כללי
יחידות:
$$f=\frac{1}{T}=\frac{\Omega}{2\pi}=[Hz]\,;\,\Omega=\left[\frac{rad}{\sec}\right]\,;\,\omega=\left[\frac{rad}{sample}\right]$$

מכפלה פנימית: (הגדרת מכפלה פנימית בקורס זה)

עבור פונקציות מחזוריות בלבד:
$$\langle x_{(t)},y_{(t)}\rangle \triangleq \int_T x_{(t)}\cdot y^*_{(t)}dt$$
$$\langle x_{(n)},y_{(n)}\rangle \triangleq \sum_{n=<N>} x_{(n)}\cdot y^*_{(n)}$$
$$x_{(t)}\cdot x^*_{(t)}=|x_{(t)}|^2$$

עבור פונקציות לא מחזוריות:
$$\langle x_{(t)},y_{(t)}\rangle \triangleq \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)}\cdot y^*_{(t)}dt$$

פונקציות מחזוריות:

זמן מחזור בסיסי = המחזור הקצר ביותר.

פונקציה מחזורית רציפה:
$$f_{(x)}=f_{(x+nT)}\;;\;n=0,1,2,3...$$
פונקציה מחזורית בדידה:
$$f_{(n)}=f_{(n+mN)}\;;\;m=0,1,2,3.....$$
$N-$ מחזור של פונקציה

משפחה הרמונית:

משפחת פונקציות מחזוריות בעלות מחזור משותף.

דוגמא בזמן רציף:
$$\phi_{k(t)}=e^{j\omega_0 kt}\;;\;k=0,\pm1,\pm2...$$
$$\omega_k=k\omega_0\quad;\;T=\frac{2\pi}{\omega_0}\;;\;\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$
עבור משפחה רציפה יש אינסוף פונקציות שונות.

דוגמא בזמן בדיד:
$$\phi_{k(n)}=e^{\frac{j2\pi kn}{N}}\;;\;k=0,\pm1,\pm2...$$
$$\omega_0=\frac{2\pi}{N}\quad;\;\omega_k=k\omega_0=\frac{k2\pi}{N}$$
- לפונקציה זו יש מחזוריות בזמן N וגם מחזוריות בתדר שהיא גם N.
- עבור משפחה דיסקרטית יש בדיוק N פונקציות שונות.

תכונות מערכת
$$X_{(t)}\rightarrow\boxed{T}\rightarrow Y_{(t)}$$

מערכת קבועה בזמן - TI:
$$T\{X_{(t-t_0)}\}=Y_{(t-t_0)}$$

מערכת לינארית:
$$X_{1(t)}\rightarrow Y_{1(t)}\;;\;X_{2(t)}\rightarrow Y_{2(t)}$$
$$\alpha X_{1(t)}+\beta X_{2(t)}\rightarrow \alpha Y_{1(t)}+\beta Y_{2(t)}$$
תנאי הכרחי אך לא מספיק ללינאריות של מע': המערכת מעבירה אפס לאפס.

זיכרון:
מערכת נקראת בעלת זיכרון אם המוצא תלוי בכניסות של העבר
$$Y_{(t)}=3\cdot X_{(t-2)}+X_{(t)}$$
זו מע' עם זיכרון מכיוון ש Y תלויה ב X קודם.

סיבתיות:
מע' נקראת סיבתית אם המוצא מושפע מערורים של ההווה ועבר ולא מערורים של עתיד.
$$Y_{(t)}=3\cdot X_{(t-2)}+X_{(t)}$$
זו מע' סיבתית מכיוון ש מוצא Y בהווה מושפע רק מכניסה X בהווה וכניסה X בעבר.

יציבות BIBO:
מע' נקראת יציבה BIBO אם עבור כניסה חסומה, גם היציאה חסומה.
אם מתקיים:
$$|X_{(t)}|\le a$$
אז כדי שהמע' תהיה יציבה חייב להתקיים:
$$|y_{(t)}|\le b$$

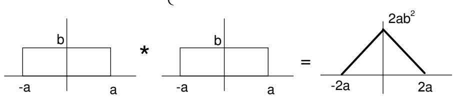
הפיכות:
המע' הפיכה אם Y היא פונקציה חח"ע.
כדי לשלול הפיכות, צריך להראות 2 כניסות שיתנו את אותה היציאה.
$$X_{(t)}\rightarrow\boxed{T}\rightarrow Y_{(t)}\;;\;Y_{(t)}\rightarrow\boxed{T^{-1}}\rightarrow X_{(t)}$$

קונבולוציה
אות רציף:
$$Y_{(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}X_{(\tau)}\cdot h_{(t-\tau)}d\tau=X_{(t)}*h_{(t)}$$
אות בדיד:
$$X_{(n)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_{(k)}\cdot\delta_{(n-k)}$$
$$\delta_{(n-k)}=\begin{cases}1 & ; \quad n=k\\0 & ; \quad n\ne k\end{cases}$$
$$Y_{(n)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_{(k)}\cdot h_{(n-k)}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}X_{(n-l)}\cdot h_{(l)}=X_{(n)}*h_{(n)}$$
הערה:
קונבולוציה בין 2 אותות מחזוריים בעלי מחזור משותף, תיתן אות מחזורי.

תכונות הקונבולוציה:
1. $x*h=h*x$.
2. $(g+h)*x=g*x+h*x$
3. $x_{(t)}*\delta_{(t)}=x_{(t)}$.
4. $(h*x)'=h'*x=h*x'$.
5. אם: $y_{(t)}=x_{(t)}*h_{(t)}$
אז: $x_{(t)}*h_{(t-t_0)}=y_{(t-t_0)}$
6. עבור דובלט: $x_{(t)}*\delta'_{(t)}=x'_{(t)}*\delta_{(t)}=x'_{(t)}$.
7. $x(t)*u(t)=x(t)*\int_{-\infty}^{t}\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t)$
8. $x(t)*\sum h(t)=\sum[x(t)*h(t)]$
9. $h(t)_{eq}=h_1(t)*h_2(t)$

הערות:
- מכפלה בזמן ↔ קונבולוציה בתדר חלקי $2\cdot\pi$.
- קונבולוציה בזמן ↔ כפל בתדר.
- דגימה בתדר ↔ קיפול בזמן.

קונבולוציה עם הלם היא שכפול של הפונקציה במיקום של ההלם.

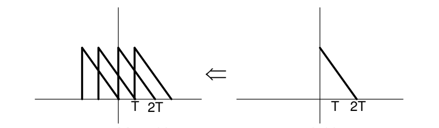
קונבולוציה בין 2 מדרגות נותנת משולש:
$$x_{(t)}=\begin{cases}b & |t|\ge a\\0 & O.W.\end{cases}$$
$$y_{(t)}=x_{(t)}*x_{(t)}=\begin{cases}0 & -2a\ge t\\2ab^2+tb^2 & 0>t\ge-2a\\2ab^2-tb^2 & 2a>t\ge0\\0 & t\ge 2a\end{cases}$$


קונבולוציה ציקלית
הגדרה:
זו קונבולוציה בין 2 אותות מחזוריים בעלי אותו מחזור משותף T.

סימון: ⊛ - T הוא זמן המחזור של שני האותות.

אות רציף:
2 האותות מחזוריים עם מחזור T.
$$x_{(t)}\xleftrightarrow{FS}a_k\;;\;y_{(t)}\xleftrightarrow{FS}b_k\;;\;z_{(t)}\xleftrightarrow{FS}c_k$$
$$z_{(t)}=x_{(t)}\overset{T}{\circledast}y_{(t)}\rightarrow\int_T x_{(\tau)}y_{(t-\tau)}d\tau$$
$$c_k=T\cdot a_k\cdot b_k$$
אות בדיד:
2 האותות מחזוריים עם מחזור N.
$$x_{(n)}\xleftrightarrow{FS}a_k\;;\;y_{(n)}\xleftrightarrow{FS}b_k\;;\;z_{(n)}\xleftrightarrow{FS}c_k$$
$$z_{(n)}=x_{(n)}\overset{N}{\circledast}y_{(n)}\rightarrow\sum_{<N>}x_{[\tau]}y_{[n-k]}$$
$$c_k=N\cdot a_k\cdot b_k$$
הערה:
בקונבולוציה ציקלית נבצע קונבולוציה של מחזור אחד של 2 אותות ואז נשכפל כל T או N.

קונבולוציה רגילה
בין אות מחזורי לאות לא מחזורי
אות רציף:
- נתון אות מחזורי x(t) ואות לא מחזורי h(t).
- רוצים לבצע קונבולוציה רגילה:
$$y_{(t)}=\underbrace{x_{(t)}}_{\text{מחזורית}}*h_{(t)}$$
- "נקפל" את h(t) = נהפוך אותו לאות מחזורי (לפי המחזור של x(t)).
$$h_{per(t)}\triangleq\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{(t+kT)}=h_{(t)}*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{(t-kT)}\quad;\quad\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$
$$H_{per(j\omega)}=H_{(j\omega)}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{(\omega-\omega_0 k)}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{H_{(j\omega_0 k)}\frac{1}{T}}_{b_k}\cdot\delta_{(\omega-\omega_0 k)}$$
- **למציאת האות y בזמן:**
נבצע קונבולוציה ציקלית בין האותות:
$$x_{(t)}\xleftrightarrow{FS}a_k$$
$$h_{per(t)}\xleftrightarrow{FS}b_k=\frac{1}{T}H_{(jk\omega_0)}$$
$$y_{(t)}\xleftrightarrow{FS}c_k$$
$$y_{(t)}=x_{(t)}\overset{T}{\circledast}h_{per(t)}=\int_0^T\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{(\tau+kT)}}_{h_{per(\tau)}}\cdot x_{(t-\tau)}d\tau$$
- **למציאת מקדם טור פוריה של y(t):**
קונבולוציה בזמן ← כפל בתדר. לכן מתוך הכפל של האותות בתדר נוכל לחלץ את המקדמים:
$$c_k=T\cdot a_k\cdot b_k=a_k\cdot H_{(jk\omega_0)}$$

דוגמא גרפית ל"קיפול":


Hper(t) (לפני הסכימה) h(t)

אות בדיד:
(זהה לאותות רציף)
$$y_{(n)}=\underbrace{x_{(n)}}_{\text{מחזורית}}*h_{(n)}$$
$$h_{per(n)}\triangleq\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{(n+kN)}=h_{(n)}*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{(n-kN)}$$
$$H_{per(j\omega)}=H_{(j\omega)}\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{(\omega-\omega_0 k)}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{H_{(j\omega_0 k)}\frac{1}{N}}_{b_k}\delta_{(\omega-\omega_0 k)}$$
$$x_{(n)}\xleftrightarrow{FS}a_k$$
$$h_{per(n)}\xleftrightarrow{FS}b_k=\frac{1}{N}H_{(e^{jk\omega_0})}$$
$$y_{(n)}\xleftrightarrow{FS}c_k$$
$$y_{(n)}=x_{(n)}\overset{N}{\circledast}h_{per(n)}$$
$$c_k=N\cdot a_k\cdot b_k=a_k\cdot H_{(e^{jk\omega_0})}$$

תגובת מע' LTI לאקספוננט קומפלקסי
מערכת רציפה:
$$X_{(t)}=e^{j\omega_0 t}$$
$$Y_{(t)}=e^{j\omega_0 t}\overbrace{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}h_{(\tau)}\cdot e^{-j\omega_0\tau}d\tau}_{H(j\omega)}}^{\text{מספר מרוכב}}$$
H(jw) נקראת תגובת התדר, היא התמרת פוריה של h(t).

הערה: תגובת תדר = תגובה להלם.

מערכת בדידה:
$$X_{(n)}=e^{j\omega_0 n}$$
$$Y_{(n)}=e^{j\omega_0 n}\overbrace{\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{(k)}e^{-j\omega_0 k}}_{H(e^{j\omega})}}^{\text{מספר מרוכב}}$$
$H_{(e^{j\omega})}$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור של 2π, היא התמרת פוריה של h[n].

בדיקת יציבות מע' בעזרת תגובת הלם

המערכת יציבה בתנאי הבא:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_{(n)}|\neq\infty \;;\; \int_{-\infty}^{\infty}|h_{(t)}|dt\neq\infty$$

מע' בעלות תגובת הלם ממשית (LTI)

$$H_{(j\omega)} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t)}e^{-j\omega t}dt$$

$\mathrm{Re}\{H_{(j\omega)}\}=$ פונקציה זוגית

$\mathrm{Im}\{H_{(j\omega)}\}=$ פונקציה אי זוגית

מדידת תגובת התדר המרוכבת

- נכניס אות קוסינוס למערכת LTI כלשהי:

$$X_{(t)}=a\cos(\omega t)$$

$$Y_{(t)}=|H_{(j\omega)}|a\cos(\omega t+\angle H_{(j\omega)})$$

- נשווה בין האות הנכנס לאות היוצא:
- נמצא את ההפרשים בפאזה ואת ההפרשים באמפליטודה.

אלה בעצם הזווית והאמפליטודה של תגובת התדר H

טורי פורייה - FS

כללי:

טור פוריה הוא כלי לתאור פונקציה **מחזורית** כסכום של אקספוננטים או פונקציות טריגונומטריות.

טור פורייה רציף:

נוסחת הסינטזה:

$$x_{(t)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

נוסחת האנליזה:

$$a_k=\underbrace{\frac{1}{T}\int_T x_{(t)}e^{-jk\omega_0 t}dt}_{\text{על מחזור אחד שלם}}$$

פיתוח:

$$x_{(t)}\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\phi_{k(t)}$$

$$\phi_{k(t)}=e^{jk\omega_0 t}\;;\;\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$\langle\phi_{k(t)},\phi_{m(t)}\rangle \triangleq \int_T \phi_{k(t)}\phi^*_{m(t)}dt=\int_T e^{jk\omega_0 t}e^{-jm\omega_0 t}dt$$

$$\langle\phi_{k(t)},\phi_{m(t)}\rangle = \begin{cases}T & ; \; k=m\\0 & ; \; k\neq m\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle x_{(t)},\phi_{m(t)}\rangle = Ta_m\\ \langle x_{(t)},\phi_{m(t)}\rangle=\int_T x_{(t)}e^{-jm\omega_0 t}dt\end{cases}$$

תגובת מערכת LTI לכניסה מחזורית:

$$X_{(t)}\to[LTI]\to Y_{(t)}$$

$$X_{(t)}\overset{F.S}{\leftrightarrow}a_k\;;\;Y_{(t)}\overset{F.S}{\leftrightarrow}b_k$$

$$H_{(j\omega)}=\int_{-\infty}^{\infty}h_{(t)}e^{-j\omega t}dt$$

$$b_k=a_kH_{(jk\omega_0)}$$

$$Y_{(t)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kH_{(jk\omega_0)}e^{jk\omega_0 t}$$

טור פורייה בדיד:

נוסחת הסינטזה:

$$x_{(n)}=\underbrace{\sum_{k=\langle N\rangle}a_ke^{jk\omega_0 n}}_{\text{סכימה על מחזור אחד}}$$

נוסחת האנליזה:

$$a_k=\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}X_{(n)}e^{-jk\omega_0 n}}_{\text{סכימה על מחזור אחד}}$$

פיתוח:

$$x_{(n)}\equiv\sum_{k=0}^{N-1}a_k\phi_{k(n)}$$

$$\phi_{k(n)}=e^{\frac{jk2\pi n}{N}}\;;\;k=0,1,2...,N-1$$

$$\langle\phi_{k(n)},\phi_{m(n)}\rangle\triangleq\sum_{n=0}^{N-1}\phi_{k(n)}\cdot\phi^*_{m(n)}$$

$$\langle\phi_{k(n)},\phi_{m(n)}\rangle=\begin{cases}N & ; \; k=m\\0 & ; \; k\neq m\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle x_{(n)},\phi_{m(n)}\rangle=Na_m\\ \langle x_{(n)},\phi_{m(n)}\rangle=\sum_{n=0}^{N-1}x_{(n)}\cdot e^{\frac{-jm2\pi n}{N}}\end{cases}$$

הערות:

- ככל ששיפוע של פונקציה גדול יותר צריך יותר מקדמי פורייה של תדרים גבוהים בכדי לממש זאת (תדרים גבוהים=סינוס צר מאוד).
- כאשר נרצה לממש קו ישר נצטרך להשתמש בהרבה מקדמים של תדרים נמוכים (סינוס- כמעט קו ישר).

סדר ביצוע הפעולות בהתמרת פורייה:

דוגמא:

$$e^{t+2}u_{(-t+1)}=e^3e^{t-1}u_{(-1(t-1))}$$

תחילה נתמיר את הכיוון/הרחבה בזמן:

$$e^3e^tu_{(-1\cdot t)}\xrightarrow{FT}e^3\frac{1}{1-j\omega}$$

אח"כ נתמיר את ההזזה בזמן:

$$e^3\frac{1}{1-j\omega}\cdot e^{-j\omega}$$

אם היינו מבצעים את ההתמרות לא בסדר הזה, היינו מקבלים תוצאה שגויה.

קצב התכנסות של מקדמי טור פורייה

הנחות:

1. פונק' מחזורית x(t) רציפה.
2. m-1 הנגזרות שלה רציפות.
3. הנגזרת ה- m אינה רציפה.

תחת הנחות אלה מתקיים:

$$|a_k|<\frac{C}{k^{m+1}}\;;\;k>>1$$

התכנסות טור פורייה רציף:

$$x_{(t)}\approx x_{N,(t)}\triangleq\sum_{k=-N}^{N}a_ke^{jk\omega_0 t}\;;\;\text{עם מחזור T}$$

$$e_{N(t)}\triangleq x_{(t)}-x_{N,(t)}$$

$$E_N\triangleq\int_T|e_{N(t)}|^2dt\;;\;\text{אנרגיה}$$

אנרגיה:

$$E=\int_T|x_{(t)}|^2dt$$

משפט התכנסות:

אם מתקיים:

$$\int_T|x_{(t)}|^2dt<\infty$$

אז מתקיים:

$$\lim_{N\to\infty}E_N=0$$

הערה:

אם סכום השגיאות הוא אפס, כלומר האנרגיה אפס, אז הטור מתכנס לפונקציה המקורית.

בקורס זה תנאי זה תמיד מתקיים.

משפט הערך הממוצע:

טור פורייה שואף לפונקציה בכל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

בנקודות בהן הפונק' לא רציפה הטור שואף **לממוצע** הגבול הימני והשמאלי של הנקודה.

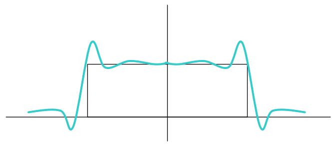
תופעת גיבס

- אם ננסה לתאר פונקציה רציפה למקוטעין ע"י טור פוריה, נקבל פונקציה עם "קפיצות" בנקודת אי הרציפות.
- הקפיצות הן בשיעור 9% מערך הפולס.
- גם אם ניקח אינסוף מקדמים עדיין תהיה לנו תופעת גיבס.
- למשל, במדרגה יש 2 נק' אי רציפות: הראשונה מימין והשניה משמאל.

לפני העליה של המדרגה נקבל **undershoot** בשיעור 9% מגובה המדרגה

מיד אחרי העליה נקבל **overshoot** גם בשיעור של 9% מגובה המדרגה.

- **אם אין נקודת אי רציפות** (יש זמן עליה - שיפוע) אז ככל שזמן העליה קטן יותר נצטרך יותר מקדמי פורייה בכדי לבטל את תופעת גיבס.
- אם נקח אות רציף ונציג אותו ע"י טור פורייה סופי, יתכן שנקבל תופעת גיבס.
- אם נוסיף עוד מקדמים לטור בסופו של דבר התופעה תעלם לגמרי.



כפל פונקציות מחזוריות

אות רציף:

Y,X פונקציות חזוריות עם מחזור T.

$$x_{(t)}\overset{FS}{\longleftrightarrow}a_k\;;\;y_{(t)}\overset{FS}{\longleftrightarrow}b_k\;;z_{(t)}\overset{FS}{\longleftrightarrow}c_k$$

$$z_{(t)}=x_{(t)}\cdot y_{(t)}$$

$$z_{(t)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_mb_{k-m}$$

אות בדיד:

$$x_{(n)}\overset{FS}{\longleftrightarrow}a_k\;;\;y_{(n)}\overset{FS}{\longleftrightarrow}b_k\;;z_{(n)}\overset{FS}{\longleftrightarrow}c_k$$

$$z_{(n)}=x_{(n)}\cdot y_{(n)}$$

$$c_k=a_k*b_k=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_mb_{k-m}$$

הערות:

מכפלה בזמן ← קונבולוציה בתדר.

קונבולוציה בזמן ← כפל בתדר.

משפט פלנצ'רל (עבור אותות מחזוריים)

אות רציף:

$$\underbrace{x_{(t)}\overset{FS}{\longleftrightarrow}a_k\;;\;y_{(t)}\overset{FS}{\longleftrightarrow}b_k}_{\text{מחזוריות עם מחזור T}}$$

$$\langle x_{(t)},y_{(t)}\rangle\triangleq\int_T x_{(t)}\cdot y^*_{(t)}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}T\cdot a_k\cdot b_k^*$$

אות בדיד:

$$\underbrace{x_{(n)}\overset{FS}{\longleftrightarrow}a_k\;;\;y_{(n)}\overset{FS}{\longleftrightarrow}b_k}_{\text{מחזוריות עם מחזור N}}$$

$$\langle x_{(n)},y_{(n)}\rangle\triangleq\sum_{n=\langle N\rangle}x_{(n)}\cdot y^*_{(n)}=\sum_{k=\langle N\rangle}N\cdot a_k\cdot b_k^*$$

משפט פרסבל

אות רציף:

$$\langle x_{(t)},x_{(t)}\rangle\triangleq\int_T|x_{(t)}|^2dt$$

$$\frac1T\int_T|x_{(t)}|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x_{(t)}|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|x_{(j\omega)}|^2d\omega=E$$

אות בדיד:

$$\frac1N\sum_{n=\langle N\rangle}|x_{(t)}|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_{[n]}|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x_{(e^{j\omega})}|^2d\omega=E$$

התמרת פוריה

כללי:
- התמרת פוריה מעבירה את הפונקציה למישור התדר.
- ניתן לבצע התמרת פוריה לפונקציה מחזורית וגם לפונקציה לא מחזורית.

אות רציף:

נוסחת התמרת פוריה (נוסחת האנליזה):

$$X_{(j\omega)}=\int_{-\infty}^{\infty}x_{(t)}e^{-j\omega t}dt$$

התמרת פוריה הפוכה (נוסחת הסינטזה):

$$x_{(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_{(j\omega)}e^{j\omega t}d\omega$$

אות בדיד:

נוסחת התמרת פוריה (נוסחת האנליזה):

$$X_{(e^{j\omega})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{(n)}e^{-j\omega n}$$

הערה: הפונקציה במישור התדר מחזורית ב- 2π.

התמרת פוריה הפוכה (נוסחת הסינטזה):

$$x_{(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_{(e^{j\omega})}e^{j\omega n}d\omega$$

התמרת פוריה לאותות מחזוריים בעזרת טור פוריה:

- נתונה פונקציה מחזורית.
- נבנה טור פוריה של הפונקציה.
- נהפוך את הטור להתמרה באופן הבא:

התמרה ע"י טור עבור אות רציף:

$$x_{(t)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{jk\omega_0t}\ ;\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow X_{(j\omega)}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\cdot\delta_{(\omega-k\cdot\omega_0)}$$

התמרה ע"י טור עבור אות בדיד:

$$x_{(n)}=\sum_{k=\langle N\rangle}a_ke^{jk\omega_0n}\ ;\ \omega_0=\frac{2\pi}{N}$$

$$\Rightarrow X_{(e^{j\omega})}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\cdot\delta_{(\omega-k\cdot\omega_0)}$$

הקשר בין מקדמי פוריה להתמרה על מחזור אחד

x(t) הוא אות מחזורי.
x(jw) הוא התמרה של מחזור אחד של x(t).

אות רציף:

$$x_{(t)}\xrightarrow{FT}\underbrace{X_{(j\omega)}}_{T}\ ;\ x_{(t)}\xrightarrow{FS}a_k$$

$$a_k=\frac{1}{T}X_{(jk\omega_0)}$$

x[n] הוא אות מחזורי.
x(jw) הוא התמרה של מחזור אחד של x[n].

אות בדיד:

$$x_{[n]}\xrightarrow{FT}\underbrace{X(e^{j\omega})}_{N}\ ;\ x_{[n]}\xrightarrow{FS}a_k$$

$$a_k=\frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0})$$

x(t) הוא אות לא מחזורי.
Xper הוא הוא קיפול בזמן של x(t) ולכן מחזורי.

אות רציף:

$$x_{(t)}\xrightarrow{FT}X_{(j\omega)}\ ;\ x_{per(t)}\xrightarrow{FS}a_k$$

$$a_k=\frac{1}{T}X_{(jk\omega_0)}$$

x[n] הוא אות לא מחזורי.
Xper הוא הוא קיפול בזמן של x[n] ולכן מחזורי.

אות בדיד:

$$x_{[n]}\xrightarrow{FT}X(e^{j\omega})\ ;\ x_{per[n]}\xrightarrow{FS}a_k$$

$$a_k=\frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0})$$

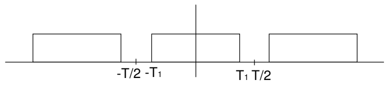
עבור אות מחזורי - ההתמרה של x היא על מחזור אחד בלבד

הסבר:
אם נעלה את מקדמי פוריה של x(t) על גרף (שציר האנכי הוא kω0) נקבל פונקציה דגומה שהיא התמרת פוריה של מחזור אחד של x(t).

המשכה מחזורית:
אם נתונה פונקציה לא מחזורית בתחום סופי (0 בכל שאר התחום), ניתן להפוך אותה לפונקציה מחזורית עם מחזור T ע"י:

$$\tilde{x}_{(t)}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x_{(t-l\cdot T)}$$

התמרת פוריה של רכבת פולסים:



כשנבנה רכבת פולסים בעזרת טור פוריה, המקדמים של הטור מהווים דגימות פונקציה במישור התדר.
ככל שנגדיל את T נקבל דגימות (מקדמים) יותר צפופות, ואם T יהיה אינסופי נקבל בדיוק את הפונקציה הרציפה.
המרחק בין הדגימות הוא:

$$\omega_0=2\pi/T$$

המקדמים (הדגימות):

$$a_k=\frac{2}{T}\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\omega_0}=\frac{2T_1}{T}\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\omega_0T_1}\underset{\omega=k\omega_0}{\Leftarrow}\frac{2}{T}\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

$$a_0=2T_1/T$$

טור פוריה של רכבת הלמים:

$$a_k=\frac{1}{T}\ or\ a_k=\frac{1}{N}$$

משפטים עבור התמרות פוריה:

- אם $f_{(t)}$ וגם $F_{(j\omega)}$ ממשיים, אז $f_{(t)}$ זוגית.
- אות ממשי בתדר גורר אות צמוד סימטרי בזמן ולהפך.

אות ממשי מקיים:

$$a_k=a^*_{-k}\qquad |a_k|=|a_{-k}|$$

$$\angle a_k=-\angle a_{-k}$$

$$\mathrm{Re}\{a_k\}=\mathrm{Re}\{a_{-k}\}\qquad \mathrm{Im}\{a_k\}=-\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$$

מקדמי פוריה יהיו סימטריים.

פונקציות זוגיות:
- זוגיות בזמן גוררת זוגיות בתדר (ולהפך).
- ממשי וזוגי בזמן ↔ ממשי וזוגי בתדר.
- ממשי ואי-זוגי בזמן ↔ ממשי ואי-זוגי בתדר.
- ממשית בזמן ובתדר ↔ זוגית בזמן ובתדר

$$x_{(t)}=\int_0^{\infty}\frac{1}{\pi}X_{(j\omega)}\cos(\omega t)d\omega\ ;\ X_{(j\omega)}=\int_0^{\infty}2x_{(t)}\cos(\omega t)dt$$

פונקציות אי זוגיות:
אי זוגיות בזמן גוררת אי זוגיות בתדר (ולהיפך).
פונקציה ממשית בזמן גוררת פונקציה מדומה בתדר.

$$x_{(t)}=j\int_0^{\infty}\frac{1}{\pi}X_{(j\omega)}\sin(\omega t)d\omega\ ;\ X_{(j\omega)}=-j\int_0^{\infty}2x_{(t)}\sin(\omega t)dt$$

הערה:
אם מקדמי פוריה סימטריים סביב 2 אז נקבל פונקציה ממשית מוכפלת באקספוננט (הזזה בתדר).

דגימת אות רציף בפרק זמן סופי

צורות דגימה:

חלון מלבני – Boxcar

$$w_{(n)}=\begin{cases}1 & 0\le n\le m\\ 0 & o.w\end{cases}$$

חלון המינג – Hamming

$$w_{(n)}=\begin{cases}0.54-0.46\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot n}{m}\right) & 0\le n\le m\\ 0 & o.w\end{cases}$$

חלון הנינג – Hanning

$$w_{(n)}=\begin{cases}0.5-0.5\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot n}{m}\right) & 0\le n\le m\\ 0 & o.w\end{cases}$$

חלון משולש – Bartlet

$$w_{(n)}=\begin{cases}\frac{2n}{m} & 0\le n\le m/2\\ 2-\frac{2n}{m} & m/2\le n\le m\end{cases}$$

ריכוז נתונים עבור צורות דגימה

	Boxcar	Hamming	Hanning	Bartlet
רוחב האונה הראשית	$\frac{4\pi}{m+1}$	$\frac{8\pi}{m}$	$\frac{8\pi}{m}$	$\frac{8\pi}{m}$
גודל זנב	-13db	-41db	-31db	-25db

הערה:
ככל שרוחב האונה גדול יותר - כושר ההפרדה גרוע יותר.

אפנון - Modulation

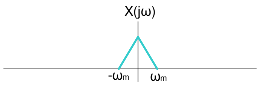
כללי:
סידור מידע רב על גבי גל נושא (למשל הכפלה ב- cos) כך שניתן יהיה לבודד מידע ספציפי ממנו.

הגדרות:

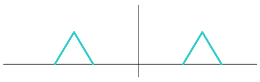
רוחב פס:
המרחק בין החלק הימני ביותר לשמאלי ביותר של המידע X(jw).

אות מוגבל פס:
אות שקיים בתחום תדר מוגבל, ובכל השאר הוא 0.

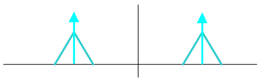
כל השרטוטים הבאים מתבססים על האות המקורי הבא:



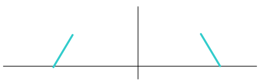
DSB-SC:



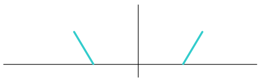
DSB-WC:



SSB-USB:



SSB-LSB:



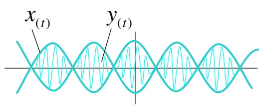
אפנון AM - Amplitude Modulation:

כללי:
המידע x(t) אגור באמפליטודה של הגל הנושא y(t):

$$y_{(t)}=x_{(t)}\cdot\cos(\omega_c\cdot t)$$

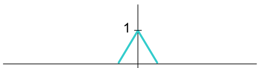
ה- cos מבצע את האפנון.

במישור הזמן

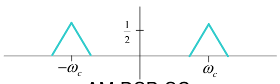


במישור התדר

האות המקורי - x(t):



לאחר האפנון - y(t):



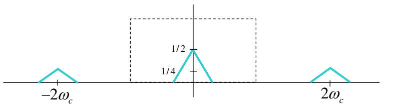
AM-DSB-SC

הערות:
- זהו אפנון לינארי.
- ההספק משתנה עם הזמן.
- AM חוסך ברוחב סרט אך קשה לנקות רעשים.

גלאי סנכרוני:
משחזר את X מתוך ידיעת wc והפאזה של הגל y(t).

$$y_{(t)}\longrightarrow\underset{\cos(\omega_c\cdot t)}{\otimes}\xrightarrow{w(t)}\boxed{LPF}\longrightarrow\tilde{w}_{(t)}$$

במישור התדר



$$w_{(t)}=y_{(t)}\cos(\omega_c\cdot t)=x_{(t)}\cos(\omega_c\cdot t)\cdot\cos(\omega_c\cdot t)$$

לפי קונבולוציה בתדר $\Rightarrow w_{(t)}=x_{(t)}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\cdot\omega_c\cdot t)\right]$

$$\tilde{w}_{(t)}=\left[w_{(t)}\right]_{LPF}=\frac{1}{2}x_{(t)}$$

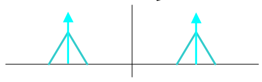
הערה:
אם לא יודעים את הפאזה המדויקת של y(t), נניח שהפרש הפאזה הוא θ נקבל:

$$w_{(t)}=y_{(t)}\cos(w_c\cdot t+\theta)=x_{(t)}\cos(w_c\cdot t)\cdot\cos(w_c\cdot t+\theta)$$

$$=x_{(t)}\left[\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\cos(2\cdot w_c\cdot t+\theta)\right]$$

$$\tilde{w}_{(t)}=\left[w_{(t)}\right]_{LPF}=\frac{1}{2}x_{(t)}\cos\theta$$

גלאי א-סינכרוני = גלאי מעטפת:



$|x_{(t)}|\le k$;

$\tilde{x}_{(t)}=\left(A+x_{(t)}\right)>0$

$y_{(t)}=\tilde{x}_{(t)}\cos(w_c\cdot t)$

מקדם אפנון AM:

$m=k/A$; $0<m<1$

חסרון: מבזבז יותר הספק מאשר גלאי סינכרוני.

אפנון FM/PM:

כללי:
המידע x(t) אגור בפאזה של הגל הנושא:

$y_{(t)}=A\cdot\cos(\theta_{(t)})$

אפנון PM - Phase Modulation:

$\theta_{PM(t)}\equiv\omega_c\cdot t+k_p\cdot x_{(t)}$

אפנון FM - Frequency Modulation:

$\omega_{FM(t)}\equiv\dot{\theta}_{FM(t)}\equiv\omega_c+k_F\cdot x_{(t)}$

$$y_{(t)}=A\cos(\theta_{(t)})=A\cos\left(\int_{-\infty}^{t}\omega_c+k_F\cdot x_{(\tau)}d\tau\right)$$

$$=A\cos\left(\omega_c\cdot t+k_F\cdot\int_{-\infty}^{t}x_{(\tau)}d\tau\right)$$

אות מידע בעל טון קבוע:

$x_{(t)}=k\cdot\cos(\omega_m\cdot t)$

$\dot{\theta}_{(t)}=\omega_c+\underbrace{k\cdot k_F}_{\Delta\omega}\cdot\cos(\omega_m\cdot t)$

$$y_{(t)}=A\cos\left(\omega_c\cdot t+\underbrace{\frac{k_F\cdot k}{\omega_m}}_{\beta}\cdot\sin(\omega_m\cdot t)\right)$$

סטיית התדר המירבית $\Delta\omega$:

$\Delta\omega\equiv k\cdot k_F$

$\omega_c-\Delta\omega\le\omega_{(t)}=\dot{\theta}_{(t)}\le\omega_c+\Delta\omega$

מקדם אפנון FM:

$\beta\equiv\frac{k_F\cdot k}{\omega_m}=\frac{\Delta\omega}{\omega_m}$

FM צר סרט:

$\beta<1$

FM רחב סרט:

$\beta>1$

הערות
- את מקדם האפנון אנו יכולים לבחור בחופשיות.
- ל- FM צר סרט אין יתרון על AM.
- **זהו אפנון לא ליניארי.**

טור פוריה של FM עבור מקדם אפנון כלשהו:

$$y_{(t)}=A\cos(w_c\cdot t+\beta\sin(w_m\cdot t))=\mathrm{Re}\underbrace{\left\{A\cdot e^{j(w_c\cdot t+\beta\sin(w_m t))}\right\}}_{\hat{y}(t)}$$

$$\hat{y}_{(t)}\equiv\underbrace{A\cdot e^{jw_c\cdot t}}_{\text{גל נושא}}\cdot\underbrace{e^{j\beta\sin(w_m t)}}_{\text{מידע}}$$

$$e^{j\beta\sin(w_m t)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{-jkw_m t}\Rightarrow a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e^{j\beta\sin(w_m t)}e^{-jkw_m t}dt$$

$$\underbrace{\theta=\omega_m t}_{\text{החלפת משתנים}}\Rightarrow a_k=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j(\beta\sin(\theta)-k\theta)}d\theta\equiv J_{k(\beta)}}_{\text{פונקציית בסל}}$$

$$\hat{y}_{(t)}=A\cdot e^{jw_c\cdot t}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{k(\beta)}\cdot e^{jkw_m t}$$

$$y_{(t)}=\mathrm{Re}\left\{\hat{y}_{(t)}\right\}=A\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{k(\beta)}\cdot\cos\left(t\cdot(\omega_c+k\omega_m)\right)$$

הערה: J היא פונקציית בסל.

נוסחה למציאת רוחב סרט FM:

$B.W=2\beta\cdot\omega_m+2\omega_m=2(\Delta\omega+\omega_m)$

אם $\beta<<1$:

$B.W\approx2\omega_m$

אם $\beta>>1$:

$B.W\approx2\Delta\omega$

הערה:
לנוסחה זו הגיעו באופן נסיוני (אמפירי) – לא ניתן להוכיחה.

גלאי FM:

$y_{(t)}\longrightarrow$ [גוזר] $\longrightarrow$ [גלאי AM] $\longrightarrow x_{(t)}$

$$\begin{cases}y_{(t)}=A\cos(\theta_{(t)})\\ \dot{\theta}_{(t)}\equiv\omega_c+k_F\cdot x_{(t)}\end{cases}\Rightarrow\dot{y}_{(t)}=A\cdot\dot{\theta}_{(t)}\cdot\sin(\theta_{(t)})$$

את $\dot{y}$ נעביר בגלאי AM ונקבל את x.

יחס אות רעש:

$$\frac{(S/N)_{OUT}}{(S/N)_{IN}}=3\beta^2$$

הערות:
- ל- FM/PM יש הספק רעש קבוע.
- ל- AM יש הספק רעש משתנה.
- AM חסכוני ברוחב סרט אך לא מאפשר סנון רעשים.
- FM בעל רוחב סרט רחב ומאפשר סינון רעשים.

מסנן הילברט

כללי:
תגובת הלם של מסנן הילברט:

$$H(j\omega)=\begin{cases}-j & \omega>0\\ +j & \omega<0\end{cases}$$

$$h_{(t)}=\frac{1}{\pi\cdot t}$$

$x_{(t)}\cos(\omega_c\cdot t)\longrightarrow\boxed{H}\longrightarrow x_{(t)}\sin(\omega_c\cdot t)$

$x_{(t)}\sin(\omega_c\cdot t)\longrightarrow\boxed{H}\longrightarrow x_{(t)}\cos(\omega_c\cdot t)$

$\sin(\omega_c\cdot t)\longrightarrow\boxed{H}\longrightarrow-\cos(\omega_c\cdot t)$

$\cos(\omega_c\cdot t)\longrightarrow\boxed{H}\longrightarrow\sin(\omega_c\cdot t)$

הערה:
לא ניתן לממש את מסנן הילברט הנ"ל, מפני שהוא לא סיבתי. אם נזיז אותו בזמן נוכל לממש.

$$h_{(t-\tau)}=\frac{1}{\pi\cdot(t-\tau)}$$

התמרת הילברט

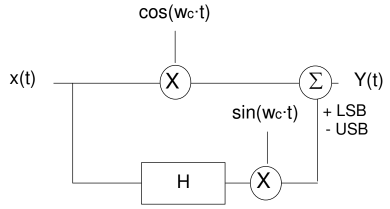
$$\hat{x}_{(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi\cdot\tau}\cdot x_{(t-\tau)}d\tau$$

תכונה של מסנן הילברט:

$x_{(t)}\to\boxed{H}\xrightarrow{\hat{x}_{(t)}}\boxed{H}\xrightarrow{-x_{(t)}}\underset{-1}{\otimes}\to x_{(t)}$

$X(j\omega)\cdot H(j\omega)\cdot H(j\omega)=-X(j\omega)$

אפנון / גלאי SSB:



הערה:
אותו רכיב מאפנן אות ל- SSB וגם מגלה את SSB, אך כאשר מכניסים את LSB או USB אז בשני המקרים עושים בסוף פעולת חיבור לקבלת האות המקורי.

$$y_{(t)}=x_{(t)}\cos(\omega_c t)\pm\hat{x}_{(t)}\sin(\omega_c t)$$

משפט הדגימה של נייקוויסט

כללי:
משפט נייקוויסט מציב תנאי שמאפשר שחזור רציף של אות דגום.

הגדרות:

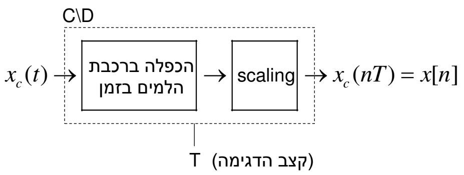
$$\Omega_s>2\Omega_m\qquad\left(\Omega_s\equiv\frac{2\pi}{T}\right)$$

T - כזמן בין דגימה לדגימה.
Ω_s - קצב הדגימה.

תנאים לחח"ע בין פונקציה רציפה לבדידה:
- x(t) מוגבל סרט.
- תדר דגימה גדול מפעמים תדר מקסימלי (התדר הגדול ביותר שבו ערך הפונקציה אינו אפס).

C\D – דגימה (רציף לבדיד)

סד"פ דגימה:



- כפל ברכבת הלמים בזמן = קיפול (שכפול) בתדר.

$$x_c(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=x_c(nT)=x[n]$$

נבצע התמרה ל- 2 האגפים:

$$\frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega)*\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_s k)$$

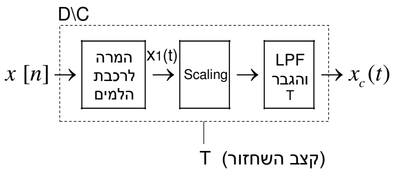
$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j(\Omega-\Omega_s k))=X_c(e^{j\Omega T})$$

- ביצוע scaling בתדר = הרחבת מישור התדר פי T.

$$\omega=\Omega T\Rightarrow X_c(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T}-\frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

D\C – שחזור (בדיד לרציף)

סד"פ דגימה:



- המרה לרכבת הלמים בזמן.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot\delta(t-nT)=x_1(t)$$

נבצע התמרה ל- 2 האגפים:

$$\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{\omega}{T}-\frac{2\pi k}{T}\right)=X_1\left(j\frac{\omega}{T}\right)$$

- ביצוע scaling בתדר = כיווץ מישור התדר פי T.

$$\frac{\omega}{T}=\Omega\Rightarrow X_1(j\Omega)=\frac{1}{T}X(e^{j\Omega T})*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_s k)$$

- הכפלה ב- LPF עם פקטור (הגבר) T:

$$\frac{1}{T}x(e^{j\Omega T})*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_s k)\cdot T\cdot H(j\Omega)=X_c(j\Omega)$$

המשמעות בזמן:

$$x_1(t)*h(t)=\sum_{n=-\infty}^{-\infty}x_1(t)\cdot h(t-nT)=x_r(t)=x_c(t)$$

(Reconstructed עבור – r)

נוסחת שחזור עם מסנן אידיאלי:

$$x_r(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot\mathrm{sin}\,c\left(\frac{t-kT}{T}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot h(t-kT)$$

סוגי מסנני LPF:

ישנן מספר אפשרויות לבניית מסנן ה- LPF - Hr :

1. מסנן אידיאלי:

$$h^{(i)}_{r(t)} = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$H^{(i)}_{r(j\Omega)} = \begin{cases} T & |\Omega| < \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & O.W \end{cases}$$

2. קרוב מסדר 0 למסנן האידיאלי (ZOH):

$$h^{(0)}_{r(t)} = \begin{cases}1 & 0<t<T\\0 & O.W\end{cases}$$

$$H^{(0)}_{r(j\Omega)} = e^{-\frac{j\Omega T}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\frac{\Omega}{2}}$$

3. קרוב מסדר 1 למסנן האידיאלי (אינטרפולציה ליניארית) :FOH

$$h^{(1)}_r(t) = \begin{cases} 1+\frac{t}{T} & -T<t<0 \\ 1-\frac{t}{T} & 0<t<T\end{cases}$$

$$H^{(1)}_r(j\Omega) = \frac{1}{T}\left(\frac{\sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\frac{\Omega}{2}}\right)^2$$

$$\begin{cases} x^{(1)}_r(t) = x[n]\left(n+1-\frac{t}{T}\right) + x[n+1]\left(\frac{t}{T}-n\right) \\ nT \le t \le (n+1)T\end{cases}$$

הסבר:

- בזמן יש קונבולוציה בין הלמים (פונקציה בדידה) לבין המסנן.
- קונבולוציה כזו משכפלת את המסנן בכל נקודה של הפונקציה הבדידה.
- סופרפוזיציה של השיכפולים האלה נותן לנו את הערך של הפונקציה הרציפה בכל מקום השונה מנקודות הדגימה.
- בכל מקרה הערך בנקודות הדגומות ידוע ולא משתנה.

שינוי קצב דגימה

יש אות דגום בקצב מסויים.

$$x_c(t) \to \boxed{Sample(T)} \to x[n] = x_c(nT)$$

אנחנו רוצים לשנות את קצב הדגימה שלו.

דצימציה (הורדת קצב דגימה)

$$x[n] \to \boxed{LPF = H(e^{j\omega})} \to \overset{\text{Down Sampling}}{\boxed{\downarrow M}} \to x_d[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases}1 & |\omega|<\frac{\pi}{M}\\0 & O.W.\end{cases}$$

כללי:

- דילול דגימות:

$$x[M\cdot n] = x_d[n]$$

$$X(e^{j\frac{\omega}{M}}) = X_d(e^{j\omega})$$

- שקול לדגימה מחדש בקצב MT:

$$T' = M\cdot T$$

- ה- LPF נועד למנוע חפיפה העלולה לנבוע מקצב הדגימה החדש.

סד"פ:

1. מציירים את כל הנקודות הדגומות על גרף.
2. משאירים כל נקודה M ית.
3. מציירים גרף חדש רק עם הנקודות שנשארו.

הערות

- **דצימציה מקווצת את האות בזמן ומרחיבה אותו בתדר (מכפילה את הציר ב- M).**
-

נוסחה לאות שעבר דצימציה:

$$x_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} x\left(e^{j\left(\frac{\omega-2\pi i}{M}\right)}\right)$$

אינטרפולציה (הגדלת קצב דגימה)

$$x[n] \to \overset{\text{Up Sampling}}{\boxed{\uparrow L}} \to x_e[n] \to \underset{\text{עם הגבר L}}{\boxed{LPF = H(j\Omega)}} \to x_i[n]$$

כללי:

- שקול לדגימה מחדש בקצב T/L:

$$T' = T/L$$

$$X_i(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

- ה- Up Sampling גורם לריווח הדגימות בזמן והכנסת אפסים ביניהם:

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k\cdot L]$$

- בתדר ה- Up Sampling גורם לכיווץ מישור התדר פי L.

סד"פ:

1. מציירים את כל הנקודות הדגומות על גרף.
2. משאירים רווח של (L-1) נקודות.
3. שמים אפסים כערכי הנקודות החדשות.
4. מעבירים ב- LPF (הוא מבצע את האינטרפ' ושם במקום האפסים את הערך המתאים).

הערות:

- **אינטרפולציה מרחיבה בזמן ומכווצת בתדר (כיווץ הציר פי L).**
- יש פקטור (הגבר) L במסנן ה- LPF, כי אם נעשה דגימה מחדש נקבל גם פקטור L.

אינטרפולציה אידאלית:

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} L & |\Omega|<\frac{\pi}{L}=\frac{\Omega_s}{2}\\ 0 & O.W\end{cases}$$

$$x_i[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n-r\cdot L}{L}\right)$$

אינטרפולציה ליניארית:

$$h_{lin}[n] = \begin{cases}1+\frac{n}{L} & -L<n<0\\ 1-\frac{n}{L} & 0<n<L\end{cases}$$

$$H_{lin}(j\Omega) = \frac{1}{T}\left(\frac{\sin\left(\frac{\Omega T}{2L}\right)}{\frac{\Omega}{2}}\right)^2$$

$$x_i[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]\,h_{lin}[n-r\cdot L]$$

מערכת LTI בדידה

מימוש מע' LTI רציפה ע"י מע' בדידה:

מערכת 1:

$$x_c(t)\to\boxed{sample(T)}\to x[n]\to\boxed{h[n]}\to y[n]\to$$

$$\to y[n]\to\boxed{reconstruct(T)}\to y_r(t)$$

מערכת 2:

$$x_c(t)\to\boxed{h_c(t)}\to y(t)$$

ניתן לבצע פעולות על אות רציף ב 2 שיטות:

1. להעביר למישור הבדידי לבצע פעולות ולהחזיר למישור הרציף.
2. לבצע את הפעולות במישור הרציף.

ההבדל בין h במישור הבדיד לזה במישור הרציף הוא (אם נרצה את אותה התוצאה):

$$h[n] = T\cdot h_{eff}(nT)$$

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H_c(j\Omega) & |\Omega|<\frac{\pi}{T}\\0&O.W.\end{cases}$$

מימוש מערכת LTI בדידה ע"י מע' רציפה:

מערכת 1:

$$x[n]\to\boxed{reconstruct(T)}\to x_r(t)\to\boxed{h_c(t)}\to y_r(t)\to$$

$$\to y_r(t)\to\boxed{sample(T)}\to y[n]$$

מערכת 2.

$$x[n]\to\boxed{h[n]}\to y[n]$$

ההבדל בין h במישור הבדיד לזה במישור הרציף הוא (אם נרצה את אותה התוצאה):

$$h[n]=h(nT)$$

$$H(e^{j\omega}) \overset{\omega=\Omega T}{=} H(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} H_c(j\Omega) & |\Omega|<\frac{\pi}{T}\\ 0 & O.W.\end{cases}$$

מערכת A/D:

$$x_c(t)\to\underset{H_{aa}(j\Omega)}{\boxed{AAF}}\to x_a(t)\to\underset{H_O(j\Omega)}{\boxed{ZOH}}\to x_O(t)\to$$

$$\to x_O(t)\to\boxed{quantization}\to\hat{x}(t)\to\boxed{coding}\to\hat{x}_B(t)$$

$$\hat{x}_B(t) = \frac{\hat{x}(t)}{\Delta}$$

(Anti Aliasing Filter = AAF)

SAH=ZOH:

$$H_O(j\Omega) = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)\cdot e^{-\frac{j\Omega T}{2}}$$

קוונטיזציה:

הגדרות

1. האמפליטודה של האות הנכנס מקיימת:

$$|x(t)|<x_m$$

2. אורך מילת מחשב היא 1+B סיביות.
3. שיטת הקידוד היא משלים ל2:

$$-2^B \le \hat{x}_B(t) \le 2^B-1$$

ז"א האות היוצא יוכל לקבל ערכים מסויימים בלבד.

4. מנת קוונטיזציה:

$$\Delta = \frac{2x_m}{2^{B+1}} = \frac{x_m}{2^B}$$

סד"פ

1. מוצאים את מנת הקוונטיזציה, ובונים ציר Y בקפיצות של מנת הקוונטיזציה.
2. מציירים את הפונקציה הרציפה ומציירים את הנקודות הדגומות לפי T .
3. בודקים לאיזו קוונט קרובה כל נקודה דגומה, ו"נותנים" לנקודה את הערך של קוונט זה.
4. מחלקים כל ערך בקוונט עצמה וזו התוצאה.

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} k\cdot\Delta & \left(k-\frac12\right)\Delta < x_a(nT) < \left(k+\frac12\right)\Delta \\ (2^B-1)\Delta & x_a(nT)\ge x_m-\Delta \\ -2^B\Delta & x_a(nT)\le -x_m\end{cases}$$

שגיאת הקוונטיזציה:

$$e[n] = \hat{x}[n]-x[n] = \hat{x}[n]-x_a(nT)$$

$$-\frac{\Delta}{2}<e[n]<\frac{\Delta}{2}$$

הערות:

1. אם אמפליטודת האות גדולה יותר מ Xm אז האות יקטם בקצה.
2. e מפולג בצורה אחידה לאורך התחום שלו עם: $1/\Delta$
3. התוחלת של e היא אפס (בממוצע אנחנו מקבלים את האות האמיתי).
4. שונות: $V(e)=\frac{\Delta^2}{12}$

עוצמת רעש הקוונטיזציה:

$$V(e)=E(e^2)=\frac{\Delta^2}{12}$$

יחס אות לרעש (SNR) :

$$SNR = 10\log\left(\frac{signal\ energy}{E(e^2)}\right)\ [db]$$

המספר שנקבל אומר כמה האות חזק יותר מהרעש ב db.

מערכת D/A:

$$\hat{x}_B[n]\to\boxed{Decoder}\to\hat{x}[n]\to\underset{H_O(j\Omega)}{\boxed{ZOH}}\to\hat{x}_{D/A}(t)\to$$

$$\to\hat{x}_{D/A}(t)\to\boxed{\tilde{H}_r(j\Omega)}\to\hat{x}_r(t)$$

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_O(j\Omega)} = \begin{cases}\frac{e^{\frac{j\Omega T}{2}}}{\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)} & |\Omega|<\frac{\pi}{T}\\ 0 & O.W.\end{cases}$$

אנחנו נממש זאת ע"י מסנן ריבועי, וזה יתן לנו עוד שגיאה. אם רוב האות יהיה מרוכז על ציר האפס, השגיאה תקטן. השגיאה המקסימאלית היא 3.9db.

טור פוריה

תכונה	מקדמי טור פוריה	האות
לינאריות	$A\cdot a_k+B\cdot b_k$	$A\cdot x_{(t)}+B\cdot y_{(t)}$ $A\cdot x_{(n)}+B\cdot y_{(n)}$
הזזה בזמן	$a_k\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0}$	$x_{(t-t_0)}$
	$a_k\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$	$x_{(n-n_0)}$
הזזה בתדר	a_{k-M}	$e^{jM\frac{2\pi}{T}t}\cdot x_{(t)}$ $e^{jM\frac{2\pi}{N}t}\cdot x_{(n)}$
הצמדה	a^*_{-k}	$x^*_{(t)}$ $x^*_{(n)}$
היפוך בזמן	a_{-k}	$x_{(-t)}$ $x_{(-n)}$
כיווץ בזמן	a_k , $period=\frac{T}{a}$	$x_{(a\cdot t)}$, $a>0$
	$\frac{1}{m}a_k$, $period=mN$	$x_{(n)}=\begin{cases}x_{(\frac{n}{m})} & n=0,\pm m,\pm 2m\\ 0 & o.w\end{cases}$
קונבולוציה ציקלית	$T\cdot a_k\cdot b_k$	$\int_T x_{(\tau)}y_{(t-\tau)}d\tau$
	$N\cdot a_k\cdot b_k$	$\sum_{r=<N>}x_{(r)}y_{(n-r)}$
הכפלה בזמן	$\sum_{l=-\infty}^{\infty}a_l\cdot b_{k-l}$	$x_{(t)}\cdot y_{(t)}$
	$\sum_{l=<N>}a_l\cdot b_{k-l}$	$x_{(n)}\cdot y_{(n)}$
גזירה בזמן	$jk\frac{2\pi}{T}\cdot a_k$	$\frac{dx_{(t)}}{dt}$
	$\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)\cdot a_k$	$x_{(n)}-x_{(n-1)}$
אינטגרציה	$\frac{1}{jk\frac{2\pi}{T}}\cdot a_k$	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$, $a_0=0$
	$\frac{1}{\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)}\cdot a_k$	$\sum_{k=-\infty}^{n}x_{(k)}$, $a_0=0$
סימטריה לאותות ממשיים	$a_k=a^*_{-k}$ $\mathrm{Re}\{a_k\}=\mathrm{Re}\{a_{-k}\}$ $\mathrm{Im}\{a_k\}=-\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$ $\lvert a_k\rvert=\lvert a_{-k}\rvert$ $\angle a_k=-\angle a_{-k}$	$\mathrm{Im}\{x_{(t)}\}=0$ $\mathrm{Im}\{x_{(n)}\}=0$
סימטריה לאות ממשי וזוגי	a_k ממשיים וזוגיים	$x_{(t)}$ ממשי וזוגי $x_{(n)}$ ממשי וזוגי
סימטריה לאות ממשי ואי-זוגי	a_k מדומים טהורים ואי-זוגיים	$x_{(t)}$ ממשי ואי-זוגי $x_{(n)}$ ממשי ואי-זוגי
עבור אות ממשי	$\mathrm{Re}\{a_k\}$	$x_{even(t)}=\frac{x_{(t)}+x_{(-t)}}{2}$
	$\mathrm{Re}\{a_k\}$	$x_{even(t)}=\frac{x_{(n)}+x_{(-n)}}{2}$
עבור אות ממשי	$j\cdot\mathrm{Im}\{a_k\}$	$x_{odd(t)}=\frac{x_{(t)}-x_{(-t)}}{2}$
	$j\cdot\mathrm{Im}\{a_k\}$	$x_{odd(t)}=\frac{x_{(n)}-x_{(-n)}}{2}$

התמרת פוריה

תכונה	התמרה	האות
ליניאריות	$a\cdot x_{(t)}+b\cdot y_{(t)}$	$a\cdot x_{(t)}+b\cdot y_{(t)}$ $a\cdot x_{(n)}+b\cdot y_{(n)}$
הזזה בזמן	$e^{-j\omega t_0}\cdot X_{(j\omega)}$	$x_{(t-t_0)}$
	$e^{-j\omega n_0}\cdot X(e^{j\omega})$	$x_{(n-n_0)}$
הזזה בתדר	$X_{(j(\omega-\omega_0))}$	$e^{j\omega_0 t}\cdot x_{(t)}$ $e^{j\omega_0 n}\cdot x_{(n)}$
הצמדה	$X^*_{(-j\omega)}$	$x^*_{(t)}$ $x^*_{(n)}$
היפוך בזמן	$X^*_{(e^{-j\omega})}$	$x_{(-t)}$ $x_{(-n)}$
כיווץ בזמן	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{1}{a}j\omega\right)$	$x_{(a\cdot t)}$
	$X\left(e^{jk\omega}\right)$	$x_{(k)}=\begin{cases}x_{(\frac{n}{k})} & n/k \text{ שלם}\\ 0 & o.w\end{cases}$
קונבולוציה	$X_{(j\omega)}\cdot Y_{(j\omega)}$	$x_{(t)}*y_{(t)}$
	$X_{(e^{j\omega})}\cdot Y_{(e^{j\omega})}$	$x_{(n)}*y_{(n)}$
הכפלה בזמן	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_{(j\theta)}Y_{(j(\omega-\theta))}d\theta$	$x_{(t)}\cdot y_{(t)}$
	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_{(e^{j\theta})}Y_{(e^{j(\omega-\theta)})}d\theta$	$x_{(n)}\cdot y_{(n)}$
גזירה בזמן	$j\omega\cdot X(j\omega)$	$\frac{dx_{(t)}}{dt}$
	$\left(1-e^{-j\omega}\right)\cdot X(e^{j\omega})$	$x_{(n)}-x_{(n-1)}$
אינטגרציה אות רציף	$\frac{1}{j\omega}X_{(j\omega)}+\pi X(0)\delta_{(\omega)}$	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$
סיכום אות בדיד	$\frac{1}{\left(1-e^{-j\omega}\right)}\cdot X(e^{j\omega})$	$\sum_{k=-\infty}^{n}x_{(k)}$, $a_0=0$
סימטריה לאותות ממשיים	$X_{(j\omega)}=X^*_{(j\omega)}$ $\mathrm{Re}\{X_{(j\omega)}\}=\mathrm{Re}\{X_{(-j\omega)}\}$ $\mathrm{Im}\{X_{(j\omega)}\}=-\mathrm{Im}\{X_{(-j\omega)}\}$ $\lvert X_{(j\omega)}\rvert=\lvert X_{(-j\omega)}\rvert$ $\angle X_{(j\omega)}=-\angle X_{(-j\omega)}$	$\mathrm{Im}\{x_{(t)}\}=0$ $\mathrm{Im}\{x_{(n)}\}=0$
סימטריה לאות ממשי וזוגי	$X_{(j\omega)}$ ממשיים וזוגיים	$x_{(t)}$ ממשי וזוגי $x_{(n)}$ ממשי וזוגי
סימטריה לאות ממשי ואי-זוגי	$X_{(j\omega)}$ מדומה טהור ואי-זוגי	$x_{(t)}$ ממשי ואי-זוגי $x_{(n)}$ ממשי ואי-זוגי
עבור אות ממשי (זהה בבדיד)	$\mathrm{Re}\{X_{(j\omega)}\}$	$x_{even(t)}=\frac{x_{(t)}+x_{(-t)}}{2}$
עבור אות ממשי (זהה בבדיד)	$j\cdot\mathrm{Im}\{X_{(j\omega)}\}$	$x_{odd(t)}=\frac{x_{(t)}-x_{(-t)}}{2}$
דואליות בזמן רציף	$F\{x_{(t)}\}=X_{(j\omega)}\Rightarrow F\{X_{(j\omega)}\}=2\pi\cdot x(-j\omega)$	

השלמה לטבלה בצד שמאל - מקדמי פוריה עבור התמרת פוריה בזמן בדיד:

(1)

$$a_k=\begin{cases}1/2j & k=r,r\pm N,r\pm 2N...\\ 1/2j & k=-r,-r\pm N...\\ 0 & o.w\end{cases}$$

(2)

$$a_k=\frac{\sin\left[\left(\frac{2\pi\cdot k}{N}\right)\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{N\sin\left(\frac{2\pi\cdot k}{N}\right)}\ ;\ k\neq 0,\pm N,\pm 2N...$$

$$a_k=\frac{2N_1+1}{N}\ ;\ k\neq 0,\pm N,\pm 2N...$$

התמרת פוריה בזמן רציף

מקדמי פוריה (אם האות מחזורי)	התמרת פוריה	האות בזמן רציף
a_k	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\cdot\delta(\omega-k\omega_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\cdot e^{jk\omega_0 t}$
$a_1=1$ $a_k=0$	$2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0)$	$e^{j\omega_0 t}$
$a_1=0.5j$ $-a_{-1}=0.5j$ $a_k=0$	$\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$	$\cos(\omega_0\cdot t)$
$a_1=0.5j$ $-a_{-1}=0.5j$ $a_k=0$	$\frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right)$	$\sin(\omega_0\cdot t)$
$a_0=1$ $a_k=0$	$2\pi\delta(\omega)$	1
$\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\pi}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(k\omega_0T_1)}{k}\delta(\omega-k\omega_0)$	$x_{(t)}=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<T_1\\ 0 & T_1<\lvert t\rvert\le\frac{T}{2}\end{cases}$ $x_{(t+T)}=x_{(t)}$
$a_k=\frac{1}{T}$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T})$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$
-	$\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$	$x_{(t)}=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<T_1\\ 0 & \lvert t\rvert>T_1\end{cases}$
-	$x_{(j\omega)}=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert\le B\\ 0 & \lvert\omega\rvert>B\end{cases}$	$\frac{\sin(B\cdot t)}{\pi\cdot t}$
-	1	$\delta(t)$
-	$e^{-j\omega t_0}$	$\delta(t-t_0)$
-	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	$u(t)$
-	$1/(a+j\omega)$	$e^{-a\cdot t}\cdot u_{(t)};\mathrm{Re}\{a\}>0$
-	$1/(a+j\omega)^2$	$t\cdot e^{-a\cdot t}\cdot u_{(t)}$
-	$1/(a+j\omega)^n$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\cdot e^{-a\cdot t}\cdot u_{(t)}$

התמרת פוריה בזמן בדיד

מקדמי פוריה (אם האות מחזורי)	התמרת פוריה	האות בזמן בדיד
a_k	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\cdot\delta(\omega-k\omega_0)$	$\sum_{k=<N>}a_k\cdot e^{jk\omega_0 n}$
$a_1=1$ $a_k=0$	$2\pi\cdot\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi\cdot l)$	$e^{j\omega_0 n}$
$a_1=0.5j$ $-a_{-1}=0.5j$ $a_k=0$	$\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$	$\cos(\omega_0\cdot n)$
(1) עמודה אמצעית למטה	$\frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right)$	$\sin(\omega_0\cdot n)$
$a_0=1$ $a_k=0$	$2\pi\delta(\omega)$	1
(2) עמודה אמצעית למטה	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(k\omega_0T_1)}{k}\delta(\omega-k\omega_0)$	$x_{(n)}=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert<N_1\\ 0 & N_1<\lvert n\rvert\le\frac{N}{2}\end{cases}$ $x_{(n+N)}=x_{(n)}$
$a_k=\frac{1}{N}$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T})$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n-kN)$
-	$\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$	$x_{(n)}=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert<N_1\\ 0 & \lvert n\rvert>N_1\end{cases}$
-	$x_{(t)}=\begin{cases}1 & 0\le\lvert\omega\rvert\le B\\ 0 & B<\lvert\omega\rvert\le\pi\end{cases}$	$\frac{\sin(Bn)}{\pi n};0<B<\pi$
-	1	$\delta(n)$
-	$e^{-j\omega n_0}$	$\delta(n-n_0)$
-	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$	$u(n)$
-	$1/(1-ae^{-j\omega})$	$a^nu_{(n)};\lvert a\rvert<1$
-	$1/(1-ae^{-j\omega})^2$	$(n+1)a^nu_{(n)}$
-	$1/(1-ae^{-j\omega})^r$	$\frac{(n+r-1)}{n!(r-1)!}a^nu_{(n)}$

שונות

נוסחאות כלליות:

$$\sin(k\omega_0 \cdot t) = \frac{e^{jk\omega_0 \cdot t} - e^{-jk\omega_0 \cdot t}}{2j}$$

$$\cos(k\omega_0 \cdot t) = \frac{e^{jk\omega_0 \cdot t} + e^{-jk\omega_0 \cdot t}}{2}$$

$$\sinh = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$(ax) = \frac{\sin(\pi ax)}{\pi ax}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{bx}{a})dx = \frac{\pi}{b}$$

$$e^{jk2\pi} = 1$$

$$e^{jk(2\pi+1)} = -1$$

$$e^{jk\pi} = (-1)^k$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{(n)} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{(l-kN)}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow X(j \cdot 0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

טור פוריה לרכבת הלמים:

$$x_{(t)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{(t-lT)} \;\; ; \;\; a_k = \frac{1}{T} \;\; \Rightarrow \;\; x_{(t)} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

מד"ר מסדר ראשון:

$$y' + a_{(x)} \cdot y = b_{(x)}$$

$$\mu_{(x)} = e^{\int a_{(x)} dx} \qquad , c_{\mu} = 0$$

$$y = \frac{1}{\mu_{(x)}} \cdot \left(\int \mu_{(x)} \cdot b_{(x)} dx + c \right)$$

במד"ר - אם הפתרון הפרטי תלוי בהומוגני:

הולכים איבר איבר באגף ימין, מחשבים לו את הערך העצמי, ויוצרים לפי הנוסחה איבר מתאים בפתרון הפרטי.

אם נתקלים פעמים באותו ערך עצמי חייבים לקחת את האיבר עם הפולינום בעל החזקה הגבוהה ביותר.

$$y_p = x^m e^{\alpha \cdot x}[(c_0 \cdot x^0 + ... + c_k \cdot x^k)\cos(bx) + $$
$$+ (\tilde{c}_0 \cdot x^0 + ... + \tilde{c}_k \cdot x^k)\sin(bx)]$$

k - המעלה הכי גבוהה של הפולינום $f_{(x)}$ באגף ימין.

m - הריבוי של השורש λ (בפולינום האופייני) **שמופיע באגף שמאל וגם באגף ימין.**

סדרה חשבונית:

$$a_n = a_0 + n \cdot d$$

$$S_n = (a_0 + a_n) \cdot \frac{n+1}{2}$$

סדרה הנדסית:

$$\sum_{k=-N}^{N} q^k = q^{-N} \cdot \frac{1-q^{2N+1}}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

הערה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

חלוקת פולינומים:

$$\begin{array}{l} \quad\; x^2 + 5x + 6 \\ \overline{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} \,\big|\, x+1 \\ \underline{x^3 + x^2} \quad \downarrow \\ 0 + 5x^2 + 11x \\ \quad \underline{5x^2 + 5x} \quad \downarrow \\ \qquad 0 + 6x + 6 \\ \qquad\;\; \underline{6x + 6} \\ \qquad\quad 0 + 0 \end{array}$$

פירוק לגורמים בשיטת השארית:

חובה לבדוק שלאחר מציאת השורשים, אכן מקבלים את הפולינום הרצוי.

סד"פ:

1. אם מעלת המונה גדולה או שווה למעלת המכנה – מבצעים חלוקת פולינום.
2. את השארית – מפרקים לגורמים ע"פ שיטת השארית.
3. ניתן להשתמש בנוסחה:

$$F(s) \cdot (s-s_0)^n = ... + A_1(s-s_0)^{n-1} + ... + A_k(s-s_0)^{n-k} + ...$$

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} \lim_{s \to s_0} \left[(s-s_0)^n \cdot F(s) \right]^{(n-k)} \quad k = 1...n$$

הערה: 1 = !0 לפי הגדרה.

דוגמא - ללא הנוסחה:

$$\frac{s^3}{s^3+3s+1} \Rightarrow \overline{s^3}\,\big|\, s^3 + 3s + 1 \Rightarrow 1 - \frac{3s+1}{s^3+3s+1}$$

$$\frac{3s+1}{s^3+3s+1} = \frac{3s+1}{s \cdot (s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$s \cdot \frac{A}{s} + s \cdot \frac{B}{s+1} \Big|_{s=0} + s \cdot \frac{C}{(s+1)^2} \Big|_{s=0} = s \cdot \frac{3s+1}{s \cdot (s+1)^2} \Big|_{s=0}$$

$$A = \frac{3s+1}{(s+1)^2} \Big|_{s=0} = 1$$

$$C = \frac{3s+1}{s} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$(s+1)^2 \cdot \frac{A}{s} + (s+1)^2 \cdot \frac{B}{s+1} + (s+1)^2 \cdot \frac{C}{(s+1)^2} = (s+1)^2 \cdot \frac{3s+1}{s \cdot (s+1)^2}$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 \cdot \frac{A}{s} + (s+1) \cdot B + C = \frac{3s+1}{s} \right]$$

$$\frac{(s+1)(2s-(s+1))}{s^2} \cdot A \Big|_{s=-1} + B + 0 = -\frac{1}{s^2} \Big|_{s=-1}$$

$$B = -\frac{1}{s^2} \Big|_{s=-1} = -1$$

$$\frac{s^3}{s^3+3s+1} = 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}$$

שימוש בנוסחה:

$$B = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \to -1} \left[(s+1)^2 \cdot \frac{3s+1}{s \cdot (s+1)^2} \right]^{(2-1)} \quad k = 1 \;\Rightarrow\; B = -1$$

$$C = \frac{1}{(2-2)!} \lim_{s \to -1} \left[(s+1)^2 \cdot \frac{3s+1}{s \cdot (s+1)^2} \right]^{(2-2)} \quad k = 2 \;\Rightarrow\; C = 2$$

זהויות טריגונומטריות:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$

$1 + \cot^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan(2\alpha) = 2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$

$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin(a/2-\beta/2)\cos(a/2+\beta/2)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$

$\sin\alpha\cos\beta = 1/2\left(\sin(a+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$

$\sin\alpha\sin\beta = 1/2\left(\cos(a-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

$\cos\alpha\cos\beta = 1/2\left(\cos(a+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta) = (\tan\alpha + \tan\beta)/(1 - \tan\alpha\tan\beta)$

$\tan(\alpha-\beta) = (\tan\alpha - \tan\beta)/(1 + \tan\alpha\tan\beta)$

$\tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha+\beta)\tan\alpha\tan\beta$

$\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \pi/2$

הערה כללית חשובה:

אם רוצים לבצע: $x(t) \Rightarrow x(a \cdot t + b)$

אז קודם מזיזים ב- b ורק אח"כ כופלים ב 1/a.

קונבולוציה גרפית רגילה:

1. בוחרים את h או x לפי נוחות – והופכים את הפונקציה על ציר τ (בגלל $t-\tau$).
2. מזיזים את הפונקציה שהפכנו לפי t, ורצים על כל הערכים האפשריים של t.
3. כאשר בתחום מסוים של t, יש חפיפה בין הפונקציות, מחשבים את אינטגרל הקונבולוציה (תחומי אינטגרציה - ע"פ התחום של t).
4. מחברים את כל תוצאות האינטגרלים ע"פ התחומים השונים וזהו הפיתרון.