דיברגנט עבור מרחב הכולל רק מטען נקודת בראשית, כלומר $\vec{E}=-\frac{q}{r^2}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S \vec{E}d\vec{a}=4\pi q\delta\left(r\right)$$

משוואות מקסוול – רישום זמני (דיפרנציאלי אינאגרלי)

פרדיי - $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ $\qquad$ $\oint_C \vec{E}d\vec{\ell}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$

אמפר - $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}+\vec{J}$ $\qquad$ $\oint_C \vec{H}d\vec{\ell}=\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{a}+\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{a}$

גאוס - $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$ $\qquad$ $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{a}=\iiint_V \rho dv$

רציפות האינדוקציה המגנטית - $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ $\qquad$ $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}=0$

$$\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2},\quad \eta=\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

בחומר טכני פשוט :

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E},\qquad \vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}$$

חוק אוהם :

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

משוואות מקסוול – רישום פאזורי

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}}=-j\omega\underline{\vec{B}}$$
$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}}=j\omega\underline{\vec{D}}+\underline{\vec{J}}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{D}}=\underline{\rho}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{B}}=0$$

משוואת הגלים הכללית ? : $\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=0$

חוק שימור המטען החשמלי (משוואות הרציפות) :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$
$$\oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{a}+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dv=0$$

תנאי השפה בהקשר חוק שימור המטען:

$$\vec{1}_n \cdot \left(\vec{J}_{out} - \vec{J}_{in} \right) + \vec{\nabla}_{\perp} \vec{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

תנאי השפה בהקשר חוק שימור המטען, בקואורדינאטות פולאריות, עבור z קבוע:

$$\begin{aligned} & x_1 = r, \quad x_2 = \varphi \\ \Rightarrow \; & \Delta\ell_1 = \Delta r, \qquad \Delta\ell_2 = r\Delta\varphi \\ \Rightarrow \; & h_1 = 1, \qquad h_2 = r \\ \Rightarrow \; & \vec{\nabla}_{\perp} \vec{J}_s = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\vec{J}_s \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{J}_s \right) \end{aligned}$$

תנאי שפה

$$\vec{1}_n \cdot \left(\vec{D}_{out} - \vec{D}_{in} \right) = \rho_s$$

$$\vec{1}_n \cdot \left(\vec{B}_{out} - \vec{B}_{in} \right) = 0$$

$$\vec{1}_n \times \left(\vec{H}_{out} - \vec{H}_{in} \right) = \vec{J}_s$$

$$\vec{1}_n \times \left(\vec{E}_{out} - \vec{E}_{in} \right) = 0$$

רציפות השדה החשמלי המשיקי

$$\vec{1}_n \times \left(\vec{E}_{out} - \vec{E}_{in} \right) = 0$$

שקול לדרישת רציפות הפוטנציאל החשמלי.
על חומרים דיאלקטרים, לא מצטבר מטען משטחי, ולכן בתווך שמורכב מכמה מקדמים דיאלקטרים יש לדרוש רציפות אינדוקציה חשמלית ניצבת.

פתרונות פוטנציאלים חשמליים

קרטזיות:

טריביאלי

$$u(x,y,z)=(Ax+B)(Cy+D)(Ez+F)$$

לא טריביאלי

$$\pm k_x^2 \pm k_y^2 \pm k_z^2 = 0$$

$$u(x,y,z)\sim\begin{Bmatrix}\sin k_x x\\ \cos k_x x\\ e^{\pm k_x x}\\ \sinh k_x x\\ \cosh k_x x\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\sin k_y y\\ \cos k_y y\\ e^{\pm k_y x}\\ \sinh k_y y\\ \cosh k_y y\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\sin k_z z\\ \cos k_z z\\ e^{\pm k_z z}\\ \sinh k_z z\\ \cosh k_z z\end{Bmatrix}$$

פולאריות:

טריביאלי

$$u(r,\varphi,z)=(A+B\varphi)(C+D\ln r)$$

לא טריביאלי

$$u(r,\varphi,z)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)(C_n r^n+D_n r^{-n})$$

כדוריות:

טריביאלי

$$u(r,\theta,\varphi)=\left(A+\frac{\mathrm{B}}{r}\right)\left(C+D\ln\tan\frac{\theta}{2}\right)(E\varphi+F)$$

לא טריביאלי

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n,m}\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n^m(\cos\theta)(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi)$$

פולינומי לג'נדר:

$$P_0^0=1$$

$$P_1^0=\cos\theta,\qquad P_1^1=\sin\theta$$

$$P_2^0=\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right),\quad P_2^1=\frac{3}{2}\sin 2\theta,\quad P_2^2=$$

משפט פוינטינג

וקטור פוינטינג ברישומו הזמני (צפיפות הספק, ליחידת שטח):

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\left[\frac{V}{m}\cdot\frac{A}{m}\right]=\vec{E}\times\vec{H}\left[\frac{W}{m^2}\right]$$

משפט פוינטינג ברישום דיפרנציאלי:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S}+\frac{\partial}{\partial t}\left(w_e+w_m\right)=-\vec{J}\cdot\vec{E}$$

משפט פוינטינג ברישום אינטגרלי:

$$\oiint_A \vec{S}\cdot d\vec{a}+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(w_e+w_m\right)dv=-\iiint_V \vec{J}\cdot\vec{E}dv$$

כאשר $w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ צפיפות האנרגיה החשמלית, ו $w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ צפיפות האנרגיה המגנטית.

וקטור פוינטינג המרוכב:

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*$$

נדגיש כי וקטור פוינטינג המרוכב אינו פאזור, אלא מכפלה של שני פאזורים. כלומר, כדי לקבל את וקטור פוינטינג במישור הזמן, יש לחשבו בנפרד.

משפט פוינטינג המרוכב ברישום דיפרנציאלי:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S}+2j\omega\left(\left\langle w_m\right\rangle-\left\langle w_e\right\rangle\right)=-\frac{1}{2}\underline{\vec{J}}^*\cdot\underline{\vec{E}}$$

משפט פוינטינג המרוכב ברישום דיפרנציאלי:

$$\oiint_A \vec{S}\cdot d\vec{a}+2j\omega\left(\iiint_V\left\langle w_m\right\rangle dv-\iiint_V\left\langle w_e\right\rangle dv\right)=-\frac{1}{2}\iiint_V\underline{\vec{J}}^*\cdot\underline{\vec{E}}dv$$

כאשר $\left\langle w_e\right\rangle=\frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}}^*$ צפיפות האנרגיה החשמלית הממוצעת, ו $\left\langle w_m\right\rangle=\frac{1}{4}\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}}^*$ צפיפות האנרגיה המגנטית הממוצעת.

קווזי סטטיקה

התנאי לקווזי סטטיקה: $l_c\ll\frac{2\pi c}{\omega}$ - l_c גודל אופייני של ההתקן.

במשטר EQS מתקיים: $\frac{\left\langle w_m\right\rangle}{\left\langle w_e\right\rangle}\ll 1$, $\nabla\times\vec{E}=0$ (בד"כ $\mu\to 0$).

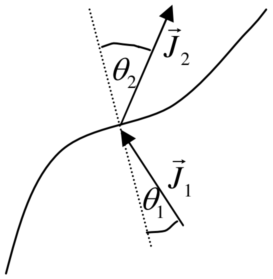
במשטר MQS מתקיים: $\frac{\left\langle w_e\right\rangle}{\left\langle w_m\right\rangle}\ll 1$, $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$ (בד"כ $\varepsilon\to 0$).

בשדה זרימה סטציונרי מתקיים:

1. $\varepsilon\omega\ll\sigma\ \Rightarrow\ \omega\left\langle w_e\right\rangle\ll\sigma\left|\underline{\vec{E}}\right|^2$ (הפסדים נמוכים)
2. $\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}=\delta\gg a\ \Rightarrow\ \omega\left\langle w_m\right\rangle\ll\sigma\left|\underline{\vec{E}}\right|^2$

כאשר a גודל אופייני של חתך ההתקן הניצב לכיוון הזרימה.

3. $\vec{1}_n\cdot\left(\vec{J}_1-\vec{J}_2\right)=0$ (ובד"כ מתקיים $\vec{J}=\sigma\vec{E}$).



שדות חשמליים בחומר

משוואות מקסוול – רישום זמני

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{H}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{J}_{free}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\mu_0\vec{H}\right) = 0$$

כאשר וקטור האינדוקציה החשמלית:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{P}\left[\tfrac{Cb}{m^2}\right]$$

ובחומר טכני פשוט:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\underbrace{\left(\varepsilon_r - 1\right)}_{\chi}\vec{E} \triangleq \varepsilon_0\vec{E} + \chi\varepsilon_0\vec{P}$$

ניתן להגדיר את הגדלים:

צפיפות מטען קיטוב נפחית:

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

צפיפות מטען קיטוב משטחית:

$$\rho_{sp} = -\vec{1}_n\cdot\left(\vec{P}_{out} - \vec{P}_{in}\right)$$

צפיפות זרם קיטוב נפחית:

$$\vec{J}_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

גלים מישוריים

משוואות מקסוול במרחב חופשי חסר מקורות, בכתיב פאזורי:

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}} = -j\omega\mu_0\underline{\vec{H}}$$

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_0\underline{\vec{E}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\varepsilon_0\underline{\vec{E}} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$$

וממשוואות אלו מגיעים למשוואות הגלים ההומוגניות עבור השדות:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{H} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\vec{H} = 0$$

אחד הפתרונות של המשוואה הוא גל מישורי:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

כאשר $\vec{k}$ וקטור הגל:

$$\vec{k} = k_x\vec{1}_x + k_y\vec{1}_y + k_z\vec{1}_z, \qquad k = \left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}\left[\frac{1}{m}\right]$$

ובאופן כללי: $k = \left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r} = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\left[\frac{1}{m}\right]$

ו- $\vec{E}_0$ וקטור האמפליטודות.

אורך הגל הוא:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}\left[m\right]$$

השדה המגנטי במקרה זה יהיה

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_0}\vec{1}_k \times \vec{E}, \qquad \eta_0 \triangleq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\left[\Omega\right]$$

ובאופן דואלי, מכיוון ש $\vec{E},\vec{H},\vec{k}$ שלשה ימנית :

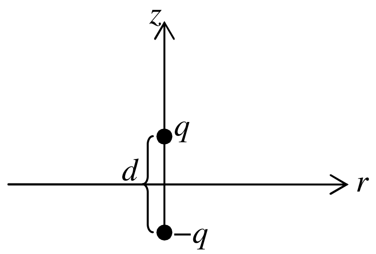
$$\vec{E} = \eta_0 \vec{H} \times \vec{1}_k$$

וקטור פוינטינג הממוצע בזמן :

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_0\right|^2}{\eta_0}\vec{1}_k = \frac{1}{2}\eta_0\left|\vec{H}_0\right|^2\vec{1}_k$$

נספח :

<u>פוטנציאל של דיפול חשמלי</u>, כאשר $r >> d$:



$$\varphi\left(r,\theta\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r}, \quad p = \left|\vec{p}\right| = \left|qd\vec{1}_z\right| = qd$$

<u>משוואת לפלס :</u> $\nabla^2\phi = 0$

בקואורדינאטות פולאריות (אחרי הפרדת משתנים) :

$$\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{R} + \frac{\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}}{\Phi} + \frac{\frac{d^2Z}{dz^2}}{Z} = 0$$

בקואורדינאטות כדוריות :

$$\frac{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R} + \frac{\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)}{\Theta} + \frac{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}}{\Phi} = 0$$

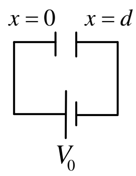
תזכורת פוטנציאלים חשמליים/מגנטיים וקטוריים/סקלריים וסימוניהם :

$$\begin{cases}\vec{H} = -\nabla\phi_m \\ \vec{B} = \nabla\times\vec{A}\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{E} = -\nabla\phi \\ \vec{D} = -\nabla\times\vec{C}\end{cases}$$

כיול לורנץ : $\nabla\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$

כיול כולון : $\nabla\vec{A} = 0$

סימון :



$$\int_0^d E_x \cdot dx = V_0$$