\text{curl grad } f = \nabla \times (\nabla f) = 0$
3. $\text{div curl } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
4. $\text{curl curl } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
5. $\Delta f g = f \Delta g + 2 \nabla f \cdot \nabla g + g \Delta f$
6. Lagrange's formula for the cross product:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

- Note: This page uses standard physics notation; some (American mathematics) sources define θ , as the angle with the xy -plane instead of ϕ .
- Note: The function $\text{atan2}(y, x)$ is used instead of the mathematical function $\arctan(y/x)$ due to its domain and image. The classical $\arctan(y/x)$ has an image of $(-\pi/2, +\pi/2)$, whereas $\text{atan2}(y, x)$ is defined to have an image of $(-\pi, \pi]$.