אותות ומערכות

044130

סיכום הקורס

תוכן עניינים

מבוא

סיווג אותות

סיווג האות $x(t)$	הגדרה בזמן רציף	הגדרה בזמן בדיד
חד-צדדי ימני (סיבתי)	$\exists t_0,\ \forall t<t_0 : x(t)=0$	$\exists n_0,\ \forall n<n_0 : x[n]=0$
חד-צדדי שמאלי (אנטי-סיבתי)	$\exists t_0,\ \forall t>t_0 : x(t)=0$	$\exists n_0,\ \forall n>n_0 : x[n]=0$
זוגי (סימטרי)	$x(t)=x(-t)$	$x[n]=x[-n]$
אי-זוגי (אנטי-סימטרי)	$x(t)=-x(-t)$	$x[n]=-x[-n]$
מחזורי	$\exists T,\ \forall t : x(t+T)=x(t)$	$\exists N,\ \forall n : x[n+N]=x[n]$

כל אות ניתן להצגה כסכום של אות זוגי ואות אי-זוגי. נגדיר את החלק הזוגי וחלק האי-זוגי:

$$x_{even}(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2},\qquad x_{odd}(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

ולכן מתקיים:

$$x(t)=x_{even}(t)+x_{odd}(t)$$

טרנספורמציות על אותות

פעולה על האות $x(t)$	תוצאה
שיקוף (ביחס לציר האנכי)	$x(-t)$
שינוי קנה מידה (Scaling) כיווץ עבור $\lvert a\rvert>1$ מתיחה עבור $\lvert a\rvert<1$	$x(at)$
הזזה בזמן	$x(t+\theta)\triangleq\sigma^{\theta}(x(t))$
דגימה בזמן מחזור T לאות בדיד	$y[n]=x(nT)$
דגימה בתדר זוויתי ω_0 לאות בדיד	$y[n]=x\left(n\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$
דגימה בתדר f לאות בדיד	$y[n]=x\left(n\frac{1}{f}\right)$

מרחבים וקטוריים ונורמות

הגדרות:

1. מרחב נקרא ליניארי אם"ם לכל זוג אותות x,y וקבועים a,b גם האות $ax+by$ הינו אות במרחב זה.
2. מרחב נורמה הינו מרחב ליניארי שבו מוגדרת פעולת הנורמה:
3. פעולת הנורמה מקיימת את התנאים הבאים:
   א. הנורמה של x : $\|x\|=0$ אם"ם $x=0$.
   ב. לכל קבוע a : $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$.
   ג. מתקיים אי שוויון המשולש : $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

מכפלה פנימית בין שני אותות במרחב הנורמה:

$$\langle f,g\rangle\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g^{*}(t)dt$$

אי-שוויון קושי-שוורץ :

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \le \|x\|_2 \|y\|_2 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \left|x(t)\, y(t)\right| dt \le \sqrt{\int_a^b \left|x(t)\right|^2 dt}\sqrt{\int_a^b \left|y(t)\right|^2 dt}$$

הגדרות נורמות :

עבור מספר $n \in \mathbb{N}$ ואות $f(t)$, נגדיר נורמה מסדר n ע״י :

$$\|f\|_n = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^n dt\right)^{\frac{1}{n}}$$

הגדרה :

אות שייך למרחב $L_n[a,b]$, כלומר $f(t) \in L_p[a,b]$, אם $\|f\|_n = \left(\int_a^b \left|f(t)\right|^n dt\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$.

נורמה מסדר אינסופי תוגדר כך :

$$\|f\|_\infty \triangleq \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|f(t)\right|$$

עבור נורמה מסדר 2, נקבל את הגדרת האנרגיה של אות :

$$E_f = \|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt$$

טענה : אם $x \in L_2$ על קטע סופי, אזי $x \in L_1$ על אותו הקטע.

סיווג מערכות

עבור מערכת מיפוי כניסה יציאה ($IOM - Input\ Output\ Mapping$), Ψ , אשר כניסתה $x(t)$ ויציאתה $y(t)$ נקבע את התכונות הבאות :

מנוחה התחלתית

הגדרה :

מערכת תהיה במנוחה התחלתית אם תגובתה לאות ימני היא אפס עד תחילת הכניסה.
כלומר, אם אות הכניסה למערכת מקיים $\forall t < t_0 : x(t) = 0$, אזי המערכת תהיה במנוחה התחלתית אם אות המוצא מקיים $\forall t < t_0 :\ y(t) = 0$.

ליניאריות

הגדרה :

מערכת תקרא ליניארית אם עבור צירוף ליניארי של כניסות, מתקבל צירוף ליניארי של אותות המוצא המתאימים לכניסות. כלומר, אם לכל שתי כניסות $x_1(t)$, $x_2(t)$ וקבועים $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, מתקיים :

$$\Psi\left[\alpha x_1 + \beta x_2\right](t) = \alpha\Psi\left[x_1\right](t) + \beta\Psi\left[x_2\right](t)$$

הערות :

א. ניתן לפרק את תכונת הליניאריות לשני חלקים : מערכת היא ליניארית אם״ם היא מקיימת את שתי התכונות הבאות :
   א. אדיטיביות (Additive) : $\Psi\left[x_1 + x_2\right](t) = \Psi\left[x_1\right](t) + \Psi\left[x_2\right](t)$
   ב. הומוגניות (Homogeneity) : $\Psi\left[\alpha x\right](t) = \alpha\Psi\left[x\right](t) \qquad \forall\alpha \in \mathbb{C}:$

ב. אם מערכת בעלת כניסה $x(t) \equiv 0$ אך היציאה מקיימת $y(t) = \Psi\left[x\right](t) \ne 0$, אזי המערכת אינה ליניארית.

ג. מד״ר ליניארית הנמצאת במנוחה התחלתית ($\forall t < t_0 : y(t) = 0$) מתארת מערכת ליניארית.

דוגמאות :

א. $y = ax + b$ הינה ליניארית אם״ם $b = 0$.

ב. $y = \mathrm{Re}\{x\}$ אינה ליניארית.

ג. מערכת גוזרת $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ ומערכת המבצעת אינטגרציה $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ הינן ליניאריות.

סיבתיות

הגדרה:

מערכת תקרא סיבתית אם יציאתה בכל רגע אינה תלויה בכניסות עתידיות. כלומר, לכל t_0, המוצא $y(t)$ תלוי אך ורק בכניסה $x(t), t<t_0$. ובאופן שקול: $\forall t \le t_0 : x_1(t)=x_2(t) \Rightarrow \forall t \le t_0 : y_1(t)=y_2(t)$

הערות:

1. מערכת קונבולוציה עם תגובת להלם $h(t)$ הינה סיבתית אס"ם מתקיים $\forall t<0 : h(t)=0$.
2. מערכת קונבולוציה עם פונקצית תמסורת $H(s)$ רציונלית הינה סיבתית אס"ם ל-$H(s)$ תחום התכנסות ימני.
3. מערכת LTI בעלת פונקצית תמסורת רציונאלית היא סיבתית אס"ם מתקיימים שני התנאים:
   1. דרגת המונה של פונקי התמסורת אינה עולה על דרגת המכנה.
   2. תחום ההתכנסות ימני (או בזמן בדיד – תחום ההתכנסות מחוץ למעגל).
4. מערכת בזמן בדיד היא סיבתית אם $\lim_{z\to\infty} H(z)<\infty$ (אינסוף שייך ל ROC) ותחום ההתכנסות מחוץ למעגל.
5. מערכת ליניארית היא סיבתית אס"ם מתקיים $\int_{t^+}^{\infty} |K(t,\tau)| d\tau = \int_{t^+}^{\infty} |h(t-\tau)| d\tau = 0$.
6. מערכת גוזרת $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$ מוגדרת כסיבתית (למרות שיש להשתמש במידע קצת אחרי זמן t כדי לבצע גזירה בזמן t).
7. מערכת ליניארית היא סיבתית אס"ם היא במנוחה התחלתית.
8. אם דרגת המונה גדולה ממש מדרגת המכנה ב $H(z)$, נקבל משוואת הפרשים מהצורה $y[n]+...=x[n+1]+...$, ולכן היציאה תהיה תלוייה בכניסות עתידיות – אנטי סיבתיות.

זיכרון

הגדרה:

מערכת תקרא חסרת זיכרון אם המוצא בכל רגע t תלוי בכניסה ברגע t בלבד.

הגדרה שקולה:

מערכת תקרא בעלת זיכרון אם המוצא ברגע כלשהו t תלוי בכניסה ברגע $\tau \ne t$ כלשהו.

הערות:

1. אם מערכת אינה סיבתית אזי היא בעלת זיכרון.
2. אם מערכת חסרת זיכרון אזי היא סיבתית.
3. מערכת גוזרת $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$ היא בעלת זיכרון.

קביעות בזמן

הגדרה – אופרטור ההזזה בזמן

נגדיר את סימון אופרטור ההזזה בזמן כך:

$$\sigma^{\theta} x(t) \triangleq x(t+\theta)$$

הגדרה:

מערכת תקרא קבועה בזמן אם עבור כניסה מוזזת בזמן, יציאתה תוזז בזמן בהשהייה זהה. כלומר, כאשר מתקיים $\forall \theta : \Psi\{\sigma^{\theta}x(t)\} = \sigma^{\theta}\Psi\{x(t)\}$.

דוגמאות:

1. עבור המערכת $y(t)=x(at+b)$ מתקיים:

$$\begin{cases} \Psi\{\sigma^{\theta}x(t)\} = \Psi\{x(t+\theta)\} = x(a(t+\theta)+b) = x(at+a\theta+b) \\ \sigma^{\theta}\Psi\{x(t)\} = \sigma^{\theta}x(at+b) = x(at+b+\theta) \end{cases}$$

ולכן היא תהיה קבועה בזמן אס"ם $a=1$.

2. המערכת $y(t)=\int_{t+d}^{t+c}[ax(\alpha\tau)+b]d\tau$ היא:

ליניארית אס"ם $b=0$.

קבועה בזמן אס"ם $\alpha=1$.

סיבתית אס"ם $\alpha=1$, $c<0$, $d<0$.

הופכיות

הגדרה :

מערכת תקרא הופכית אם ניתן לשחזר את האות המקורי שנכנס למערכת רק על סמך מוצא המערכת לאותו האות. כלומר, כאשר ניתן למצוא מיפוי Ψ^{-1}, כך שאם $\Psi\left[x(t)\right]=y(t)$ אזי $\Psi^{-1}\left[y(t)\right]=x(t)$, וכאשר Ψ^{-1} הוא מיפוי חד-חד-ערכי ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$).

אפיניות (affine)

הגדרה :

מערכת תקרא אפינית אם לכל זוג כניסות $x_1(t), x_2(t)$ קיימת מערכת Ψ ליניארית כך ש $y_1(t)-y_2(t)=\Psi(x_1-x_2)$.

דוגמאות :

1. $\phi(x_1)=ax+b \quad , \quad b\neq 0$ היא אפינית.
2. מד״ר אם ת״ה שונים מאפס היא אפינית.

פונקציות מוכללות

הגדרה – פונקצית בוחן:

פונקצית בוחן $\phi(t)$ היא כזו שקיימות עבורה נגזרות מכל סדר ומתקיים $\forall n,m: \lim_{|t|\to\infty}\left(t^n \frac{d^m}{dt^m}\phi(t)\right)=0$

הגדרה - שוויון פונקציות מוכללות

שתי פונקציות מוכללות $f_1(t)$ ו $f_2(t)$ שוות אם לכל פונקצית בוחן $\phi(t)$ מתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\phi(t)dt$$

הגדרה – פונקצית מדרגה (פונקצית Heaviside)

נגדיר את פונקצית המדרגה:

$$u(t) \triangleq \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

נשים לב כי פונקצית המדרגה אינה מוגדרת עבור $t=0$.

הגדרה – פונקצית דלתא של דיראק:

דלתא של דיראק היא פונקציה מוכללת, המסומנת $\delta(t)$ ומוגדרת ע"י פעולה על פונקציה כלשהיא $f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)dt = f(0)$$

תכונות פונקצית דלתא

תכונה	תוצאה
הזזה	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t)dt = f(t_0)$
פעולה על $f(t)\equiv 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1$
דלתא היא נגזרת של פונקצית המדרגה	$\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t), \qquad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$
הזזה בזמן ושינוי קני-מידה	$\delta(at-t_0)=\frac{1}{\lvert a\rvert}\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right)$
הכפלה בפונקציה רציפה בסביבת t_0	$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$
פעולה של נגזרת של $\delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$
$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$ $f(t)\delta^{(n)}(t)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t), & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$	

אופרטור הקונבולוציה

הגדרה – קונבולוציה
עבור אותות x, y נגדיר את פעולת הקונבולוציה:

$$(x*y)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

הגדרה – תמך
התמך (Support) של פונקציה $x(t)$ הוא האינטרוול בו $x(t)\neq 0$.

תכונות הקונבולוציה

קומוטטיביות	$f*g=g*f$
אסוציאטיביות	$f*(g*h)=(f*g)*h$
אסוציאטיביות בכפל בסקלר	$a(f*g)=(af)*g=f*(ag)$
דיסטריבוטיביות	$f*(g+h)=f*g+f*h$
הזזה בזמן	$(\sigma^{\theta}f)*g=f*(\sigma^{\theta}g)=\sigma^{\theta}(f*g)$
קומוטטיביות בגזירה	$\left(\frac{d}{dt}f\right)*g=\frac{d}{dt}(f*g)=f*\left(\frac{d}{dt}g\right)$ $\frac{d^n}{dt^n}(f*g)=\left(\frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}f\right)*\left(\frac{d^m}{dt^m}g\right)$

אם $f(t)$ מחזורית במחזור T אזי גם $y(t)=(f*g)(t)$, גם היא מחזורית באותו מחזור.

קונבולוציות ידועות

$u(t)*u(t)=tu(t)$
$f(t)*\delta(t)=f(t)$
$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$
$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$

תכונת התמך של הקונבולוציה:
אם התמך של $x(t)$ הוא $[a,b]$ והתמך של $h(t)$ הוא $[c,d]$ אז התמך של $y=x*h$ הוא $[a+c,b+d]$.

תכונת זוגיות הקונבולוציה – זהה לזוגיות מכפלה של פונקציות:

$f(t)$	$g(t)$	$(f*g)(t)$
זוגית	זוגית	זוגית
זוגית	אי-זוגית	אי-זוגית
אי-זוגית	זוגית	אי-זוגית
אי-זוגית	אי-זוגית	זוגית

מערכת קונבולוציה: מערכת ליניארית וקבועה בזמן (LTI – Linear, Time Invariant) בה ניתן לחשב את מוצאה $y(t)$ ע"י פעולת קונבולוציה של הכניסה $x(t)$ עם תגובת המערכת להלם $h(t)$, כלומר כאשר

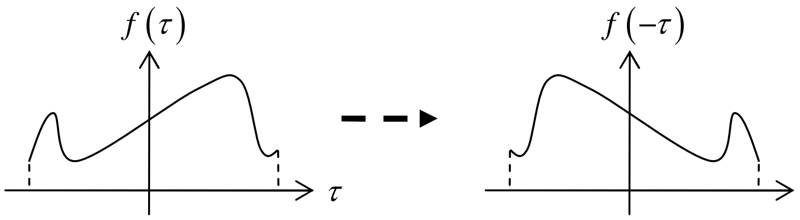
$$y(t)=(x*h)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

תוצאה: מתכונות הקונבולוציה, נקבל שניתן לבצע פעולת קונבולוציה עם $g(t)$, פונקצית התגובה לכניסת מדרגה:

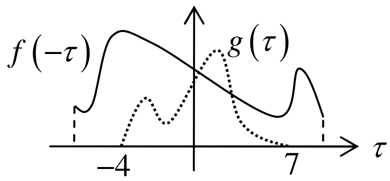
$$y(t)=(x*h)(t)=\left(x*\frac{d}{dt}g\right)(t)=\frac{d}{dt}(x*g)(t)=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

לעיתים כדאי לבדוק אם אפשרי, או אפילו פשוט יותר, לחשב את הקונבולוציה באופן גראפי. האלגוריתם לחישוב קונבולוציה באופן גראפי:

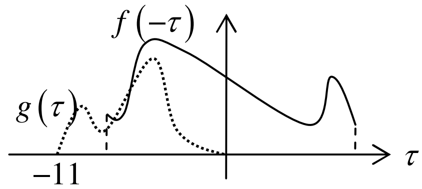
יש לשקף את אחד האותות המעורבים, ביחס לציר האנכי, כלומר



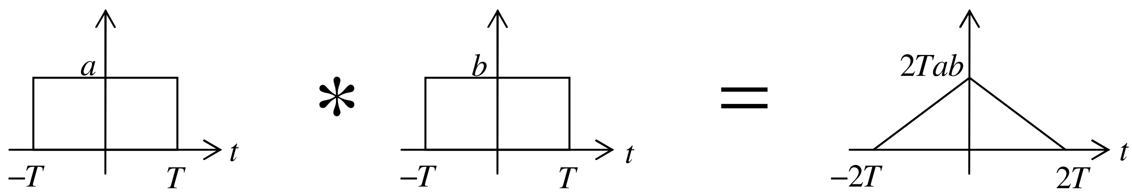
כעת נצייר באותה מערכת צירים את האות השני $g(t)$ שיישאר קבוע במקומו לאורך כל התהליך:



כעת, נזיז את $f(-\tau)$ בפרמטר $-\infty<t<\infty$, ועבור כל t שכזה, נחשב את השטח (ביצוע האינטגרל) שיוצרת המכפלה $g(\tau)f(t-\tau)$, וזה יהיה ערך הקונבולוציה בזמן t זה. עבור $t=7$, כלומר הזזה שמאלה ב 7 יחידות זמן, נקבל:



קונבולוציה של שני אותות מלבניים ("חלונות") ניתן לבצע בקלות באופן גראפי, ולקבל:



מערכות גרעין ומערכות קונבולוציה

מערכת גרעין היא מערכת אשר ניתן לחשב את מוצאה $y(t)$ ע"י הפעולה המתמטית הבאה:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}k(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

כאשר $x(t)$ היא כניסת המערכת ו $k(t,\tau)$ היא פונקציה המתארת את המערכת ונקראת גרעין המערכת ($Kernel$).
פונקצית הגרעין של מערכת היא תגובת המערכת בזמן t על כניסה בזמן τ.

בהינתן גרעין מערכת ליניארית $k(t,\tau)$:

1. המערכת סיבתית אס"ם $k(t,\tau)=0$ בתחום $t<\tau$.
2. מערכת חסרת זיכרון אס"ם $k(t,\tau)=0$ עבור $t\neq\tau$.
3. המערכת קבועה בזמן אס"ם $k(t,\tau)=k(t-\tau)$, כלומר פונקציה של הפרש הזמנים בלבד, וזוהי מערכת קונבולוציה.

עבור מערכת קונבולוציה, כלומר מערכת בעלת תגובה להלם ושניתן להציג את יציאתה ע"י פעולת קונבולוציה:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

פונקצית התמסורת שלה מסומנת $H(\omega)$ והיא התמרת הפורייה של התגובה להלם $h(t)$.

אותות עצמיים של מערכת קונבולוציה

בתחום התדר, כלומר כשמסתכלים על התמרת הפורייה של המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה של המערכת, ניתן לקבל כי האות $x(t)=e^{j\omega_0 t}$ הוא אות עצמי של מערכת הקונבולוציה.

מוצא המערכת עבור אות עצמי זה הוא $y(t)=e^{j\omega_0 t}H(\omega_0)$.

ניתן לקבל כי עבור כניסה $x(t)=\cos(\omega_0 t)$, וכש- $h(t)$ ממשי:

$$y(t)=\left|H(\omega=\omega_0)\right|\cos\left(\omega_0 t+\arg H(\omega=\omega_0)\right)$$

ובאופן דומה, עבור $x(t)=\sin(\omega_0 t)$, כאשר $h(t)$ ממשי, נקבל:

$$y(t)=\left|H(\omega=\omega_0)\right|\sin\left(\omega_0 t+\arg H(\omega=\omega_0)\right)$$

במישור לפלס, כלומר כשמסתכלים על התמרת לפלס מתאימה (חד-צדדית או דו-צדדית) של המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה של המערכת, האות $x(t)=e^{s_0 t}$ הוא אות עצמי של מערכת הקונבולוציה. מוצא המערכת עבור אות עצמי זה הוא $y(t)=e^{s_0 t}H(s_0)$.

במישור לפלס, נשים לב כי עבור אות $x(t)=a^t$, מתקיים $x(t)=e^{t\ln a}$, כלומר אות עצמי, ולכן במקרה זה נקבל את מוצא $y(t)=a^t H(\ln a)$.

התמרת פורייה בזמן רציף

הגדרה – התמרת פורייה בזמן רציף

עבור אות $x(t)$ המקיים $\|x\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, נגדיר את התמרת הפורייה של האות:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

את ההתמרה ההפוכה ניתן נקבל, תחת תנאיי דיריכלה, ע״י

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

תכונות ותוצאות:

1. עקרון הדואליות:

נסמן את התמרת פורייה של אות $x(t)$: $F\{x(t)\} = X(\omega)$, אזי: $F\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$.

מעקרון זה ניתן להראות כי:

$$F^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{4\pi^2} F^3\{X(\omega)\}(t)$$

$$F^4\{x(t)\}(\omega) = 4\pi^2 x(\omega)$$

$$F^2\{x(t)\}(\omega) = 2\pi x(-\omega)$$

2. משפט פלנשרל ותוצאותיו:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega) d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

3. קשר שימושי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot 1 dt = X(\omega = 0)$$

התמרות פורייה ידועות

התמרת פורייה של האות	אות בזמן רציף
1	$\delta(t)$
$e^{-j\omega t_0}$	$\delta(t-t_0)$
$2\pi\delta(\omega)$	1
$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$
$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$
$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$e^{j\omega_0 t}$
$\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$	$\cos(\omega_0 t)$
$\frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right)$	$\sin(\omega_0 t)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k}\delta(\omega-k\omega_0)$ $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$	$x(t)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<T_1\\ 0 & T_1<\lvert t\rvert\le\frac{T_0}{2}\end{cases}$ וכן $x(t+T_0)=x(t)$
$\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<\omega_0\\ 0 & \lvert\omega\rvert>\omega_0\end{cases}$	$\frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_0 t)=\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$
$\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_0} & \lvert\omega\rvert<\omega_0\\ 0 & \lvert\omega\rvert>\omega_0\end{cases}$	$\mathrm{sinc}(\omega_0 t)=\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}$
$\begin{cases}\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega), & \omega\neq 0\\ \pi\delta(\omega), & \omega=0\end{cases}$	$u(t)=\frac{1}{2}(sign(t)+1)$
$\frac{1}{a+j\omega},\quad \mathrm{Re}(a)>0$	$e^{-at}u(t)$
$\frac{1}{(a+j\omega)^2},\quad \mathrm{Re}(a)>0$	$te^{-at}u(t)$
$\frac{1}{(a+j\omega)^n},\quad \mathrm{Re}(a)>0$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$
$\begin{cases}\frac{2}{j\omega}, & \omega\neq 0\\ 0, & \omega=0\end{cases}$	$sign(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t=0\\ -1 & t<0\end{cases}$
$2kt_0\mathrm{sinc}(t_0\omega)$	$\begin{cases}k & \lvert t\rvert<t_0\\ 0 & \lvert t\rvert>t_0\end{cases}$
$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$	t^n
$\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi\delta(\omega)X(\omega)$	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=(x*u)(t)$
$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$	$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$

תכונות של התמרת פורייה

תכונה	אות בזמן רציף	התמרת פורייה של האות
ליניאריות	$ax(t)+by(t)$	$aX(\omega)+bY(\omega)$
סימטריה	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
מתיחה וכיווץ (Scaling)	$f(at),\ a\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
הזזה בזמן	$f(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}F(\omega)$
הזזה בתדר	$e^{j\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega-\omega_0),\quad \omega_0\in\mathbb{R}$
מכפלה ב cos	$f(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}\left(F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right)$
מכפלה ב sin	$f(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2j}\left(F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)\right)$
קונבולוציה בזמן	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)\cdot Y(\omega)$
קונבולוציה בתדר	$x(t)\cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)*Y(\omega)$
גזירה בזמן	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
אינטגרציה בזמן	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$
גזירה בתדר	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$
	$x(t)=x^*(t)$ (אות ממשי)	$X^*(\omega)=X(-\omega)$ $\Downarrow$ $\mathrm{Re}\{X(\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-\omega)\}$ $\mathrm{Im}\{X(\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-\omega)\}$ $\lvert X(\omega)\rvert=\lvert X(-\omega)\rvert$ $\arg\{X(\omega)\}=-\arg\{X(-\omega)\}$
	$x^*(t)=x(-t)$	$X^*(\omega)=X(\omega)$ (התמרת ממשית)
	$x(t)=x(-t)$	$X(\omega)=X(-\omega)$
	$x(t)=-x(-t)$	$X(\omega)=-X(-\omega)$

טור פורייה בזמן רציף

הגדרה – אות מחזורי

אות יהיה מחזורי, בזמן מחזור T, כאשר לכל t מתקיים

$$x(t+T)=x(t)$$

אות מחזורי ניתן לתיאור בעזרת טור פורייה:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$$

כאשר $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$. את מקדמי הטור מוצאים בעזרת הנוסחה:

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

הקבוע c_0 נקרא אות DC, כלומר Direct Current – אות קבוע שלא מכיל מידע בתוכו.

את האינטגרציה מבצעים על פני קטע כלשהו באורך T (המחזור).

טור הפורייה הוא גם כן אות מחזורי במחזור T.

נקודת מבט שונה:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\simeq\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\Omega)e^{jn\Omega T}\Omega$$

כאשר: Ω - אינטרוול הדגימה, אשר בגבול $\Omega\to 0$ מחזיר אותנו לאינטגרל.

$X(n\Omega)$ - מבטא את תכולת ההרמוניה, כלומר המשקל היחסי של ω בתוך הסיגנל $x(t)$.

הערה: לפי משפט דיריכלה, ערכי הטור בנקודות אי הרציפות, המחברים את מחזורי הפונקציה, נקבעים לפי ממוצע ערך הגבול מימין וערך הגבול משמאל לנקודת אי הרציפות. כלומר עבור נקודת אי-רציפות $t_0=nT_0, n\in Z$ מתקיים:

$$x(t_0)=\frac{x(t_0^+)+x(t_0^-)}{2}=\frac{x(0^+)+x(T_0^-)}{2}$$

<u>מעבר מהתמרת פורייה של אות מחזורי לטור פורייה של האות:</u>

עבור אות מחזורי $x(t)$ במחזור T_0, להצגת האות בתור טור פורייה, נמצא את התמרת הפורייה של אחד ממחזורי האות, $X_0(\omega)$, ואז יתקיים $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_0 nt}$, כאשר $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ ו- $c_n=\frac{1}{T_0}X_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0}$ לכל n שלם.

<u>מעבר מטור פורייה של אות מחזורי להתמרת פורייה של האות:</u>

עבור אות מחזורי $x(t)$ במחזור T_0, אשר נתון ע"י הטור $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_0 nt}$.

נקבל את התמרת הפורייה של האות ע"י:

$$X(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-k\omega_0)$$

כלומר, רכבת הלמים מוכפלת במקדמי הטור פורייה, c_n.

תכונות של מקדמי פורייה

אות מחזורי במחזור T, כאשר $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$	מקדמי הטור
$x(t)$, במחזור T	a_k
$y(t)$, במחזור T	b_k
$Ax(t)+Bx(t)$	Aa_k+Bb_k
$x(t-t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$
$e^{jM\omega_0 t}x(t)$	a_{k-M}
$x^*(t)$	a_{-k}^*
$x(-t)$	a_{-k}
$x(\alpha t)$, $\alpha>0$, המחזור משתנה ל- $\frac{T}{\alpha}$	a_k
$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
$x(t)y(t)$, במחזור T	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n}$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$jk\omega_0 a_k$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ (מתכנס רק אם $a_0=c_0=0$)	$\frac{1}{jk\omega_0}a_k$
$x(t)=x^*(t)$ (אות ממשי)	$a_k=a_k^*$ $\mathrm{Re}\{a_k\}=\mathrm{Re}\{a_{-k}\}$ $\mathrm{Im}\{a_k\}=-\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$ $\lvert a_k\rvert=\lvert a_{-k}\rvert$
$x(t)$ ממשי וזוגי	a_k ממשי וזוגי
$x(t)$ ממשי ואי-זוגי	a_k מדומה טהור ואי-זוגי
$x_e=Even\{x(t)\}$, $x(t)$ ממשי	$\mathrm{Re}\{a_k\}$
$x_o=Odd\{x(t)\}$, $x(t)$ ממשי	$j\,\mathrm{Im}\{a_k\}$

<u>משפט</u>: אם מתקיימים תנאי דיריכלה:

א. $x\in L_1[0,T]$ - זאת אומרת $\int_0^T |x(t)|dt<\infty$.

ב. הפונקציה $x(t)$ רציפה למקוטעין בקטע $[0,T]$ ובעלת מספר סופי של נקודות אי-רציפות.

ג. הפונקציה $x(t)$ הינה בעלת מספר סופי של נקודות מקסימום ומינימום בקטע $[0,T]$.

אזי טור פורייה עם המקדמים a_k,b_k הנ"ל מתכנס לפונקציה כך ש: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=\frac{1}{2}\left[x(t^+)+x(t^-)\right]$

נגדיר מכפלה פנימית במרחב ליניארי: $\langle x,y\rangle \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot y^*(t)dt$

<u>משפט פרסבל</u>: עבור $x(t)$ מחזורי מתקיים (כאשר הטור או האינטגרל מתכנסים):

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle=\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$$

התמרת לפלס

הגדרה – התמרת לפלס

עבור $s \in \mathbb{C}$, נגדיר את התמרת לפלס דו-צדדית של אות $x(t)$:

$$X(s) = L\{x(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

עבור $s \in \mathbb{C}$, נגדיר את התמרת לפלס חד-צדדית של אות $x(t)$:

$$X(s) = L_+\{x(t)\} \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

כאשר האינטגרל לא יתכנס בהכרח לכל $s \in \mathbb{C}$. קבוצת הערכים של הפרמטר s שעבורם ההתמרה קיימת (האינטגרל מתכנס) נקראת תחום ההתכנסות של ההתמרה - $ROC: Region\,Of\,Convergence$.

הערות/תכונות:

1. ניתן לראות שאם הציר המדומה מוכל בתחום ההתכנסות של ההתמרה, כלומר $\forall \omega \in \mathbb{R}: s = j\omega \in ROC$, אזי התמרת פורייה של האות מוגדרת היטב, ומתקיים $F\{x(t)\} = L\{x(t)\}\big|_{s=j\omega}$.
2. כאשר ההתמרה היא רציונאלית, כלומר $X(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, $P(s)$ ו $Q(s)$ פולינומים כלשהם, אזי:

התמך של האות $x(t)$	תחום ההתכנסות של התמרת לפלס $X(s)$
סופי	כל המישור המרוכב ($s \in \mathbb{C}$)
קרן חד-צדדית ימנית (האות ימני)	ימינה מהקוטב p הימני ביותר ($\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{p\}$)
קרן חד-צדדית שמאלית (האות שמאלי)	שמאלה מהקוטב p השמאלי ביותר ($\mathrm{Re}\{s\} < \mathrm{Re}\{p\}$)
אינסופי (האות דו-צדדי – שונה מ-0 לכל t)	בין שני הקטבים הפנימיים ביותר

3. תחום ההתכנסות של ההתמרה כמובן לא יכול לכלול קוטב של ההתמרה.
4. תחום ההתכנסות יכול להיות קבוצה ריקה – כלומר ההתמרה לא קיימת בעצם לאף s.
5. התמרת לפלס הפוכה: $x(t) = \dfrac{1}{2\pi j} \displaystyle\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} X(z) e^{zt} dz$
6. קשר בין התמרת לפלס החד-צדדית והדו-צדדית: $L_+\{x(t)\} = L\{x(t) \cdot u(t)\}$
7. התמרת לפלס דו-צדדית של אות ימני תהיה זהה להתמרת לפלס חד-צדדית של אותו אות.
8. הערך ההתחלתי והערך הסופי:

אם $x(t)$ אות ימני, והאות רציף מספיק (ללא הלמים או סינגולריות) בראשית, אזי, כאשר הגבולות קיימים, מתקיים

$$\lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX_+(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX_+(s)$$

פתרון מד״ר במנוחה התחלתית בעזרת התמרת לפלס דו-צדדית

מד״ר אם מקדמים קבועים:

$$a_n y^{(n)}(t)+\ldots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=b_m x^{(m)}(t)+\ldots+b_1 x'(t)+b_0 x(t)$$

ותנאי התחלה אפס (מנוחה התחלתית), מתארת מערכת LTI (כלומר הפתרון שנמצא הוא ZSR).
לאחר ביצוע התמרת לפלס דו-צדדית עבור שני צידי המשוואה, נקבל

$$a_n s^n Y(s)+\ldots+a_1 sY(s)+a_0 Y(s)=b_m s^m X(s)+\ldots+b_1 sX(s)+b_0 X(s)$$

ואז פונקצית התמסורת של המערכת היא

$$H(s)\triangleq\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0}$$

וכך, עבור כניסה $x_1(t)$ כלשהיא, נקבל את התמרת לפלס של המוצא:

$$Y_1(s)=H(s)X_1(s)$$

ובמקרה הפרטי של כניסת הלם, $x_1(t)=\delta(t)$, נקבל את תגובת ההלם של המערכת

$$Y_1(s)=H(s)X_1(s)=H(s)L\{\delta(t)\}=H(s)$$

שנסמן בתחום הזמן $h(t)$:

$$h(t)=L^{-1}\{H(s)\}$$

פתרון מד״ר עם תנאי התחלה שונים מאפס בעזרת התמרת לפלס חד-צדדית

נביט במד״ר ליניארית עם מקדמים קבועים (מערכת LTI)

$$a_n y^{(n)}(t)+\ldots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=b_m x^{(m)}(t)+\ldots+b_1 x'(t)+b_0 x(t)$$

ותנאי התחלה

$$\begin{cases} y^{(n)}(0)=y_n \\ \vdots \\ y'(0)=y_1 \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

נבצע התמרת לפלס חד-צדדית על שני אגפי המשוואה, כאשר לא שוכחים כי:

$$L_+\left\{\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right\}=s^n X(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}x(t)\right]_{t=0}$$

וההמשך זהה לטיפול המשוואה עם תנאי התחלה אפס.

הערה:

1. תחום ההתכנסות של ההתמרה $L_+\left\{\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right\}$ יהיה תמיד ימני.

התמרות לפלס ידועות

אות בזמן רציף	התמרת לפלס	תחום התכנסות
$\delta(t)$	1	$s \in \mathbb{C}$
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	$s \in \mathbb{C}$
$u(t)=\frac{1}{2}(sign(t)+1)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\}<0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\}<0$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\text{Re}\{s\}>-\alpha$
$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\text{Re}\{s\}<-\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\text{Re}\{s\}>-\alpha$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\text{Re}\{s\}<-\alpha$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$\cos(\omega_0 t)e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\}>-\alpha$
$\sin(\omega_0 t)e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\}>-\alpha$
$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$u(t-t_1)-u(t-t_2)$ (חלון)	$\begin{cases} \frac{e^{-st_1}-e^{-st_2}}{s}, & s \neq 0 \\ t_2-t_1, & s=0 \end{cases}$	$s \in \mathbb{C}$

תכונות התמרת לפלס

תכונה	אות בזמן רציף	התמרת לפלס	תחום ההתכנסות
ליניאריות	$ax(t)+by(t)$	$aX(s)+bY(s)$	לפחות $ROC\{X(s)\}\cap ROC\{Y(s)\}$
הזזה בזמן	$f(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$	$ROC\{F(s)\}$
הזזה בתדר	$e^{s_0t}f(t)$	$F(s-s_0)$	התחום המקורי $ROC\{F(s)\}$ מוזז בהתאם
מתיחה וכיווץ (Scaling)	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{s}{a}\right)$	התחום המקורי $ROC\{F(s)\}$ מכווץ בהתאם
קונבולוציה בזמן	$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$	לפחות $ROC\{X(s)\}\cap ROC\{Y(s)\}$
קונבולוציה בתדר	$x(t)y(t)$	$X(s)*Y(s)$	
גזירה אחת בזמן	$\frac{d}{dt}f(t)$	בהתמרה דו-צדדית: $sF(s)$ בהתמרה חד-צדדית: $sX_+(s)-x(0^-)$	לפחות $ROC\{F(s)\}$
גזירה פעמיים בזמן	$\frac{d^2}{dt^2}f(t)$	בהתמרה דו-צדדית: $s^2F(s)$ בהתמרה חד-צדדית: $s^2X_+(s)-sx(0^-)-x'(0^-)$	לפחות $ROC\{F(s)\}$
גזירה בזמן	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	בהתמרה דו-צדדית: $s^nF(s)$ בהתמרה חד-צדדית: $s^nX_+(s)-s^{n-1}x(0^-)-\ldots-s^0x^{(n-1)}(0^-)$	לפחות $ROC\{F(s)\}$
אינטגרציה בזמן	$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$	לפחות $ROC\{F(s)\}\cap\{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$
גזירה בתדר	$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$	$ROC\{F(s)\}$

עקומות בודה לפונקציות תמסורת

עקומת ההגבר האסימפטוטית של בודה היא שרטוט של $20\log\left|H(\omega)\right|$ כפונקציה של ω, בסקאלה לוגריתמית.

כלומר שרטוט של $20\log\left|H(\omega)\right|$ כפונקציה של $\log\omega$. בסיס הלוגריתם הוא 10.

עקומת הפאזה האסימפטוטית של בודה היא שרטוט של $\measuredangle H(\omega)$ כפונקציה של ω, בסקאלה לוגריתמית.

ראשית נראה כי עבור מערכת מסדר שני מהצורה

$$y''(t)+2\xi\omega_n y'(t)+\omega_n^2 y(t)=\omega_n^2 x(t)$$

נקבל תגובת תדר קנונית

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

ולכן שורשי המכנה הם

$$\lambda_{1,2}=\begin{cases}-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{\xi^2-1} & , \quad |\xi|<1\\ -\xi\omega_n\pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1} & , \quad |\xi|\geq 1\end{cases}.$$

כאשר $j\omega\in ROC$ של התמרת לפלס של תגובת התדר של המערכת, לצורך שרטוט עקומי ההגבר והפאזה, נרשום את תגובת התדר בצורה קנונית כללית:

$$H(j\omega)=\pm K\frac{j\omega_{z_1}\cdot\overbrace{\left(1\pm j\frac{\omega}{\omega_{z_2}}\right)}^{\text{real zero}}\cdots\cdots\overbrace{\left(1+j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_{z_n}}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_{z_n}}\right)^2\right)}^{\text{2 conjugate complex zeros}}\cdots\cdot}{j\omega_{p_1}\cdot\underbrace{\left(1\pm j\frac{\omega}{\omega_{p_2}}\right)}_{\text{real pole}}\cdots\cdots\underbrace{\left(1+j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_{p_n}}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_{p_n}}\right)^2\right)}_{\text{2 conjugate complex poles}}\cdots\cdot}$$

הערה: קירוב בודה אומר שלכל $\omega\leq\omega_p,\omega_z$ ההשפעה זניחה (כאשר ω_z,ω_p הוא קוטב/אפס).

טבלת סוגי הקטבים, והשפעתם על עקומות בודה האסימפטוטיות:

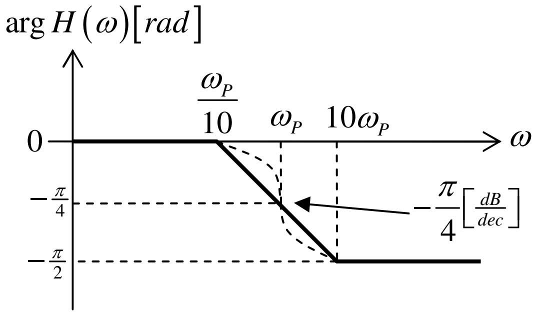
סוג קוטב	תרומה לתגובת התדר	תרומה לשיפוע בהגבר, מהקוטב ימינה	תרומה לשיפוע בפאזה, מדקדה לפני עד דקדה אחרי הקוטב
קוטב ממשי מסדר m בחצי המישור השמאלי	$\frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_p}\right)^m}$	$-20m\left[\frac{dB}{dec}\right]$	$-\frac{\pi}{4}m\left[\frac{db}{dec}\right]$
קוטב ממשי מסדר m בחצי המישור הימני	$\frac{1}{\left(1-j\frac{\omega}{\omega_p}\right)^m}$		$+\frac{\pi}{4}m\left[\frac{db}{dec}\right]$
קוטב מרוכב מסדר m בחצי המישור השמאלי	$\frac{1}{\left(1+j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^m}$	$-40m\left[\frac{dB}{dec}\right]$	$-\frac{\pi}{2}m\left[\frac{db}{dec}\right]$
קוטב מרוכב מסדר m בחצי המישור הימני	$\frac{1}{\left(1-j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^m}$		$+\frac{\pi}{2}m\left[\frac{db}{dec}\right]$
קוטב בראשית מסדר m	$\frac{1}{(j\omega)^m}$	$-20m\left[\frac{dB}{dec}\right]$	היסט של $-\frac{\pi}{2}m$ לכל אורך הגרף

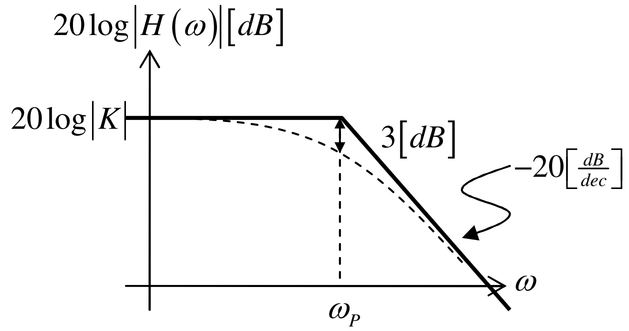
טבלת סוגי האפסים, והשפעתם על עקומות בודה האסימפטוטיות :

סוג אפס	תרומה לתגובת התדר	תרומה לשיפוע בהגבר, מהאפס ימינה	תרומה לשיפוע בפאזה, מדקדה לפני עד דקדה אחרי האפס
אפס ממשי מסדר m בחצי המישור השמאלי	$\left(1+j\frac{\omega}{\omega_z}\right)^m$	$+20m\left[\frac{dB}{dec}\right]$	$+\frac{\pi}{4}m\left[\frac{db}{dec}\right]$
אפס ממשי מסדר m בחצי המישור הימני	$\left(1-j\frac{\omega}{\omega_z}\right)^m$		$-\frac{\pi}{4}m\left[\frac{db}{dec}\right]$
אפס מרוכב מסדר m בחצי המישור השמאלי	$\left(1+j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^m$	$+40m\left[\frac{dB}{dec}\right]$	$+\frac{\pi}{2}m\left[\frac{db}{dec}\right]$
אפס מרוכב מסדר m בחצי המישור הימני	$\left(1-j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^m$		$-\frac{\pi}{2}m\left[\frac{db}{dec}\right]$
אפס בראשית מסדר m	$(j\omega)^m$	$+20m\left[\frac{dB}{dec}\right]$	היסט של $\frac{\pi}{2}m$ לכל אורך הגרף

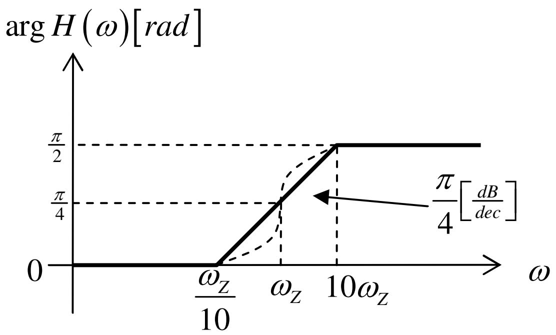
השפעות הקטבים/אפסים על עקומות ההגבר והפאזה

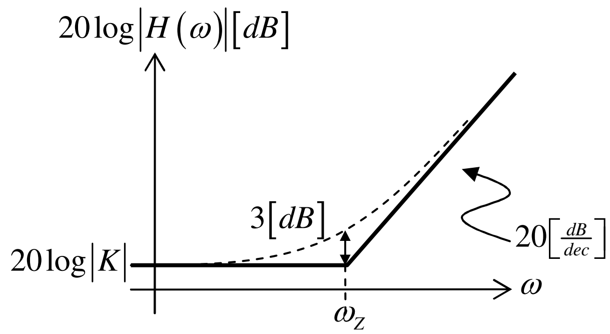
1. קוטב ממשי פשוט, בחצי מישור השמאלי (סימן + בפונקצית התמסורת).
כאשר הקוטב מרוחק משאר קטבי ואפסי המערכת, עקום ההגבר המדויק נמצא במרחק של $3[dB]$ מתחת לעקום ההגבר האסימפוטי (בדיוק במיקום בקוטב).



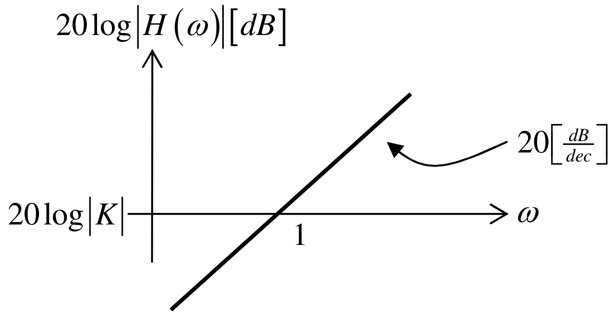


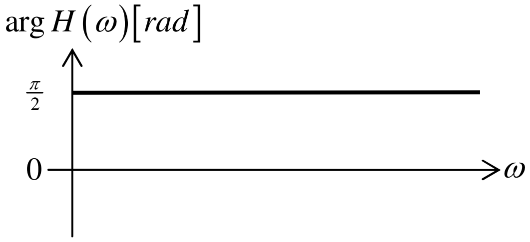
2. אפס ממשי פשוט, בחצי מישור השמאלי (סימן + בפונקצית התמסורת).
כאשר האפס מרוחק משאר קטבי ואפסי המערכת, עקום ההגבר המדויק נמצא במרחק של $3[dB]$ מעל לעקום ההגבר האסימפוטי (בדיוק במיקום בקוטב).



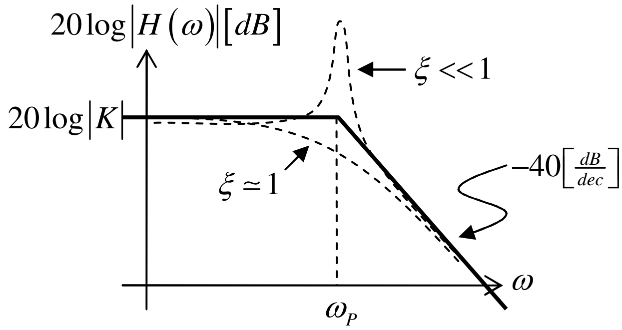


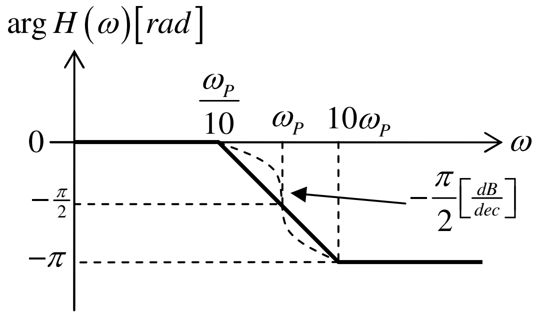
3. אפס ממשי בראשית





4. זוג קטבים קומפלקסים צמודים, פשוטים (ממעלה 1).
המיקום והמרחק בין ההגבר המדויק ובין ההגבר האסימפטוטי משתנה כתלות בפרמטר $0<\xi<1$. כאשר $\xi<<1$, מקבלים הגבר בצורת δ בנקודת הקוטב (כלומר אינסופי).





הערות לשרטוט הגרפים:

1. מציאת שיפוע בגרף: $Slope=\dfrac{H(\omega_B)-H(\omega_A)}{\log(\omega_B)-\log(\omega_A)}=\dfrac{H(\omega_B)-H(\omega_A)}{\log\left(\dfrac{\omega_B}{\omega_A}\right)}$
2. גרף ההגבר מתחיל מהגבר של $20\log|K|$. מכיוון שכל קוטב/אפס הוא מכפלה, אזי את K מצמידים לאחת המכפלות של $H(\omega)$, ולכן שאר המכפלות לא תורמות להגבר, כלומר מתחילות מאפס.
3. גרף הפאזה מתחיל מפאזה אפס, אלא אם כן קיים אפס בראשית, או סימן שלילי של $H(\omega)$, כלומר $K<0$.
4. $K<0$ תורם היסט של π (או לחילופין $-\pi$) לכל אורך הגרף (היפוך פאזה).
5. בגלל מחזוריות הפאזה של 2π, ניתן להסיט את גרף הפאזה ב $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
6. הגבר התהודה הינו: $M=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$
7. עקומי בודה להגבר עבור $G(\omega)=H^*(\omega)$, זהה ועקום הפאזה משוקף ביחס לציר $\log\omega$, מכיוון ש:

$$20\log|G(\omega)|=20\log|H^*(\omega)|=20\log|H(\omega)|$$

$$\measuredangle G(\omega)=\measuredangle H^*(\omega)=-\measuredangle H(\omega)$$

מערכות בזמן בדיד

הגדרות פונקציות דלתא ומדרגה בזמן בדיד:

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}\qquad u[n]=\begin{cases}1 & n=0,1,2,\dots\\ 0 & otherwise\end{cases}\qquad u[-n-1]=\begin{cases}1 & n=-1,-2,-3,\dots\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

תוצאות נוספות:

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]=\left(u[n]-\sigma^{-1}u[n]\right)[n]$$

$$u[n]=\delta[n]+u[n-1]$$

$$f[n]\delta[n-a]=f[a]\delta[n-a]$$

$$h[n]=g[n]-g[n-1]$$

$$g[n]=(h*u)[n]$$

באופן מקבל למשוואות דיפרנציאליות בזמן רציף, בזמן בדיד מדברים על משוואות הפרשים. מערכת הפרש ליניארית וקבועה בזמן, מסדר N, תתואר ע"י משוואת ההפרשים הבאה:

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k],\qquad a_N\neq 0$$

כאשר $a_0\neq 0$, המשוואה מתארת מערכת סיבתית, וכאשר $a_0=0$, המשוואה מתארת מערכת אנטי-סיבתית.

פתרון ישיר של משוואת הפרשים

נרצה לחשב את תגובת המערכת להלם, כלומר לפתור את משוואת ההפרשים כאשר $x[n]=\delta[n]$. נקבל

$$\sum_{k=0}^{N}a_k h[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k\delta[n-k]$$

לאחר הצבה זו, נראה שמתקבלת מערכת הפרשים הומוגנית, החל מ n_0 מסויים, עם תנאי התחלה מתאימים. כלומר, באופן כללי נקבל

$$\begin{cases}h[n]=0, & n<0\\ h[n]=-\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{a_0}h[n-k]+\frac{b_n}{a_0}, & 0<n<M\\ \sum_{k=1}^{N}a_k h[n-k]=0, & n>M\end{cases}$$

נשים לב שהפתרון עבור $0<n<M$ הוא תנאי ההתחלה עבור המשוואה ההומוגנית שקיבלנו עבור $n>M$.

כעת נגדיר את הפולינום

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}a_k\lambda^{N-k}$$

כאשר N השורשים של פולינום זה, תורמים N פתרונות למשוואת ההפרשים ההומוגנית, באופן ששורש λ_i מריבוי 1 תורם את הפתרון

$$y_i[n]=A_i\lambda_i^n$$

ושורש λ_i מריבוי r תורם את r הפתרונות

$$\forall 0\leq a<r:\qquad y_i[n]=A_i n^a\lambda_i^n$$

לסיכום, הפתרון הכולל של המשוואה ההומונית יהיה סכום כל הפתרונות שלעיל, והקבועים מחושבים מתנאי ההתחלה שמצאנו עוד קודם לכן.

הגדרה – קונבולוציה בזמן בדיד

עבור שני אותות בזמן בדיד $x[n]$, $y[n]$ נגדיר את הקונבולוציה בזמן בדיד:

$$(x*y)[n] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot y[n-k]$$

הגדרה – אנרגיה של אות בזמן בדיד

$$E_d \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \left\|x[n]\right\|_2$$

הערות:

1. באופן כללי, עבור קשר המקיים $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$ בזמן רציף, ניתן לנסח את הקשר בזמן בדיד בצורה הבאה:
$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$
(מכיוון שבזמן בדיד, $\Delta t=\Delta n=1$ תמיד).
2. עבור מערכת קונבולוציה בעלת כניסה $x[n]$ ותגובה למדרגה $g[n]$ מתקיים:
$$y[n]=(x*g)[n]-(x*g)[n-1]$$
3. התכונות המוכרות מקונבולוציה בזמן רציף מתקיימות גם כאן.

התמרת Z

הגדרה – התמרת Z דו-צדדית

התמרת Z דו-צדדית: (המקבילה להתמרת לפלס דו-צדדית, עבור אותות בזמן בדיד)

$$X(z)=Z\{x[n]\}\triangleq\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n},\qquad z\in\mathbb{C}$$

הגדרה – התמרת Z חד-צדדית

התמרת Z חד-צדדית: (המקבילה להתמרת לפלס חד-צדדית, עבור אותות בזמן בדיד)

$$X_+(z)=Z_+\{x[n]\}\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n},\qquad z\in\mathbb{C}$$

תחום ההתכנסות של התמרת Z, $ROC-Region\,Of\;Convergence$, הוא התחום בו מתקיים

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]z^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right||z|^{-n}<\infty$$

חישוב התמרת Z הפוכה:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\int_C z^{k-1}X(z)dz,\qquad C\subseteq ROC\{X(z)\}$$

אם מעגל היחידה $|z|=1$ שייך לתחום ההתכנסות, אזי פשוט יותר לבצע את האינטגרציה על מעגל זה:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X\left(e^{j\theta}\right)e^{jn\theta}d\theta$$

ועבור r_0, כלומר מעגל כללי ברדיוס $|z|=r_0$, המוכל ב ROC:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}r_0^n\int_0^{2\pi}X\left(r_0e^{j\theta}\right)e^{jn\theta}d\theta$$

שיטות נוספות למציאת התמרה הפוכה:

1. טור חזקות של האות
2. פירוק לשברים חלקיים
3. שימוש בנוסחת הבינום של ניוטון $(a+b)^n=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}a^nb^{m-n}$

תחום ההתכנסות של התמרה דו-צדדית:

1. אות ימני: התכנסות תהיה מחוץ למעגל, כלומר $|z|>|a|$, כאשר a הוא הקוטב בעל הגודל הגדול ביותר.
2. אות שמאלי: התכנסות תהיה בתוך למעגל, כלומר $|z|<|a|$, כאשר a הוא הקוטב בעל הגודל הקטן ביותר.
3. אות דו-צדדי: התכנסות תהיה בתוך טבעת, כלומר $|b|<|z|<|a|$, כאשר a ו b הקטבים הקרובים ביותר.
4. עבור אותות בעלי תמך סופי ($x[n]\neq 0$, $N_1\le\forall n\le N_2$), תחום ההתכנסות הוא כל המישור המרוכב מלבד:
   1. כאשר $N_2>0$ $\Leftarrow$ $z=0\notin ROC$
   2. כאשר $N_1<0$ $\Leftarrow$ $z=\infty\notin ROC$

בכל מקרה, תחום ההתכנסות אינו כולל קטבים של ההתמרה.

פתרון משוואות הפרשים, עם תנאי התחלה שונים מאפס, ע"י התמרת Z חד-צדדית:
לאחר התמרת שני אגפי משוואתהמערכת, נקבל משוואה שנראית כך:

$$Y_+(z)=Q_+(z)+H_+(z)X_+(z)$$

כאשר Q_+ מבטאת את המוצא כתלות בתנאי התחלה בלבד (ZIR) ו- $H_+(z)$ היא פונקצית התמסורת של המערכת.
כאשר כופלים את פונקצית התמסורת $H_+(z)$ בהתמרת הכניסה $X_+(z)$, מקבלים את התמרת מוצא המערכת בתלות בכניסה בלבד (ZSR), וזאת בדומה למשוואת הפרשים עם תנאי התחלה אפס.

תכונות/ הערות:

1. אות עצמי: עבור אות כניסה מעריכי, כלומר מהצורה $x[n]=a^n$, ואם $|z|=a$ נמצא בתחום ההתכנסות של פונקצית התמסורת $H(z)$ (מעגל ברדיוס a במישור המרוכב), אזי $y[n]=H[z=a]\cdot a^n$.
2. יש לשים לב כי $x[n]=a^n u[t]\neq a^n$ ולכן אינו יכול להיות אות עצמי.
3. עבור המקרה הפרטי של אות כניסה קבוע, כלומר האות המעריכי $x[n]=C=C\cdot 1^n$, נקבל שאם $|z|=1$ (מעגל היחידה) נמצא בתחום ההתכנסות של פונקצית התמסורת $H(z)$, אזי מתקיים $y[n]=C\cdot H(z=1)$.
4. עבור כל אות: $Z_+\{x[n]\}=Z\{x[n]u[n]\}$.
5. מערכת LTI היא סיבתית אס"ם מתקיים עבורה $h[n]=0$:$\forall n<0$, ואז גם מתקיים: $H(z)=H_+(z)$
6. משפט הערך ההתחלתי והסופי: כאשר הגבולות הבאים קיימים:

$$x[0]=\lim_{|z|\to\infty}X_+(z)$$

$$\lim_{n\to\infty}x[n]=\lim_{|z|\to 1}(z-1)X_+(z)$$

7. עבור אות בזמן בדיד $x[n]$, נגדיר את דגימת ההלמים שלו $x_c(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(t-k)$ (כלומר נביט באת בזמן רציף בו בכל נקודה ש $x[n]$ היה מוגדר, ישנו הלם, ובזמנים אחרים האות הרציף הוא זהותית אפס), ואז ניתן לקבל את הקשר בין התמרת לפלס של האות הרציף (דגימת הלמים) להתמרת Z של סדרת המספרים (האות הבדיד):

$$L\{x_c(t)\}(s)=Z\{x[n]\}(z)\Big|_{z=e^s}.$$

התמרות Z ידועות

תחום התכנסות	התמרת Z	אות בזמן בדיד
$z \in \mathbb{C}$	1	$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$
$z \in \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\}, & m>0 \\ \mathbb{C}, & m=0 \\ \mathbb{C} \setminus \{\infty\}, & m<0 \end{cases}$	z^{-m}	$\delta[n-m] = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$
$\|z\| > 1$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$
$\|z\| < 1$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$-u[-n-1]$
$\|z\| > \|a\|, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$a^n u[n]$
$\|z\| < \|a\|, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$-a^n u[-n-1]$
$\|z\| > \|a\|, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$na^n u[n]$
$\|z\| < \|a\|, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$-na^n u[-n-1]$
$\|z\| > 1$	$\frac{z^2 - z\cos\Omega_0}{z^2 - 2z\cos\Omega_0 + 1}$	$\cos[\Omega_0 n] u[n]$
$\|z\| > 1$	$\frac{z\sin\Omega_0}{z^2 - 2z\cos\Omega_0 + 1}$	$\sin[\Omega_0 n] u[n]$
$\|z\| > r$	$\frac{z^2 - rz\cos\Omega_0}{z^2 - 2rz\cos\Omega_0 + r^2}$	$r^n \cos[\Omega_0 n] u[n]$
$\|z\| > r$	$\frac{rz\sin\Omega_0}{z^2 - 2rz\cos\Omega_0 + r^2}$	$r^n \sin[\Omega_0 n] u[n]$
	$\frac{z}{z^2+1}$	$\sin\left[\frac{n\pi}{2}\right] u[n]$
	$\frac{z^2}{z^2+1}$	$\cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] u[n]$
	$z^{-b}\frac{z}{z-a} = \frac{z^{1-b}}{z-a}$	$a^{n-b} u[n-b]$
$\|z\| > \|a\|, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{z-a}$	$a^{n-1} u[n-1]$
$\|z\| < \|a\|, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{z-a}$	$-a^{n-1} u[-n]$

תכונות התמרת Z

אות בזמן בדיד	התמרת Z	תחום התכנסות
$x[n]$	$X(z)$	ROC_X
$y[n]$	$Y(z)$	ROC_Y
$ax[n]+bx[n],\ a,b\in\mathbb{C}$	$aX(z)+bY(z)$	לפחות $ROC_X\cap ROC_Y$
$x[n-n_0]$	בהתמרה דו-צדדית: $X(z)z^{-n_0}$ בהתמרה חד-צדדית: $Z_+\{y[n+k]\}=z^kY_+(z)-z^k\sum_{m=0}^{k-1}y(m)z^{-m}$ $Z_+\{y[n-k]\}=z^{-k}Y_+(z)-z^{-k}\sum_{m=1}^{k}y(-m)z^{m}$ $\Rightarrow\begin{cases}Z_+\{y[n+1]\}=zY_+(z)-zy(0)\\ Z_+\{y[n-1]\}=z^{-1}Y_+(z)+y(-1)\end{cases}$	ROC_X בתוספת אולי של $z=0$
$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X\left(e^{-j\omega_0}z\right)$	ROC_X
$a^n x[n]$	$X\left(a^{-1}z\right)$	רדיוסי ההתכנסות מוכפלים ב $\lvert a\rvert$
$x[-n]$	$X\left(z^{-1}\right)$	רדיוס ההתכנסות הוא ההופכי של הרדיוס המקורי
$\begin{cases}x[r], & n=rk\\ 0, & else\end{cases}$	$X\left(z^k\right)$	רדיוס ההתכנסות הוא רדיוס המקורי בחזקת $\frac{1}{k}$
$x[n]*y[n]$	$X(z)Y(z)$	לפחות $ROC_X\cap ROC_Y$
$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	לפחות $ROC_X\cap\{z:\lvert z\rvert>1\}$
$x^*[n]$	$X^*(-z)$	
$nx[n]$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	ROC_X
$x[n]y[n]$		
$x[n]-x[n-1]$		
$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$		
$nx[n]$		
$x[n]$ ממשי	$X^*(z)=X(z^*)$ $X_+^*(z)=X_+(z^*)$	

התמרת פורייה בזמן בדיד

הגדרה – התמרת פורייה בזמן בדיד (Discrete Time Fourier Transform):

עבור אות בזמן בדיד $x[n]$, נגדיר את התמרת פורייה בזמן בדיד:

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n},\qquad \Omega\in\mathbb{R}$$

את ההתמרה ההפוכה נחשב ע"י

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

הערות/תוצאות:

1. באופן דואלי להתמרת לפלס ופורייה בזמן בדיד, התמרת פורייה בזמן בדיד קיימת כאשר התמרת Z של האות קיימת (מתכנסת) עבור $|z|=1$, ואז, כאשר X_F התמרת פורייה בזמן בדיד ו X_Z התמרת Z:
$$X_F(\Omega)=X_Z\left(z=e^{j\Omega}\right)$$
2. התמרת פורייה בזמן בדיד מחזורית במחזור של 2π.
3. התמרת פורייה של אות היא מחזורית אס"ם האות בדיד.
4. התמרת פורייה של אות היא סימטרית (זוגית) אס"ם האות ממשי.
5. כאשר האות $x[n]$ ממשי, מתקיים $X(-\Omega)=X^*(\Omega)$, כלומר ניתן לשחזר את האות $x[n]$ רק על סמך ידיעת $X(\Omega)$ בקטע $[0,\pi]$.
6. משפטי פרסבל המתאימים (וע"י שימוש במחזוריות- 2π של התמרת פורייה בזמן בדיד):
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left|X(\Omega)\right|^2d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(\Omega)\right|^2d\Omega$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y^*[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)Y^*(\Omega)d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)Y^*(\Omega)d\Omega$$
7. הקשר בין התמרת פורייה בזמן בדיד להתמרת פורייה בזמן רציף, עבור אות רציף $x_c(t)$ שנדגם לאות בדיד ע"י $x[n]=x_c(nT)$ הוא:
$$Z\left\{x[n]\right\}(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{1}{T}L\left\{x_c(t)\right\}(s)\Big|_{s=j\frac{\Omega}{T}}$$

התמרות פורייה בזמן בדיד ידועות

התמרת פורייה בזמן בדיד	אות בזמן בדיד
1	$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\0, & n\neq 0\end{cases}$
$e^{-j\Omega n_0}$	$\delta[n-n_0]$
$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\Omega-2\pi k)$	$u[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\0, & n<0\end{cases}$
$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\omega_0-2\pi k)$	$e^{j\omega_0 n}$
$\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\omega_0-2\pi k)+\delta(\Omega+\omega_0-2\pi k)$	$\cos\omega_0 n$
$\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\omega_0-2\pi k)-\delta(\Omega+\omega_0-2\pi k)$	$\sin\omega_0 n$
$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$	1
$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\begin{cases}1, & 2\pi k\leq\lvert\Omega\rvert\leq 2\pi k+\alpha\\0, & 2\pi k+\alpha<\lvert\Omega\rvert\leq 2\pi k+\pi\end{cases}$	$\frac{\alpha}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha n}{\pi}\right)=\frac{\sin\alpha n}{\pi n},\qquad 0<\alpha<\pi$

תכונות התמרת פורייה בזמן בדיד

מס	אות בזמן בדיד	התמרת פורייה בזמן בדיד
1	$x[n]$	$X(\Omega)$
2	$y[n]$	$Y(\Omega)$
3	$ax[n]+bx[n],\ a,b\in\mathbb{C}$	$aX(\Omega)+bY(\Omega)$
4	$x[n-n_0]$	$X(\Omega)e^{-j\Omega n_0}$
5	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(\Omega-\omega_0)$
6	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
7	$x[n]*y[n]$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
8	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(s)Y(\Omega-s)ds$
9	$x[n]-x[n-1]$	$\left(1-e^{-j\Omega}\right)X(\Omega)$
10	$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)+\pi X(\Omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$
11	$nx[n]$	$j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$
12	ממשי $x[n]$	$\begin{cases} X(\Omega)=X^*(-\Omega) \\ \operatorname{Re}X(\Omega)=\operatorname{Re}X(-\Omega) \\ \operatorname{Im}X(\Omega)=-\operatorname{Im}X(-\Omega) \\ \lvert X(\Omega)\rvert=\lvert X(-\Omega)\rvert \\ \arg X(\Omega)=-\arg X(-\Omega) \end{cases}$

דגימה ושחזור של אות

דגימת הלמים

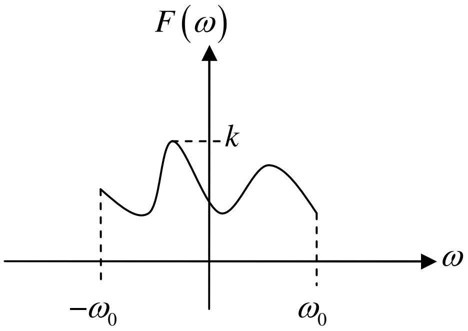
נביט בדגימה של אות רציף ע"י הכפלה ברכבת הלמים, בזמן רציף, ושחזורו ע"י מסנן אידיאלי.

אם האות $f(t)$ חסום בתדר (מוגבל סרט), כלומר עבור ההתמרה שלו מתקיים $F(\omega)=0\ :\ \forall|\omega|>\omega_0$, אזי ניתן לשחזר את האות במלואו מדגימותיו, כאשר תדר הדגימה הוא לפחות $\omega_{S\min}=2\omega_0$. תדר זה נקרא תדר $Nyquist$.

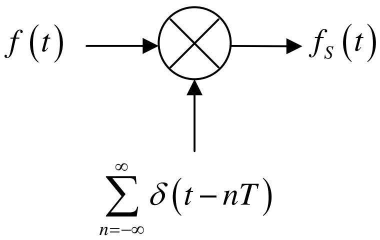
דגימות האות $f(t)$, בזמן בדיד, יהיו האות הבא:

$$f_S[n]=f(nT)=f\left(\frac{2\pi}{\omega_S}n\right)$$

כאשר נקרא ל ω_0 תדר הקיטעון ו ω_S תדר הדגימה.



את הדגימה של האות נבצע ע"י הכפלה בזמן ברכבת הלמים, ולכן בתדר נקבל קונבולוציה עם רכבת הלמים, כלומר בתדר נקבל את התמרת האות המקורי משוכפלת אינסוף פעמים, כאשר המרחק בין כל שכפול הוא ω_S.



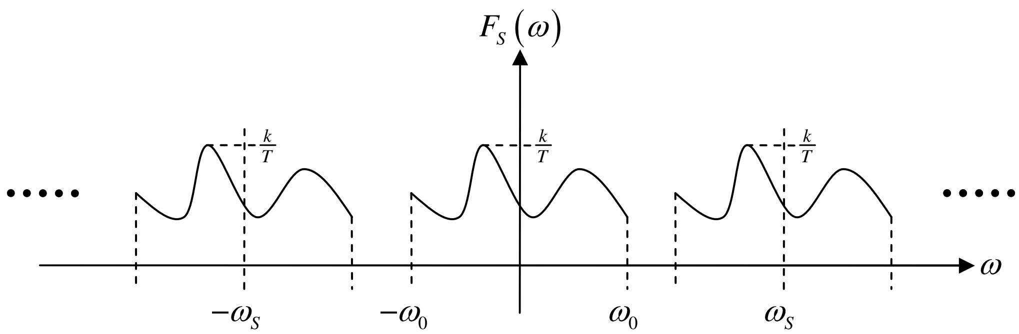
ואז האות הדגום $f_S(t)$ הוא:

$$f_S(t)=f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)$$

ובמישור התדר (* מסמן קונבולוציה):

$$F_S(\omega)=\frac{1}{2\pi}F\{f(t)\}*F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right\}=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi n}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\omega-\frac{2\pi n}{T}\right)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_S)$$



כאן אנו רואים את הסיבה לכך שבחרנו תדר דגימה גדול מפעמיים תדר הקיטעון של האות המקורי – אחרת שכפולי האות המקורי יבוצעו באופן חופף אחד על השני (Overlapping).

את האות הדגום הזה ניתן לעבד במחשב. אם רוצים לשחזר את האות המקורי, המשימה היא פשוטה מכיוון שבמישור התדר יש לנו את האות משוכפל אינסוף פעמים:

$$F_S(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_S)$$

כל מה שיש לעשות הוא להעביר את האות הדגום דרך מסנן מעביר נמוכים עם הגבר של T, וכך נקבל רק את השכפול הראשון של האות, כלומר את האיבר שמתאים ל $n=0$ בסכימה:

$$F(\omega)=T\cdot F_S(\omega,n=0)=T\cdot\frac{1}{T}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_S)\right]_{n=0}=T\cdot\frac{1}{T}F(\omega)=F(\omega)$$

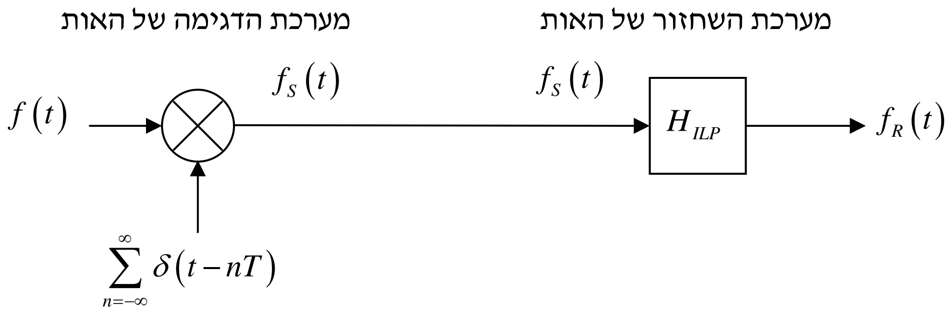
שאר השכפולים יסוננו.

בנוסף, יש לשים לב שתדר הסינון של המסנן צריך להיות גדול מתדר הקיטעון של האות המקורי, וקטן מתדר הדגימה פחות תדר הקיטעון, כלומר תגובת התדר של המסנן האידיאלי היא

$$H_{ILP}(\omega)=\begin{cases}T, & |\omega|<\omega_{ILP}\\ 0, & |\omega|>\omega_{ILP}\end{cases}$$

כאשר $\omega_0\le\omega_{ILP}\le\omega_S-\omega_0$. נדון במקרה הפשוט שבו $\omega_S=2\omega_0$, ואז $\omega_{ILP}=\omega_0$.

שימו לב שיש לדעת את תדר הדגימה (כי צריך להכפיל ב $T=\frac{2\pi}{\omega_S}$) של האות כדי לשחזר אותו.



לאחר העברת האות הדגום במסנן, נקבל את התמרת פורייה של האות המשוחזר:

$$F_R(\omega)=F_S(\omega)H_{ILP}(\omega)$$

ולכן, בתחום הזמן האות המשוחזר יהיה הקונבולוציה של האות הדגום עם פונקציה מצורת sinc (ההתמרה ההפוכה של חלון – תגובת התדר של המסנן):

$$f_R(t)=f_S(t)*h_{ILP}(t)=\left(f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right)*\left(T\frac{\omega_{ILP}}{\pi}\operatorname{sinc}(\omega_{ILP}t)\right)$$

$$=\frac{\omega_{ILP}T}{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)\right)*\operatorname{sinc}(\omega_{ILP}t)=2\frac{\omega_{ILP}}{\omega_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\operatorname{sinc}(\omega_{ILP}(t-nT))$$

לסיכום, קיבלנו שכאשר אנו דוגמים אות בזמן רציף, החסום בתדר ע"י ω_0, ע"י רכבת הלמים בתדר ω_S שמקיים $\omega_S\ge2\omega_0$, אז נוכל לשחזר את האות במלואו, כלומר (כאשר $\omega_S=2\omega_0$, ואז $\omega_{ILP}=\omega_0$):

$$f_R(t)=2\frac{\omega_{ILP}}{\omega_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\operatorname{sinc}\left(\omega_{ILP}\left(t-n\frac{2\pi}{\omega_S}\right)\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\operatorname{sinc}(\omega_0t-n\pi)=f(t)$$

נשים לב שעבור $t=kT=k\frac{2\pi}{\omega_S}$, כלומר בזמנים בהם דגמנו את האות המקורי, מתקיים תמיד

$$f_R(t)\big|_{t=kT}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\operatorname{sinc}\left(\omega_{ILP}\left(k\frac{2\pi}{\omega_S}-n\frac{2\pi}{\omega_S}\right)\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\operatorname{sinc}(\pi(k-n))=f(t)$$

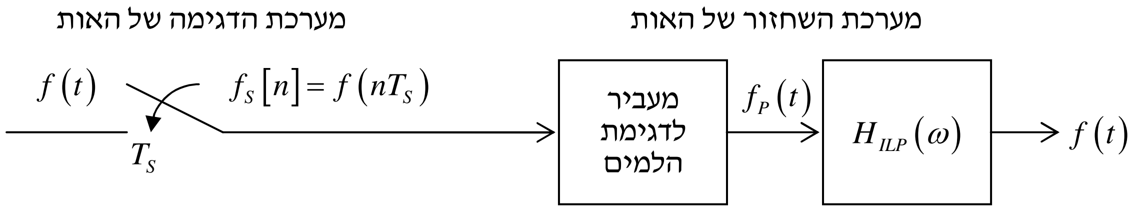
$$f_R(kT)=f(kT)$$

מכיוון ש

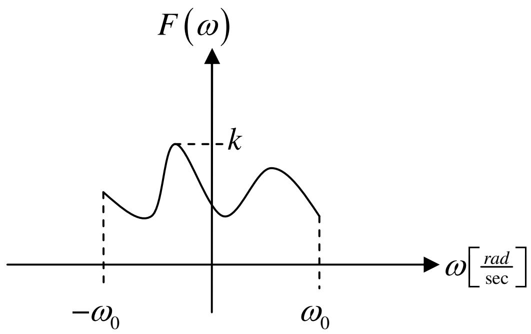
$$\operatorname{sinc}n\pi=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq0\end{cases}$$

דגימה ע"י מפסק

כעת, נביט בדגימה של אות רציף ע"י סגירה של מפסק כל T_S שניות, וע"י כך יצירת אות דגום בזמן בדיד.



נניח שהתמרת פורייה של האות המקורי חסומה בתדר ע"י ω_0 :



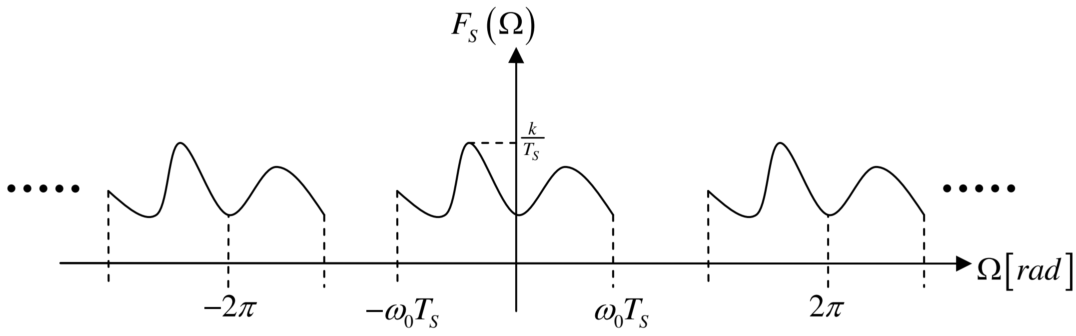
ניתן להראות שהתמרת פורייה בזמן בדיד של האות הבדיד הדגום $f_S[n]$, היא

$$F_S(\Omega)=\frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega-2\pi k}{T_S}}=\frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\left(\frac{\Omega-2\pi k}{T_S}\right)$$

כאשר $F(\omega)$ היא התמרת פורייה של אות הכניסה הרציף $f(t)$.

וקשר כללי יותר:

$$Z\{f_S[n]\}(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{1}{T}L\{f(t)\}(s)\Big|_{s=j\frac{\Omega}{T}}$$



כלומר, קיבלנו את התמרת פורייה של האות המקורי, משוכפלת אינסוף פעמים במחזור 2π , ומכווצת (הכפלת ארגומנט ההתמרה ב $\frac{1}{T_S}>1$). נשים לב שבנוסף לשכפול האות ולכיווצו, גודלו מוכפל ב $\frac{1}{T_S}$.

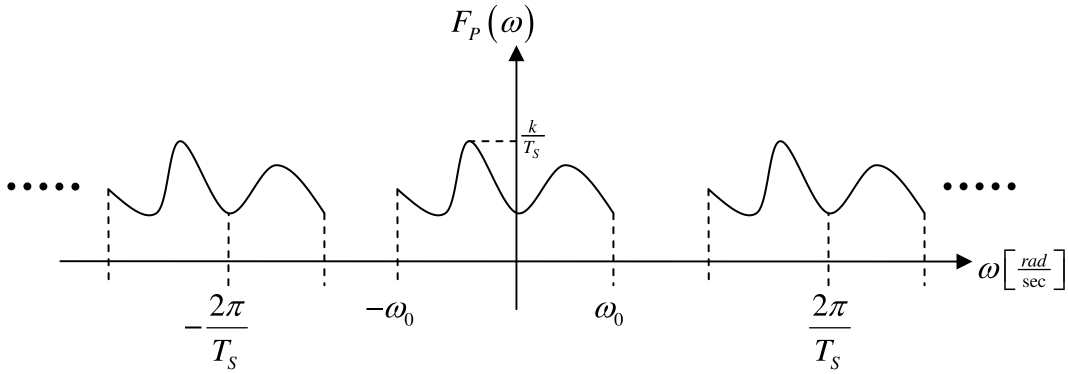
כדי לשחזר את האות, יש להמיר אותו לאות רציף ולאחר מכן לסנן אותו.

ראשית, האות מוכנס למערכת שמעבירה את האות הבדיד הדגום $f_S[n]$ לאות רציף $f_P(t)$, ע"י כך שהתמרת פורייה של האות $f_P(t)$ נתונה ע"י

$$F_P(\omega)=F_S(\Omega)\Big|_{\Omega=\omega T_S}=F_S(\omega T_S)=\frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\left(\frac{\omega T_S-2\pi k}{T_S}\right)=\frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\left(\omega-\frac{2\pi k}{T_S}\right)$$

$$=F\left\{f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_S)\right\}$$

כלומר, מתבצעת מתיחה בחזרה של התמרת פורייה בזמן בדיד, וכך אנו מקבלים בעצם את התמרת פורייה של האות המקורי $f(t)$, כאשר הוא מוכפל בזמן ברכבת הלמים – כלומר התמרתו היא הקונבולוציה של התמרת הפורייה $F(\omega)$ עם רכבת הלמים – וזהו מה שקיבלנו גם בשיטת הדגימה הקודמת.



שנית, נרצה לסנן את התמרת הפורייה המקורית של האות, ולכן נעביר את האות $f_P(t)$ במסנן מעביר נמוכים אידיאלי $H_{ILP}(\omega)$ ובנוסף נרצה שהמסנן יכפיל את ההתמרה ב T_S, וכך נקבל את החלק בהתמרה שמתקבל מ $k=0$. כך נקבל את האות המקורי.

תיאור מערכות במרחב המצב

תיאור מצב של מערכת סיבתית, ליניארית וקבועה בזמן, בזמן רציף:

$$\begin{cases} \dot{\underline{q}}(t) = A_{(n\times n)}\underline{q}(t) + B_{(n\times m)}\underline{x}(t) \\ \underline{y}(t) = C_{(k\times n)}\underline{q}(t) + D_{(k\times m)}\underline{x}(t) \end{cases}$$

כאשר A,B,C,D מטריצות שגודלן מסומן, $\underline{x}$ וקטור m הכניסות למערכת, $\underline{q}$ וקטור n משתני המצב הפנימיים של המערכת, $\dot{\underline{q}}$ נגזרת זמנית של $\underline{q}$, ו $\underline{y}$ וקטור k המוצאים של המערכת.
עבור מערכת קבועה בזמן, איברי המטריצות קבועים.

הערות:

1. ייתכן שווקטור (או מטריצה) יתנוון, במקרה, למשל, שאין יותר ממוצא אחד, לגודל 1×1, כלומר למספר (או לוקטור).
2. אם אין צמצומים בפונקצית התמסורת של המערכת, אז תחום ההתכנסות הוא ימינה מהקוטב הימני ביותר של פונקצית התמסורת, כאשר הקטבים הם הערכים העצמיים של המטריצה A.

דרכי פתרון המערכת:

1. פתרון באופן ישיר (קונבולוציה):

$$\underline{q} = e^{At}q(0^-) + e^{At} * B\underline{x} = e^{At}q(0^-) + \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)}B\underline{x}d\tau$$

2. פתרון ע"י התמרת לפלס חד-צדדית:

$$\underline{Y}_+(s) = \underbrace{C(sI-A)^{-1}\underline{q}(0^-)}_{ZIR} + \underbrace{H_+(s)\underline{X}_+(s)}_{ZSR}$$

$$H_+(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

3. ניתן ללכסן את A, כלומר לחשב את $\underline{A} = T^{-1}AT$, להגדיר וקטור מצב $\underline{z} = T^{-1}\underline{q}$, ולפתור את המערכת הפשוטה יותר:

$$\dot{\underline{z}} = T^{-1}AT\underline{z} + T^{-1}B\underline{x}$$
$$\underline{y} = CT\underline{z} + D\underline{x}$$

עבור מערכת משוואות מצב בזמן בדיד:

$$\begin{cases} \underline{q}[n+1] = A_{n\times n}\underline{q}[n] + B_{n\times m}\underline{x}[n] \\ \underline{y}[n] = C_{l\times n}\underline{q}[n] + D_{l\times m}\underline{x}[n] \end{cases}$$

הפתרון ע"י התמרת Z_+ הוא:

$$\underline{Y}_+(z) = \underbrace{C(zI-A)^{-1}z\underline{q}(0^-)}_{ZIR} + \underbrace{H_+(z)\underline{X}_+(z)}_{ZSR}$$

$$H_+(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$$

אם אין צמצומים בפונקצית התמסורת, אז תחום ההתכנסות הוא מחוץ למעגל שרדיוסו הוא גודל הקוטב הגדול ביותר של פונקצית התמסורת, כאשר הקטבים הם הערכים העצמיים של המטריצה A.

מימוש מערכת בעזרת בקר CCF

מימוש מערכת המצב (חישוב ארבעת המטריצות) מתוך המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את המערכת, באמצעות בקר CCF (Controllable Canonical Form) מתבצע לאחר שמגדירים את משתני המצב להיות

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = y \\ q_2 = \dot{y} = \dot{q}_1 \\ q_3 = \ddot{y} = \dot{q}_2 \\ \vdots \end{cases}$$

עבור המשוואה הדיפרנציאלית, כאשר $M \le N$:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{M} b_n x^{(n)}(t)$$

כאשר מנרמלים את המשוואה ל $a_N = 1$, מקבלים את המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{N-1} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{M-1} \end{pmatrix}, \qquad D = 0$$

עבור פונקצית התמסורת, במקרה פרטי הבא :

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

נקבל את המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad D = 0$$

מטריצת המעבר

הגדרת "מטריצת המעבר" e^{At} :

מטריצת המעבר מוגדרת באופן דומה לטור טיילור של e^{x} :

$$\Phi(t)=e^{At}\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\dots$$

תכונות/תוצאות בהקשר של מטריצת המעבר e^{At} :

1. המטריצה e^{At} הפיכה (לא סינגולארית), גם אם A אינה הפיכה.
2. $e^{At}e^{A\tau}=e^{A(t+\tau)}$.
3. מהגדרת המטריצה e^{At}, ניתן לחשב את המטריצה A :
$$\left.\frac{d}{dt}e^{At}\right|_{t=0}=\left.A+2\frac{A^2t}{2!}+3\frac{A^3t^2}{3!}+\dots\right|_{t=0}=A$$
4. מכפלת מטריצות היא קומוטטיבית, כלומר $AB=BA$, אם"ם $e^{At}e^{Bt}=e^{(A+B)t}$.
5. אם $\underline{v}$ וקטור עצמי של A, עם ערך עצמי λ, אזי $e^{At}\underline{v}=e^{\lambda t}\underline{v}$.

דרכים לחישוב e^{At} :

1. רק כאשר A אלכסונית, כלומר $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$, אזי $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$
2. התמרת לפלס הפוכה:
$$e^{At}=L^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}$$
3. לכסון המטריצה A :
תהי מטריצה T המורכבת מהוקטורים העצמיים של A, ולכן המטריצה $\underline{A}=T^{-1}AT$ היא אלכסונית, ואז
$$e^{At}=Te^{\underline{A}t}T^{-1}$$
4. שימוש במשפט קיילי-המילטון.
5. ע"פ ההגדרה, בעזרת טור. בד"כ לא שימושי.

יציבות אסימפטוטית

הגדרה :

מערכת תקרא יציבה אסימפטוטית אם עבור כל אוסף של תנאי התחלה אפשריים וכניסה זהותית אפס, יציאת המערכת $y(t)$ דועכת, כלומר $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$.

הערות :

1. יציבות אסימפטוטית מיוחסת לתגובת ZIR, משום שאנו בוחנים את כל סוגי תנאי ההתחלה, כאשר הכניסה למערכת היא אפס.
2. יש לשים לב **לא** לצמצם קטבים ואפסים בפונקצית התמסורת, משום שיציבות אסימפטוטית מיוחסת לתגובת ZIR, כלומר כניסת המערכת היא 0, ולכן אין בעצם גורמים במונה פונקצית התמסורת באופן אפקטיבי. כלומר, ניתוח היציבות מתבצעת עבור החלק השמאלי בלבד של משוואת המערכת – החלק בו מופיע מוצא המערכת.
3. בזמן רציף, התגובה לכניסה אפס (ZIR) מורכבת מצירוף הפתרונות $\Sigma\alpha_i e^{\lambda_i t}$ או פתרונות מהצורה $t^k e^{\lambda_i t}$ במקרה של שורשים מריבוי גדול מ-1.
4. בזמן בדיד, התגובה לכניסה אפס (ZIR) מורכבת מצירוף הפתרונות $\Sigma\alpha_i\lambda_i^{\,n}$ או פתרונות מהצורה $n^k\lambda_i^{\,n}$ במקרה של שורשים מריבוי גדול מ-1.

יציבות אסימפטוטית בזמן רציף

1. אם כל הערכים העצמיים (שורשי הפולינום האופייני, או שורשי המכנה בפונקצית התמסורת, לפני ביצוע צמצומים) של המערכת יהיו בחצי השמאלי הפתוח של המישור.
2. אם במרחב המצב, שורשי המכנה של איברי המטריצה $(sI-A)^{-1}$ נמצאים בחצי השמאלי הפתוח של המישור. שורשים אלו הם הע״ע של המטריצה A, לכן דרישה שקולה היא שכל הע״ע של המטריצה A יהיו בחצי השמאלי של מישור s.

יציבות אסימפטוטית בזמן בדיד

1. אם כל הערכים העצמיים של המערכת יהיו בתוך מעגל היחידה. ע״ע אלה הם קטבי פונקצית התמסורת.
2. מתמירים את המכנה של $H(z)$ למישור s, ע״י העתקת מביוס מהצורה: $z=\frac{1+s}{1-s} \;\Rightarrow\; s=\frac{z-1}{z+1}$. המערכת יציבה $BIBO$ אם המונה של תוצאת ההצבה הוא פולינום הורביצי, כלומר הקטבים של $H(z)$ מקיימים $|z|<1$.
3. אם במרחב המצב, שורשי המכנה של איברי המטריצה $(zI-A)^{-1}$ נמצאים בתוך מעגל היחידה.
4. אם $\lim_{z\to\infty} H(z)<\infty$

יציבות BIBO (Bounded Input → Bounded Output)

הגדרה:

מערכת תקרא יציבה $BIBO$ אם עבור כל כניסה חסומה, ותנאי התחלה אפס, היציאה חסומה.

הערות:

1. יציבות $BIBO$ מיוחסת לתגובת ZSR, משום שאנו בוחנים את כל סוגי הכניסה למערכת, כאשר תנאי ההתחלה הם אפס.
2. יש להסתכל על המערכת לאחר צמצומים אפשריים בפונקצית התמסורת.
3. שרשור בטור של מערכות יציבות $BIBO$ מהווה בהכרח מערכת יציבה $BIBO$.

יציבות BIBO בזמן רציף

1. אס"ם $\|h\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$.
2. אס"ם במערכת קונבולוציה מתקיימים שני התנאים הבאים:
   1. לפונקצית התמסורת של המערכת דרגת המונה קטנה או שווה לדרגת המכנה.
   2. הציר $s = j\omega$ מוכל בתחום ההתכנסות של פונקצית התמסורת וע"מ שזה יתקיים חייב להתקיים:
      א. אם המערכת סיבתית (ROC ימני) על הקטבים להיות בחצי המישור השמאלי בלבד).
      ב. אם המערכת אנטי-סיבתית (ROC שמאלי) על הקטבים להיות בחצי מישור הימני בלבד).
3. אס"ם במערכת סיבתית או המוגדרת ע"י מד"ר מתקיימים שני התנאים הבאים:
   1. לפונקצית התמסורת של המערכת דרגת המונה קטנה או שווה לדרגת המכנה.
   2. כל הקטבים של המערכת נמצאים בחצי מישור השמאלי הפתוח.
4. אם במערכת סיבתית מתקיימים שני התנאים הבאים:
   1. לפונקצית התמסורת של המערכת דרגת המונה קטנה או שווה לדרגת המכנה.
   2. המערכת יציבה אסימפטוטית.
5. אס"ם עבור מערכת ליניארית שאינה בהכרח קבועה בזמן (מערכת גרעין), מתקיים $\underset{t\in\mathbb{R}}{Sup}\int_{-\infty}^{\infty}|K(t,s)|\,ds < \infty$,

   כאשר $K(t,s)$ היא פונקצית הגרעין של המערכת.
6. אס"ם במרחב המצב, קטבי פונקצית התמסורת נמצאים בחצי השמאלי הפתוח של המישור.
7. אם במרחב המצב, המערכת יציבה אסימפטוטית.

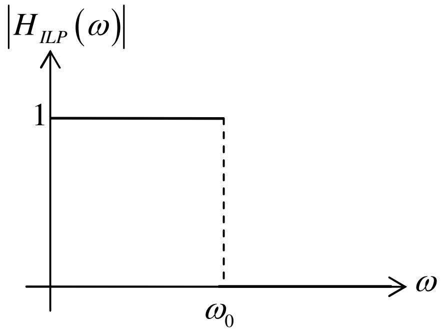
יציבות BIBO בזמן בדיד

1. אס"ם $\|h[n]\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| < \infty$, ואז מתקיים: $\|y\|_\infty < \|h\|_1\|x\|_\infty$
2. אס"ם במערכת קונבולוציה תחום ההתכנסות של $H(z)$ כולל את מעגל היחידה.
3. אס"ם במערכת סיבתית או המוגדרת ע"י משוואת הפרשים, כל הקטבים של המערכת נמצאים בתוך מעגל היחידה.
4. אס"ם במערכת אנטי סיבתית או המוגדרת ע"י משוואת הפרשים, כל הקטבים של המערכת נמצאים מחוץ למעגל היחידה.
5. אם (תנאי מספיק אך לא הכרחי): $\underset{n\in\mathbb{Z}}{Sup}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|K[n,k]| < \infty$
6. אם המערכת סיבתית ויציבה אסימפטוטית.
7. אס"ם במרחב המצב, קטבי הפולינום $H_+(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$ נמצאים בתוך מעגל היחידה.
8. אם במרחב המצב, המערכת יציבה אסימפטוטית.

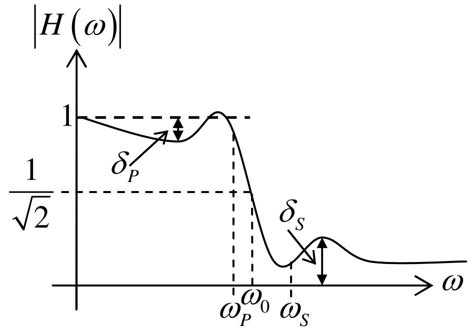
הערה: כאן אין דרישה לכך שדרגת המונה תהיה קטנה מדרגת המכנה, בניגוד לדרישה הזו בזמן רציף, מכיוון שבזמן בדיד, הכפלה ב z אינה גזירה, אלא הזזה בזמן (פעולת הגזירה היא זו שגורמת לחוסר יציבות $BIBO$ בזמן רציף).

תכן מסנן מעביר נמוכים

ראשית נביט במסנן מעביר נמוכים אידיאלי (Ideal Low Pass Filter):



וכעת נביט במסנן מעביר נמוכים שאינו בהכרח אידיאלי, שנקרא גם מסנן *Butterworth* .



בצורה כללית, תגובת התדר של מסנן *Butterworth* מסדר N מקיימת

$$\left|H(\omega)\right|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2N}}$$

ובעלת התכונות הבאות:

1. גודלה היא פונקציה מונוטונית יורדת, אשר מקיימת $\left|H(0)\right|=1$
2. בתדר ω_0 מתקיים $\left|H(\omega_0)\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}=3[dB]$
3. בדיאגראמת בודה להגבר, השיפוע האסימפטוטי יהיה $-40N\left[\frac{dB}{dec}\right]$ החל מ $\omega=\omega_0$.

בתכנון מסננים, מגדירים את הפרמטרים הבאים:

תחום ההעברה – התחום בו אנו מעוניינים שהתדרים יועברו ליציאת המערכת: $0<\omega<\omega_P$.

תחום המעבר – התחום המתווך בין התדרים להעברה והתדרים לסינון: $\omega_P<\omega<\omega_S$.

תחום הניחות – התחום בו התדרים שאנו רוצים לסנן, כלומר להנחית אותם: $\omega>\omega_S$.

גליות – המידה בה תגובת התדר מוסטת מהיותה אידיאלית, בתחום ההעברה:

$$\delta_P\triangleq\max_{0<\omega<\omega_P}\left|H(\omega)-1\right|$$

גורם הניחות – המידה בה תגובת התדר מוסטת מהיותה אידיאלית, בתחום הניחות:

$$\delta_S\triangleq\max_{\omega>\omega_S}\left|H(\omega)\right|$$

תדר קיטעון – התדר ω_0 בו מתקיים

$$\forall\omega>\omega_0:\qquad \left|H(\omega)\right|<\frac{1}{\sqrt{2}}=3[dB]$$

גורם ההבחנה:

$$d \triangleq \sqrt{\frac{(1-\delta_P)^{-2}-1}{\delta_S^{-2}-2}}$$

גורם הסלקטיביות:

$$k = \frac{\omega_P}{\omega_S}$$

סדר המסנן:

$$N = \left\lceil \frac{\log d}{\log k} \right\rceil$$

נספחים

כללי

עבור f_1, f_2 הגזירות n פעמים בנקודה t מתקיים:

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(f_1(t)f_2(t)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_1^{(k)}(t)f_2^{(n-k)}(t)$$

זהויות:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-jk\omega_0 t}=\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega kT}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\frac{1+(-1)^n}{2}=\begin{cases}1 & n=2k\\ 0 & n=2k+1\end{cases}$$

מטריצות

וקטור $\underline{v}$ יקרא וקטור עצמי של מטריצה ריבועית A כאשר

$$A\underline{v}=\lambda\underline{v}$$

ואז λ יקרא הערך העצמי של המטריצה.

חישוב ערכים עצמיים של מטריצה ריבועית:
נחשב את השורשים של הפולינום האופייני, כלומר את פתרונות המשוואה

$$|sI-A|=0$$

חישוב וקטורים עצמיים של מטריצה ריבועית בגודל $n\times n$, לאחר מציאת הערכים העצמיים שלה:
עבור על ערך עצמי, נפתור את המשוואה

$$A\underline{x}=\lambda\underline{x}$$

כאשר $\underline{x}$ וקטור בגודל $n\times 1$. נקבל n משוואות שיהיו תלויות ליניארית (כי הרי דטרמיננטת המערכת הוא 0, כפי שדרשנו למציאת הערכים העצמיים). הפתרון יהיה משפחה אינסופית של וקטורים עצמיים, ונוכל לבחור אחד.

המטריצה T שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים של A תקרא המטריצה המלכסנת של A, והמטריצה

$$\underline{A}=T^{-1}AT$$

היא אלכסונית.

הפיכת מטריצה בגודל 2×2:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

פירוק לשברים חלקיים

נניח ש- $H(s)$ היא מנה של פולינומים, כאשר דרגת המכנה גבוהה מדרגת המונה (בסוף הנספח הסבר לגבי מקרים אחרים).

ראשית מביאים את התמרת לפלס המוצגת כמנת פולינומים לצורה קנונית :

$$H(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_0+a_1s+\ldots+a_ms^m}{b_0+b_1s+\ldots+b_ns^n}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

כאשר a_i,b_i ממשיים,

z_i - הם שורשי $A(s)$ (נקראים האפסים של המערכת),

p_i - הם שורשי $B(s)$ (נקראים הקטבים של המערכת)

והנחנו $m<n$ (מעלת המונה קטנה ממעלת המכנה) .

בכדי לבצע התמרת לפלס הפוכה נרצה להגיע לביטויים סטנדרטיים.

<u>קטבים ממשיים</u>

<u>קטבים פשוטים</u>- כל קוטב מופיע פעם אחת.

$$H(s)=\frac{KA(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{c_1}{s-p_1}+\frac{c_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-p_n}\quad(*)$$

מציאת המקדמים $c_1,\ldots,c_n$:

שיטה 1- ביצוע מכנה משותף (לאגף ימין של (*)) והשוואת מקדמי החזקות בשני הצדדים.

שיטה 2- $c_i=(s-p_i)H(s)\big|_{s=p_i}$

הסבר : כל המקדמים בצד ימין של (*) מתאפסים פרט ל- c_i.

קוטב מרובה (ממשי) מסדר r :

$$H(s)=Q(s)+\frac{c_1}{s-p}+\frac{c_2}{(s-p)^2}+\ldots+\frac{c_r}{(s-p)^r}$$

מציאת המקדמים $c_1,\ldots,c_r$:

שיטה 1- ביצוע מכנה משותף לאגף ימין והשוואת מקדמי החזקות בשני הצדדים.

שיטה 2-

$$c_r=H(s)(s-p)^r\big|_{s=p}$$

$$c_m=\frac{1}{(r-m)!}\frac{d^{r-m}}{ds^{r-m}}\left\{(s-p)^rH(s)\right\}\Big|_{s=p}\quad;\ m=1,\ldots,r-1$$

ואז ע"י התמרה הפוכה :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-p_i)^r}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{r!}t^re^{p_it}u(t) & ,\ Right\ ROC\\ -\frac{1}{r!}t^re^{p_it}u(-t) & ,\ Left\ ROC\end{cases}$$

(לא לשכוח את המקדמים !!!)

תוצאה :

$$\frac{s}{(s-a)(s-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{s}{s-a}-\frac{s}{s-b}\right)$$

$$\frac{k}{(s-a)(s-b)}=\frac{k}{a-b}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)$$

2. קטבים מרוכבים

מכיוון שמקדמי הפולינום ממשיים הקטבים המרוכבים יופיעו תמיד בזוגות צמודים. ניתן להציג זוג קטבים מרוכבים ב- 3 אופנים :

$$H(s)=Q(s)+\begin{cases}\dfrac{c_1}{s+\alpha+j\omega_0}+\dfrac{c_2}{s+\alpha-j\omega_0} & .1\\ \dfrac{a_1s+a_2}{s^2+as+b} & .2\\ \dfrac{b_1(s+\sigma)+b_2\omega_0}{(s+\sigma)^2+\omega_0^2} & .3\end{cases}$$

1. מציאת c_1,c_2 בדומה לקטבים ממשיים

$$c_2=(s+\alpha-j\omega_0)H(s)\Big|_{s=-\alpha+j\omega_0},\quad c_1=c_2^*$$

2. מציאת a_1,a_2 ע"י מכנה משותף והשוואת מקדמים.
3. מציאת σ,ω_0 ע"י השלמת המכנה לתבנית ריבועית ואת b_1,b_2 ע"י מכנה משותף והשוואת חזקות.

הצגה זו שימושית מכיוון שהיא מתאימה לטבלת ההתמרות.

מקרים בהם ההנחה $m<n$ לא תקפה

נניח ש- $H(s)$ היא מנת פולינומים אך דרגת המונה גבוהה מדרגת המכנה או שווה לו, אפשר להשתמש בחלוקת פולינומים ולהציג אותה כ- $H(s)=F(s)+\dfrac{N(s)}{D(s)}$ כאשר $F(s),N(s),D(s)$ הם פולינומים והדרגה של $D(s)$ גבוהה משל $N(s)$, וכעת לפרק לשברים חלקיים את $\dfrac{N(s)}{D(s)}$.

במקרה שהתמרת לפלס היא $W(s)\dfrac{N(s)}{D(s)}$ כאשר $N(s),D(s)$ הם פולינומים ו- $W(s)$ היא פונקציה שיודעים את השפעת הכפלתה בפונקציה כלשהי במישור s (לדוגמא e^{-st_0}), ניתן לפרק לשברים חלקיים את $\dfrac{N(s)}{D(s)}$ ולהוסיף את השפעת ההכפלה ב- $W(s)$ לבסוף.

מתודת Routh Hurwitz

לעיתים נעמוד בפני פולינום ממעלה גבוהה, שקשה לחשב את שורשיו במפורש (לצורך קביעה האם כל שורשיו בעלי חלק ממשי שלילי ממש). במצב זה ניתן להיעזר במתודת Routh-Hurwitz - מתודה זו בודקת האם כל שורשיו של פולינום מסדר כלשהו הם בעלי חלק ממשי שלילי ממש.

לפני הפעלה האלגוריתם שלהלן, ניתן לבדוק במהירות פולינום ריבועי:
שני השורשים של פולינום ריבועי הם בעלי חלק ממשי שלילי ממש אס״ם שלושת מקדמי הפולינום חיוביים ממש.

מתודת Routh-Hurwitz:

1. נרמול הפולינום לצורה $P(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n x^{N-n}$, כאשר $a_0>0$ (מקדם החזקה הגבוהה ביותר חיובי ממש).
2. אם כל מקדמי הפולינום חיוביים נמשיך, אחרת הפולינום אינו הורוביצי.
3. נבנה את מערך Routh, הכולל $N+1$ שורות, ע״י האלגוריתם הבא:
   א. שתי השורות העליונות יכללו את מקדמי הפולינום, בסדר מלמעלה למטה ומשמאל לימין. עבור N זוגי, יש לרשום 0 בתא הימיני-תחתון.
   ב. כל תא שמתחת לשתי שורות אלו יחושב בדוגמה הבאה, עבור פולינום מדרגה 7:

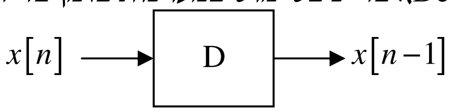
7	$a_0>0$	a_2	a_4	a_6
6	a_1	a_3	a_5	a_7
5	$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$	$b_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$	$b_3=\frac{a_1a_6-a_0a_7}{a_1}$	$b_4=0$
4	$c_1=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1}$	$c_2=\frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1}$	$c_3=\frac{b_1a_7-a_1b_4}{b_1}$	$c_4=0$
3	$d_1=\frac{c_1b_2-b_1c_2}{c_1}$	$d_2=\frac{c_1b_3-b_1c_3}{c_1}$	$d_3=0$	
2	$e_1=\frac{d_1c_2-c_1d_2}{d_1}$	$e_2=\frac{d_1c_3-c_1d_3}{d_1}$	$e_3=0$	
1	$f_1=\frac{e_1d_2-d_1e_2}{e_1}$	$f_2=0$		
0	$g_1=\frac{f_1e_2-e_1f_2}{f_1}$	$g_2=0$		

4. כל שורשיו של הפולינום המדובר הינם בעלי חלק ממשי שלילי ממש אס״ם כל האיברים בעמודה השמאלית ביותר חיוביים ממש.
5. בנוסף, מספר חילופי הסימן בעמודה השמאלית ביותר שווה למספר השורשים בחלק הימני של המישור.

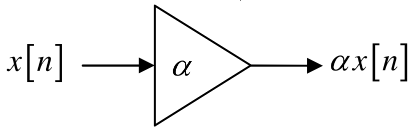
פולינום שכל שורשיו נמצאים בחלק השמאלי של המישור הקרא פולינום הורוביצי.

רכיבים במעגל

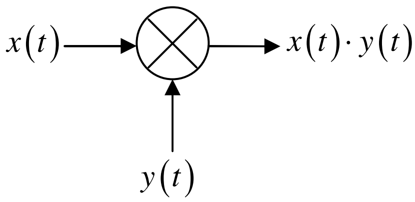
משהה – יחידה המכניסה השהייה (Delay). בד"כ בשימוש במערכות בזמן בדיד :



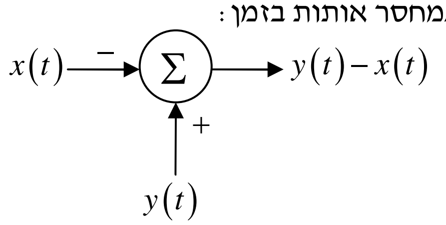
מכפל – מכפיל את האות הנכנס בקבוע α . לדוגמה בזמן בדיד :

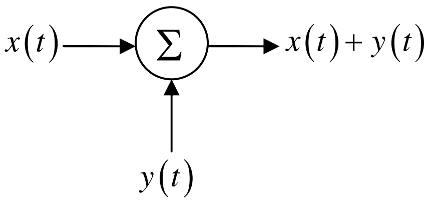


מכפל אותות בזמן :



מסכם/מחסר אותות בזמן :





טורי טיילור

הגדרת טור טיילור :

אם $g(x)$ גזירה אינסוף פעמים ב x_0 , ניתן להגדיר טור חזקות

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

טורי טיילור ידועים :

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$	$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$			

ייצוג מערכת חשמלית ע״י משוואה דיפרנציאלית

צורה כללית של משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר N :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

<u>משפט הקיום והיחידות</u> : בהינתן פונקציה $y(t)$ המקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית, ובעלת M נגזרות עבור $t \ge t_0$ וכן תנאי התחלה $\left\{ y(t_0), y^{(1)}(t_0), ..., y^{(N-1)}(t_0) \right\}$, בזמן t_0, פתרון זה קיים יחיד.

<u>טענה (ליניאריות הפתרון)</u> :

אם y_1 פותר את המד״ר עבור כניסה x_1 ותנאי התחלה

$$y_1(t_0), y_1'(t_0), ..., y_1^{(N-1)}(t_0)$$

וכן y_2 פותר את המד״ר עבור כניסה x_2 ותנאי התחלה

$$y_2(t_0), y_2'(t_0), ..., y_2^{(N-1)}(t_0)$$

אזי $\alpha y_1 + \beta y_2$ פותרים את המד״ר עבור כניסה $\alpha x_1 + \beta x_2$ ותנאי התחלה

$$\alpha y_1(t_0) + \beta y_2(t_0), \alpha y_1'(t_0) + \beta y_2'(t_0), ..., \alpha y_1^{(N-1)}(t_0) + \beta y_2^{(N-1)}(t_0)$$

<u>הגדרות</u> :

6. <u>פתרון הומוגני</u> של המד״ר הוא פתרון משוואה כאשר $x(t) \equiv 0$.
7. <u>הפתרון ההומוגני הכללי</u> הוא פתרון הומוגני בעל N פרמטרים חופשיים, נסמן ב- y_h .
8. <u>פתרון פרטי</u> של המד״ר הוא פתרון המשוואה עבור אות הכניסה הנתון x , ללא התחשבות בתנאי ההתחלה, נסמן ב- y_p .
9. <u>פתרון בכניסה אפס (Zero Input Response)</u> : הוא פתרון המשוואה כאשר $x \equiv 0$ עבור ת״ה נתונים $\left\{ y(t_0), y^{(1)}(t_0), ..., y^{(N-1)}(t_0) \right\}$, נסמן ב- y_{ZIR} .
10. <u>פתרון בתנאי התחלה אפס (Zero State Response)</u> : אפס הוא פתרון המשוואה עבור אות הכניסה הנתון x , ועבור תנאי התחלה השווים לאפס $y(t_0) = y^{(1)}(t_0) = ... = y^{(N-1)}(t_0) = 0$, נסמן ב- $\underline{y_{ZSR}}$.
11. נסמן נגזרת בעזרת ״אופרטור״ D ואז $\frac{d^k}{dt^k} f(t) \triangleq f^{(k)}(t) \triangleq D^k f(t)$, את המד״ר ניתן לרשום בצורה : $\sum_{n=0}^{N} a_n D^n y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m D^m x(t)$. אזי הפולינום האופייני של החלק ההומוגני של המד״ר מתקבל מהחלפת D בפרמטר λ , כלומר $\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n$, שורשי הפ״א הם ערכי λ כך שהביטוי שווה לאפס.

<u>פתרון מד״ר</u> :

1. נמצא פתרון פרטי y_p .
2. נחשב את הפתרון ההומוגני הכללי y_h .
3. נחשב את ערכי הפרמטרים החופשיים של $y_p + y_h$ כך שיתאימו לתנאי ההתחלה.

<u>הערות</u> :

א. אם y_1 ו- y_2 פותרים את המד״ר עבור כניסה זהה ות״ה שונים אזי $y_1 - y_2$ הוא פתרון הומו׳.

ב. y_{ZSR} - הינו פתרון פרטי (עבור ת״ה אפס).

ג. y_{ZIR} - הינו פתרון הומוגני (אך לא הפתרון ההומוגני הכללי).

ד. $y = y_{ZIR} + y_{ZSR}$ הוא פתרון למד״ר.

<u>מציאת **פתרון הומוגני** עבור מד״ר ליניארית עם מקדמים קבועים</u> :

נסמן ב- $\lambda_1, ..., \lambda_N$ את השורשים של הפולינום האופייני של המד״ר, אזי הפתרון ההומוגני הכללי :

$$y_h(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i f_i(t)$$

כאשר $f_i(t)$ הן פונקציות עצמיות של המשוואה ההומוגנית (פתרונות)

עבור λ_i מריבוי יחיד $f_i(t)=e^{\lambda_i t}$

ועבור λ_i מריבוי $k+1$, כלומר $\lambda_i=\lambda_{i+1}=\ldots=\lambda_{i+k}$ מתקיים $f_{i+j}(t)=t^j e^{\lambda_i t}\ \ ,\ \ 0\le j\le k$

<u>מציאת **פתרון פרטי** עבור מד"ר ליניארית עם מקדמים קבועים:</u>

עבור המד"ר שלנו נרשום כך:

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}=\sum_{m=0}^{M}b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{N}a_n D^n y(t)=\sum_{m=0}^{M}b_m D^m x(t)\ \Rightarrow\ Q(D)y_p(t)=P(D)x(t)$$

כעת ננחש כי הפתרון הפרטי שלנו הוא פולינום מהצורה $y_p(t)=\sum_{n=0}^{R}\beta_n t^n$ (דרגתו $R=N-M$)

וכעת כל שנותר לעשות הוא לבצע את הגזירות (חישובי הפולינומים) בשני האגפים וע"י השוואת מקדמים נמצא את כל β_n וכך נקבל את הפתרון.

<u>פתרון פרטי של מד"ר עבור אות כניסה אקספוננציאלי:</u>

אות הכניסה הוא $e^{\alpha t}$ אזי $y_p(t)=\beta e^{\alpha t}$. נציב את הפתרון למשוואה

$$Q(D)\left(y_p(t)\right)=P(D)x(t)\Rightarrow Q(D)\left(\beta e^{\alpha t}\right)=P(D)\left(e^{\alpha t}\right)\Rightarrow \beta Q(\alpha)\left(\cancel{e^{\alpha t}}\right)=P(D)\left(\cancel{e^{\alpha t}}\right)$$

כלומר קיבלנו כי מתקיים: $\beta=\dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}=H(\alpha)\ \Rightarrow\ y_p(t)=H(\alpha)e^{\alpha t}$

ולכן **הפתרון הכללי**: $y(t)=\sum_{k=1}^{N}c_k e^{\lambda_k t}+H(\alpha)e^{\alpha t}$

- הערה: משמעות הדבר היא ש- $e^{\alpha t}$ הוא פונקציה עצמית עם ע"ע $H(\alpha)$ - פונקצית התמסורת.

<u>פתרון פרטי של מד"ר עבור אות כניסה הרמוני:</u>

נניח אות כניסה מהצורה $x(t)=\cos(\alpha t)$. ניתן להציגו ע"י אקספוננטים ולהשתמש בליניאריות:

$x(t)=\cos(\alpha t)=\frac{1}{2}\left(e^{j\alpha t}+e^{-j\alpha t}\right)$ לכן עפ"י הדוגמה הקודמת צורת הפתרון הפרטי הינה:

$$y_p(t)=\frac{1}{2}\left[H(j\alpha)e^{j\alpha t}+H(-j\alpha)e^{-j\alpha t}\right]=\mathrm{Re}\left\{H(j\alpha)e^{j\alpha t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{P(j\alpha)}{Q(j\alpha)}e^{j\alpha t}\right\}$$