100 טיפים באותות ומערכות

* הטיפים מגיעים ממבחנים, בחנים הרצאות ותרגולים, ורלוונטיים לחלק הראשון של הקורס כפי שנלמד בסמסטר אביב 2007. אוסף זה מיועד לחידוד ההבנה לפני המבחן ושינון של טעויות נפוצות שכולנו עשינו ו/או נעשה.... נדרשת הבנה סבירה של החומר בקורס כדי לנצל אוסף זה בצורה אופטימלית. בכל מקרה, עבדתי הרבה על בדיקת נכונות של כל הטיפים אך אין אני מתחייב על כך. מומלץ לבדוק בעצמכם!

1. טור פורייה של $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mp)$ (רכב הלמים בזמן) הוא $\frac{1}{p}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi kFT}$.
2. מהפתרון ההומוגני הכללי של מד"ר ניתן לראות שאם החלק הממשי של אחד השורשים של הפולינום האופייני הוא חיובי, האקספוננט יתפוצץ עם הזמן והמערכת לא יציבה!
3. הפתרון הפרטי $y_p(t)$ של המשוואה $Q(D)y_p(t)=P(D)u(t)$ (משוואה שמגיעה מ-$Q(D)(y_h(t)+y_p(t))=P(D)u(t)$) הוא צירוף ליניארי של $u(t)$ ונגזרותיו.
4. אם אות הכניסה הוא e^{j3t} אזי התגובה היא: $H(3j)e^{j3t}$ ולא $H(3)e^{j3t}$!
5. $y_p(t)=\frac{1}{2}(H(j3)e^{j3t}+H(-j3)e^{-j3t})$ שני האיברים בסוגריים הם צמודים קומפלקסיים (כי $\overline{H(j3)}=H(-j3)$ תמיד!) לכן $y_p(t)=Re\{H(j3)e^{j3t}\}=|H(j3)|\cos(3t+\angle H(j3))$.
6. גם אם השורשים של הפ"א הם מרוכבים הפתרון ההומוגני הוא סכום של אקספוננטים שהמעריך הוא מספר מרוכב כפול t. כעת ניתן לפרק לקוסינוסים וסינוסים...
7. כניסת DC זה כמו כניסה של אקספוננט עם מעריך אפס, כפול **קבוע**, לכן היציאה היא **הקבוע** כפול פונקצית התמסורת באפס.
8. $2\cos(3t+\frac{\pi}{3})$ זה כניסת אות עצמי. לזכור שהתגובה תהיה: $e^{j\frac{\pi}{3}}H(3j)e^{j3t}+e^{-j\frac{\pi}{3}}H(3j)e^{-j3t}$. לשים לב לפאזה...
9. מערכת ממשית עם אות כניסה ממשית = אות יציאה ממשי!
10. גם במשוואות הפרש יש חשיבות רבה לשורשים של הפולינום האופייני, למשל אם **הערך המוחלט** של אחד משורשיו **גדול מאחד**, אז $y_h(nT)$ יתבדר עם הזמן (בהנחה שהמקדם המתאים אינו אפס- כלומר שזה מופיע בפתרון ההומוגני). אינטואיציה: הפתרון הוא סכום של כאלה: $c\lambda_1^n$ אזי אם הבסיס גדול בערך מוחלט מאחד הוא ישאף לאינסוף עם הזמן!
11. חשוב: λ^n מכיל בתוכו את האינפורמציה על $\tilde{\lambda}^{nT}$ כשהאחרון הוא הפתרון ההומוגני המוצע. בהחלפת $\tilde{\lambda}^{nT}=\lambda^n$ בדרישה שמקיים הפתרון ההומוגני הפתרון מכיל את ה-T האבוד...

12. במשוואות הפרש לפעמים ניתן לפתור באיטרציות. נתונים כמו כניסת הלם או מנוחה התחלתית מאוד עוזרים כי יש מאיפה להתחיל.

13. $x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jw_0nt}+x(t)=x(t)\sum_{n=0}^{\infty}e^{jw_0nt}+x(t)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-jw_0nt}$ n=0 נספר פעמיים!

14. התמרה של cos היא 1/2 כפול שתי דלתות. לא לשכוח את החצי!

15. להפריך ליניאריות ניתן לקצר בעזרת תכונות ההומוגניות או כפל בסקלר. לבחור אחד באינטואיציה.

16. אם המערכת מוציאה אפס בתנאי כלשהו רוב הסיכוי שלא ניתן יהיה לשחזר את מי שהיא איפסה ← אין הפיכות.

17. לזכור שאם יש שלושה איברים בקונוולוציה ניתן להחליף את הסדר ביניהם.

18. לא תמיד ניתוח עם התמרות עבור חיבור בטור הוא הפתרון המהיר. לפעמים משחקים עם תכונות הקונוולוציה יותר קלים.

19. קונבולוציה עם דלתא מחזירה את אות הכניסה. קונוולוציה עם דלתא מוזזת- מזיזה אותו.

20. (לפלס) לפני שקובעים תחום התכנסות של התמרה של אות להביא את ההתמרה לצורה של שבר- מונה ומכנה ולמצוא קטבים (ולהיעזר בנתונים אם יש).

21. **לא** LTI← אי אפשר להשתמש במאפיין "תגובה להלם" לפחות לא במובן של ייצוג המערכת כ- x*h...

22. $x(t)=3\sin(19\pi t-\frac{\pi}{3})\div 2\cos(10\pi t+\frac{\pi}{6})$. מהו זמן המחזור של האות?

SIN-ו COS מחזוריות 2π. צריך למצוא את Tהקטן ביותר עבורו: $x(t+T)=x(t)$. עבור הסינוס $T=\frac{2}{19}$ יוסיף 2π בתוך הסינוס והוא ישלים מחזור אחד. עבור הקוסינוס: $T=\frac{2}{10}$. כעת צריך למצוא T' עבורו שני האותות בדיוק סיימו מחזור. זה יקרה בזמן הראשון בו סכום של X זמני מחזור של סינוס יהיה שווה לסכום של Y זמני מחזור של קוסינוס. ברור שזה יקרה עבור 19 מחזורים לסינוס ו-10 לקוסינוס. כלומר לאחר 2 שניות שני האותות ישלימו מחזורים שלמים כך שבאותה נקודת זמן $x(t+2)=x(t)$ לכן 2 הוא זמן המחזור.

23. אנרגיה של אות: $E(y(t))=\int_{-\infty}^{\infty}\left|y(t)\right|^2dt$

24. $y(t)=tx(t)$ לא קבועה בזמן.

25. $u[n]-u[n-1]=\delta[n]$. לכן אם נתונה התגובה למדרגה ב- LTI g[n] אזי:

$$h[n]=g[n]-g[n-1]$$

26. תגובת **מערכת קבועה בזמן** לאות מחזורי הינה אות מחזורי.

27. לכן גם תגובת LTI לאות מחזורי היא אות מחזורי (הוכחה עם הקונבולוציה).

28. האות $y[n]=x[n]*\sum_{-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$ הוא מחזורי במחזור N! בגלל שזה סכום אינסופי, האות בזמן n+N הוא בדיוק אותו סכום אינסופי כמו זמן n.
29. שיקולי זוגיות ואי זוגיות בקונוולוציה של שני אותות זהים לאלה של מכפלה של שני האותות.
30. תמיד לנסות להגיע לקונוולוציה עם דלתא ← זה רק הזזה, אם בכלל.
31. האות $x[n]=\cos(2\pi fn)$ מחזורי **אם ורק אם** f רציונאלי.
32. אם היציאה היא אינטגרל של אות הכניסה כאשר הגבולות תלויים בזמן, אז יש חשש לחוסר סיבתיות! מה אם הגבול הוא בזמן עתידי?
33. מערכת ה"ערך המוחלט" היא לא ליניארית, לא הפיכה וכן קבועה בזמן.
34. $x(2-t)$ לא קבוע בזמן! בגלל המינוס...
35. $x(\frac{t}{3})$ לא סיבתית. לחשוב על זמן שלילי...
36. בזמן רציף: יציבות אסימפטוטית- כל הקטבים בחצי המישור השמאלי.
37. BIBO- סדר מונה קטן שווה מכנה, וגם קטבים בחצי מישור שמאלי.
38. לא BIBO ← לא אסימפטוטית.
39. לא אסימפטוטית- רק אם אין צמצומים של קטבים (וסדר מונה קטן שווה סדר מכנה) ← לא BIBO.
40. לשים לב: אם תגובת הלם של מערכת היא δ' או δ'' וכו' זה כמו לגזור. גזירה- צורכת זכרון. גזירה גם גוררת חוסר יציבות BIBO!
41. $\sin c(t)*\sin c(t)$ זה מכפלה של חלונות בתדר.
42. קונבולוציה של שני חלונות זהים בזמן נותנת משולש. זה בנפרד מההערה הקודמת!
43. כל מערכת **ליניארית** ניתנת לתיאור כמערכת גרעין.
44. **הלם** בזמן k (להבדיל מפולס-מדרגה): $\delta(n-k)$.
45. $h(t)*x'(t)=[h(t)*x(t)]'=y'(t)$
46. **ב-LTI** מתכונות הקונבולוציה נקבל שהתגובה להלם היא נגזרת התגובה למדרגה.
47. אם רוצים את התגובה למדרגה: $g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$.
48. נניח התגובה ל**מדרגה** היא : $g(t)=\begin{cases} t & |t|\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$. התגובה להלם:

$$g(t)=t\bullet[u(t+1)-u(t-1)]$$
$$h(t)=g'(t)=u(t+1)+t\delta(t+1)-u(t-1)-t\delta(t-1)=[u(t+1)-u(t-1)]-[\delta(t+1)+\delta(t-1)]$$

(כי $t\delta(t+1)=t|_{t=-1}\,\delta(t+1)=-\delta(t+1)$)... זה חלון ושתי דלתות.

49. בסכום $\sum_{m=0}^{n}$ יש n+1 איברים!!!

50. בחישוב קונבולוציה עם פונ' מדרגה: להפריד לתחומים. לא לשכוח לשים לב לגבולות.

51. אם נתון אינטגרל ורוצים להביאו לקונבולוציה צריך להרחיב את הגבולות ל- $\infty, -\infty$!

52. אם x(t) מחזורי במחזור T אז גם y=x*h מחזורי באותו מחזור.

53. מערכת LTI שהתגובה להלם שלה היא מדרגה לא יציבה BIBO! לא מתקיים התנאי עם האינטגרל (הדורש פונ' לא מוכללת כמו למשל מדרגה☺)...

54. מערכת ליניארית- במנוחה התחלתית.

55. לינארית גורר $\Phi(0)=0$, כלומר IAR

56. רות' הורוביץ:

-מנרמלים כך ש- $a_0 > 0$

-בודקים $a_i > 0$ לכל i (תנאי הכרחי שכל השורשים בחצי מישור שמאלי אבל לא מספיק).

-בונים את הטבלה

-אם איברי העמודה הראשונה כולם גדולים מאפס...

57. רות' הורוביץ זה ליציבות אסימפטוטית.

58. $$\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)u(n-m) = \sum_{m=0}^{\infty} u(n-m) = u(n)\sum_{m=0}^{n} 1 = u(n)[n+1]$$

59. קורלציה: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau = x(t) * x(-t)$. פעולה זו מוגדרת עבור כל אות בעל אנרגיה סופית.

60. $y(t) = x(t) * x(-t)$ לא סיבתית ולא קבועה בזמן.

$$x(t+T) * x(-[t+T]) \neq x(t+T) * x(-t+T)$$

61. פונקצית גרעין של מערכת (**לינארית** לא בהכרח LTI) היא **התגובה בזמן n לפולס כניסה בזמן k**

$y[n] = (-1)^n x[n] \rightarrow h(n,k) = (-1)^n \Delta[n-k]$ ניתן לראות שמקרה זה לא LTI...

62. חיבור בטור של LTI נותן $h_3 = h_1 * h_2$ (זו התגובה להלם של המערכת החדשה).

63. חיבור במקביל של LTI נותן: $h_3 = h_1 + h_2$.

64. התנאי על סופיות האינטגרל על תגובה להלם כדי לקבל יציבות BIBO נכון רק אם h **לא פונ' מוכללת!**

65. עבור מערכת קונבולוציה, יציבות BIBO שקולה לתנאי כי קיים קבוע B עבורו $\|y\|_\infty \le B \bullet \|x\|_\infty$

66. $(-1) \bmod p = p-1 \;,\; (-3) \bmod 4 = 1$

67. כל פונקציה ניתנת לפירוק כסכום של פונ' זוגית ואי זוגית:

$$f(x)=f_o(x)+f_e(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

68. קונבולוציה ציקלית היא במחזור P של הכניסה ולא של התגובה להלם! זאת מכיוון שהיציאה מחזורית באותו מחזור כמו הכניסה.
69. נותנים אות כניסה ויציאה מחזוריים. רוצים לדעת אם LTI יכול לממש. היציאה חייבת להיות באותו מחזור של הכניסה! לשחק עם כפולות שלמות של המחזורים כדי לקבל התאמה. אם הצלחנו- LTI יכול לממש (בעזרת דלתות למשל).
70. שלושה קטבים בתדר: או שניים קומפלקסים ואחד פשוט או שלושה פשוטים (תלוי בנתונים על הגבר אמיתי ופאזה).
71. מד"ר עם x(t) ונגזרותיו ו- x(t-1) ונגזרותיו, ניתן להפריד כסכום של שתי כניסות (האחד x והשני x מוזז). הפתרון יהיה סופרפוזיציה של הפתרונות.
72. בשרשור מערכות (שלא כולן בהכרח לינאריות!) לשים לב לזמן שבו מבקשים את היציאה- אולי מערכת לא ליניארית הופכת לחוט... לשים לב אם נוח יותר לעשות קונבולוציה בין תגובות הלם של 2 מערכות LTI משורשרות ואז לעשות קונבולוציה עם הכניסה...
73. $u(t)*\delta''(t)=[u(t)*\delta(t)]''=u''(t)=\delta'(t)$
74. אות ממשי וזוגי- מקדמי פורייה ממשיים וזוגיים.
75. אם המערכת היא קונבולוציה בזמן בדיד של אות כניסה ותגובה להלם ברור שהיא בעלת זיכרון (הסכום מכיל את x בכל הזמנים עד עכשיו).
76. משפט: $(a,b)*(c,d)\to(a+c,b+d)$
77. לכן, אם אני יודע את התמך בכניסה ואת התמך של התגובה להלם ניתן למצוא ע"י משוואה עם נעלם אחד את התמך של היציאה! (לשים לב שתמך של **יציאה**+תמך של **כניסה לא מחייב שום דבר**.... התגובה להלם גם יכולה להיות עם תמך אינסופי)
78. בהתייחס להערה הקודמת- לשים לב אם יש לנו חופש בחירה (למשל **לבחור** את התגובה להלם להיות בעלת תמך סופי).
79. $h[n]=\begin{cases}1 & n\in\{1,2\}\\ -1 & n\in\{-2,-1\}\\ 0 & else\end{cases}$ h בעל תמך 5 ולא 4!!!!! (מה עם n=0...)...
80. אלגוריתם לקונבולוציה ציקלית בזמן בדיד:

-נתון אות כניסה במחזור P

-h כלשהו צריך ליצור את $h_{per}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-kp)$

- $h_{per}[n]$ מחזורי מחזור P כמו x!

- $H_{per}[n]$ שווה **למחזור אחד** של $h_{per}[n]$.

-ועכשיו- להפוך ולעשות קונבולוציה ציקלית (כל מה שלא חופף מימין מגיע שוב משמאל)

81. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda(n-kp)$ זה אות מחזורי של דלתות. מחזור P כלומר דלתא כל P! יש הרבה אפסים באמצע...

82. נגזרת של פונקציה לא רציפה בנקודת אי-רציפות זה הקפיצה כפול דלתא.

83. אם הפונקציה רציפה (כמו ערך מוחלט ב-0) אז הקפיצה אפס...

84. רוצים לפתח טור פורייה של $x(t)$ (משהו מחזורי ומסובך....) אבל הרבה יותר קל (תלוי ב $x(t)$ כמובן) למצוא את טור פורייה של $w(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ ולעשות אינטגרל (אגב- לשים לב לרציפות בחיבור בין שני מחזורים).

85. תגובה להלם שמקיימת $f[n]=a^n f[-n]$ לא חייבת להיות זהותית אפס כדי להיות סיבתית! אם a=1 ו- $h=\delta$ התנאי מתקיים.

86. מערכת המתוארת ע"י מד"ר (עם מקדמים קבועים!, מספר הגזירות של y גדול שווה למספר הגזירות של x כרגיל וכו') הנמצאת המנוחה התחלתית מתארת מערכת בעלת זיכרון ליניארית סיבתית וקבועה בזמן שאיננה בהכרח הפיכה.

87. מערכת גרעין היא סיבתית אם ורק אם לכל t מתקיים: $\int_{t^+}^{\infty} |K(t,s)|\,ds=0$.

88. לפתרון מד"ר: $\frac{dy(t)}{dt}+p(t)y(t)=q(t)x(t) \longrightarrow y(t)=e^{-\int p(t)dt}\int_{-\infty}^{t} q(\tau)x(\tau)e^{\int p(\tau)d\tau}d\tau$.

89. נתונה מכפלה של שני אותות מחזוריים במחזורים P ו-Q. רוצים למצוא זמן מחזור של האות החדש. נמצא את השלמים הקטנים ביותר שמקיימים nP=kQ וזה זמן המחזור החדש!

90. **דוגמא:** $\cos(\frac{2\pi}{T}t)$ מחזורי במחזור T. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{21}{20}Tn)$ מחזורי מחזור של $\frac{21}{20}T$. נמצא את השלמים הקטנים ביותר המקיימים: $[\frac{21}{20}T]n=[T]k \rightarrow 21n=20k \rightarrow \begin{matrix} k=21 \\ n=20 \end{matrix}$. לכן המחזור של האות החדש הוא $kT=21T$.

91. אם אות הכניסה (למד"ר) u(t) הוא $e^{\alpha t}$ ו- α הוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי m הפתרון הפרטי יהיה מהצורה $y_p(t)=t^m Be^{\alpha t}$ B קבוע. נובע שיש תמיד למצוא את הפתרון ההומוגני לפני הפרטי!

92. במשוואות הפרש **להתעלם** מ-nT, להציב T=1, לפתור, והפתרון יהיה y[**nT**].

93. מתקיים: $e^t\delta(t)=\delta(t)$ **אבל לא מתקיים**: $e^t\delta'(t)=\delta'(t)$ (כלומר $e^t\delta'(t)\neq\delta'(t)$. ניתן להוכיח עם פונ' בוחן).

.94 $h[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ -1 & n=1\\ 0 & else\end{cases}$ $\leftarrow$ $h[n]=\Delta[n]-\Delta[n-1]$. לכן כל קונבולוציה עם h היא פשוט האות פחות הזזה שלו.

.95 $y(t)=\begin{cases}1 & x(t)\geq 0.5\\ 0 & x(t)<0.5\end{cases}$ זו מערכת **לא** ליניארית (חסומה) **וכן** קבועה בזמן.

.96 אופרטור ההזזה (או השהייה) קומוטטיבי בקונבולוציה. כלומר:

$h_1[n]*h_1[n-1]=\{h_1*h_1\}[n-1]$.

.97 הזזה של $e^{j2\pi ft}$ **בזמן** ב- θ שקול לכפל באקספוננט $e^{j2\pi f\theta}$ **בזמן**! כלומר:

$$e^{j2\pi f(t+\theta)}=e^{j2\pi ft}e^{j2\pi f\theta}$$

.98 המערכת $y(t)=a\int_{-\infty}^{t}[x(s)-x(s-5)]ds$ ליניארית, **קבועה בזמן** סיבתית ובעלת זיכרון.

.99 נגדיר $\eta_f(t)=e^{j2\pi ft}$.

<u>משפט ההתחזות</u>- על ציר הזמן $\mathbb{Z}(T)$ מתקיים $\eta_f=\eta_{f+\frac{k}{T}}$.

[למשל אם T=2 אז $\eta_{17}=\eta_{17.5}$ אבל $\eta_{17}\neq\eta_{17.25}$]

הוכחה: $\eta_{f+\frac{k}{T}}(t)=e^{j2\pi(f+\frac{k}{T})t}=e^{j2\pi ft}e^{j2\pi\frac{k}{T}t}$ ואם נציב t=nT כאשר $n\in\mathbb{Z}$, אז:

$$\eta_{f+\frac{k}{T}}(nT)=e^{j2\pi(f+\frac{k}{T})nT}=e^{j2\pi fnT}e^{j2\pi\frac{k}{T}nT}=e^{j2\pi fnT}=\eta_f(nT).$$

.100 האות ההרמוני $\eta_f(t)$ ($f\in\mathbb{R}$) **מחזורי על הציר** $\mathbb{Z}(T)$ (T>0) **אמ"מ** f הוא **מכפלה רציונלית** של $\frac{1}{T}$. [כלומר אמ"מ קיימים p ו- q שלמים כך ש- $f=\frac{p}{q}\frac{1}{T}$].

דוגמא: $\eta_{-\frac{2}{3}}$ מחזורי על $\mathbb{Z}(\frac{1}{5})$ כי q=-15 ו- p=2 כך ש- $-\frac{2}{3}=\frac{p}{q}\frac{1}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{-15}5$.

בהצלחה!!!! ☺