

אותות ומערכות  
044130

תרגיל מחשב #2

מגישים: אליחי מאיקס  
אירנה וולוקטינה



## שאלה 1

א. עבור חישובי פונקציות התמסורת, נשתמש בפיתוחים הבאים:

$$R \parallel L = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L}$$

$$L \parallel C = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$$R \parallel C = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

עבור מעגל A נקבל:

$$H_A = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R \parallel C}{R \parallel C + L} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1}{\frac{R}{1 + j\omega RC} + j\omega L} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}$$

עבור מעגל B נקבל:

$$H_B = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R \parallel L}{R \parallel L + C} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega RL}{R + j\omega L} + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - j\omega \frac{L}{R} - 1}$$

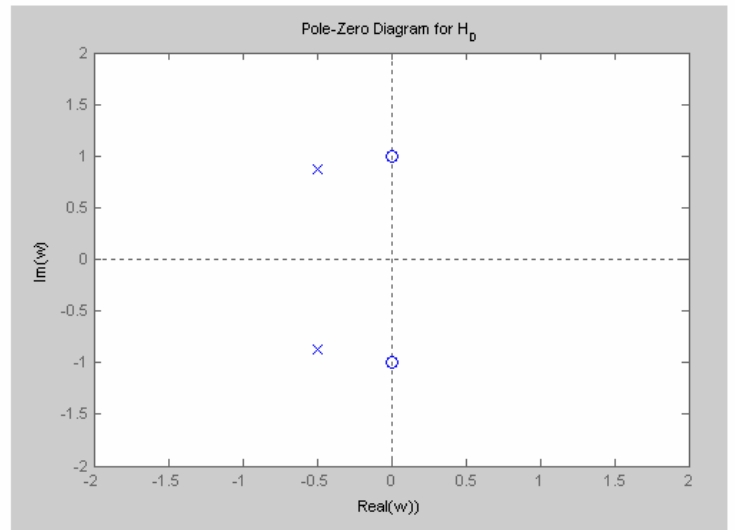
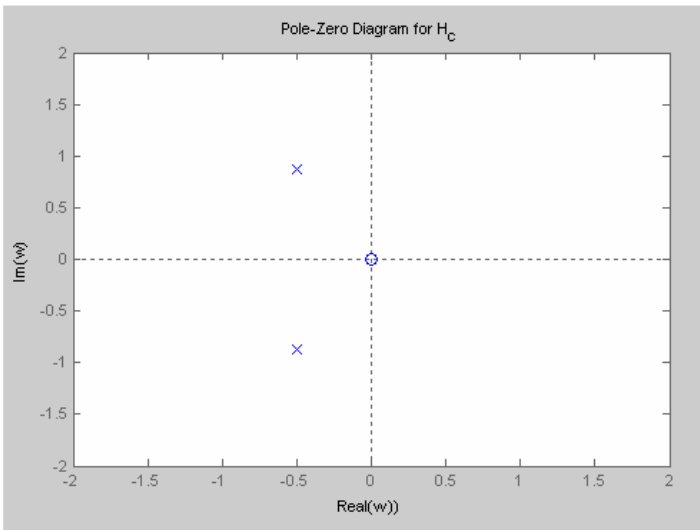
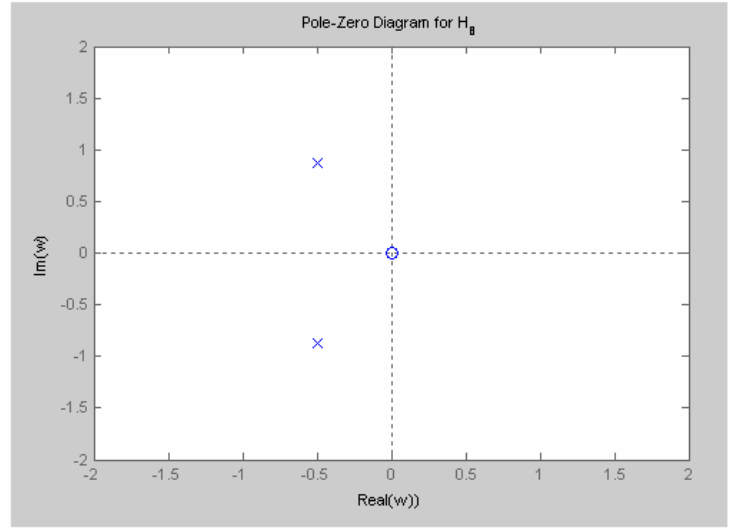
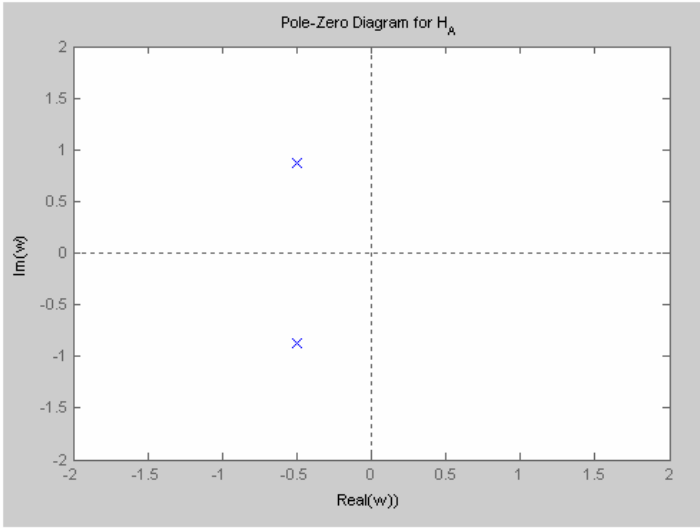
עבור מעגל C נקבל:

$$H_C = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{C \parallel L}{C \parallel L + R} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \cdot \frac{1}{\frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} + R} = \frac{j\omega L}{-\omega^2 RLC + R + j\omega L}$$

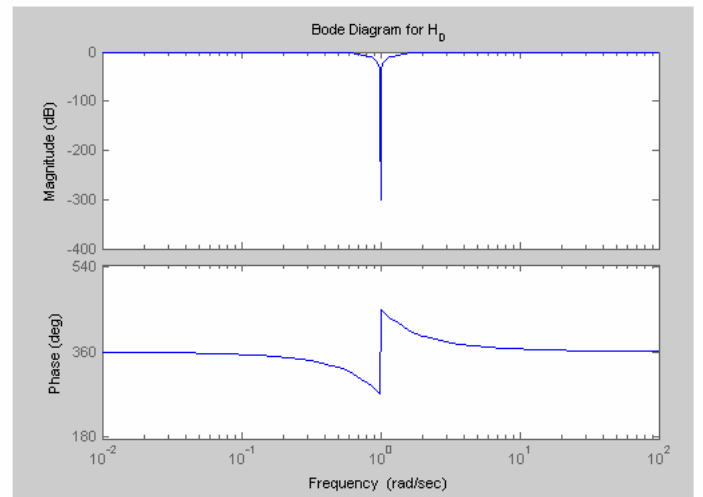
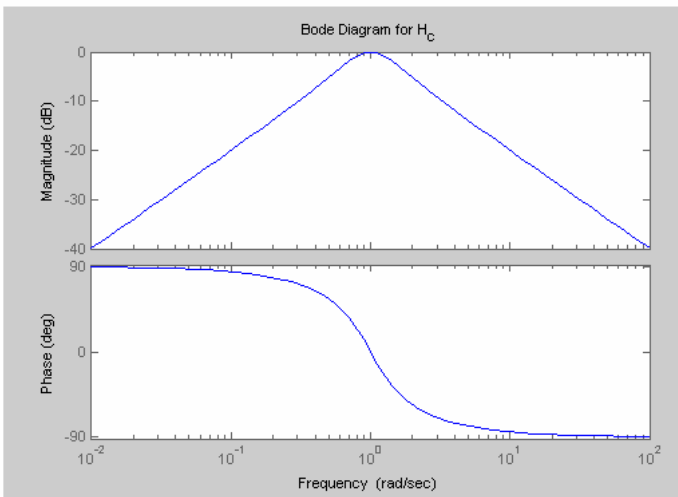
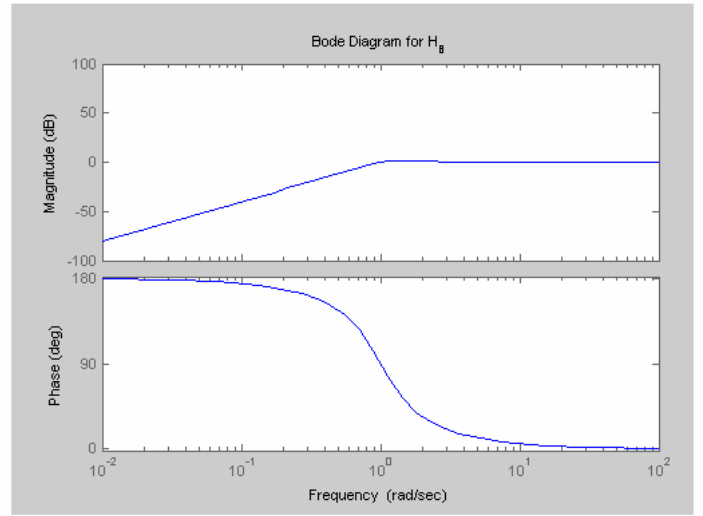
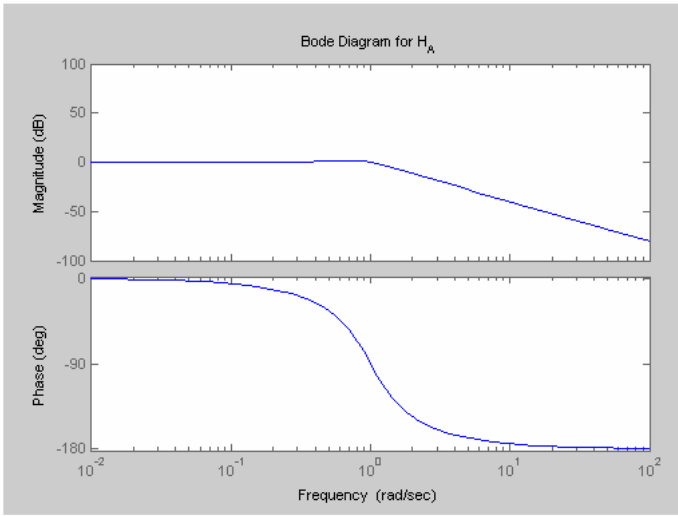
עבור מעגל D נקבל:

$$H_D = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{C \parallel L + R} = \frac{R}{R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}} = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}$$

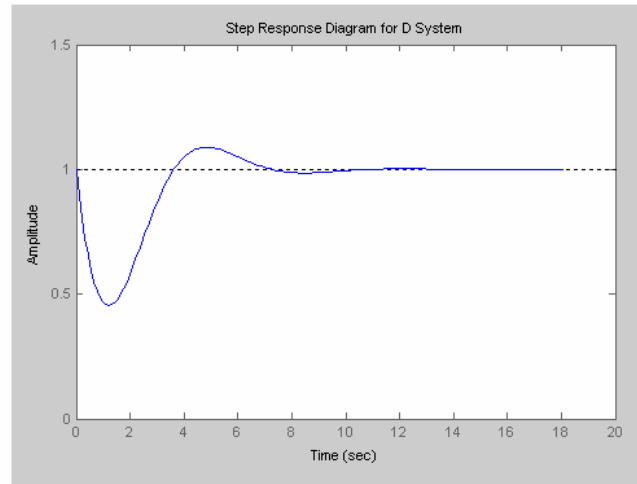
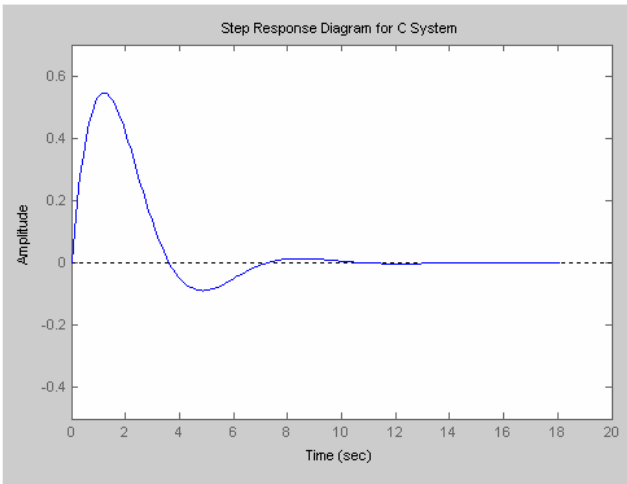
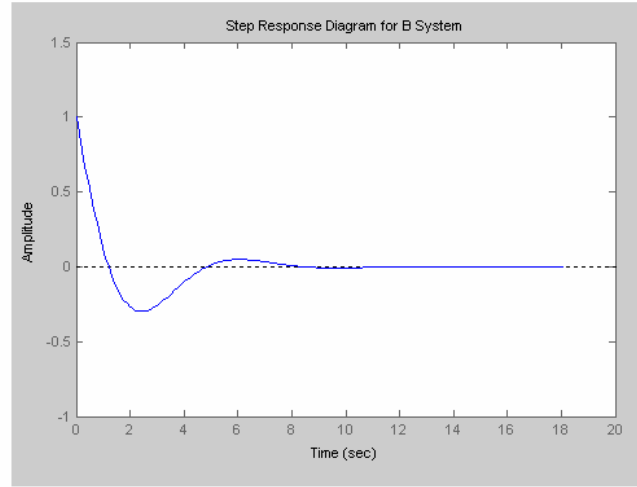
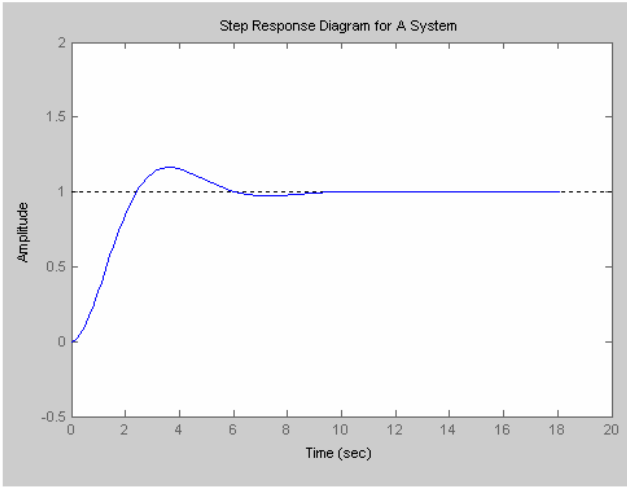
ב. להלן מפות קטבים-אפסים עבור המערכות הנתונות:



ג. להלן דיאגרמות בודה עבור המערכות הנתונות:



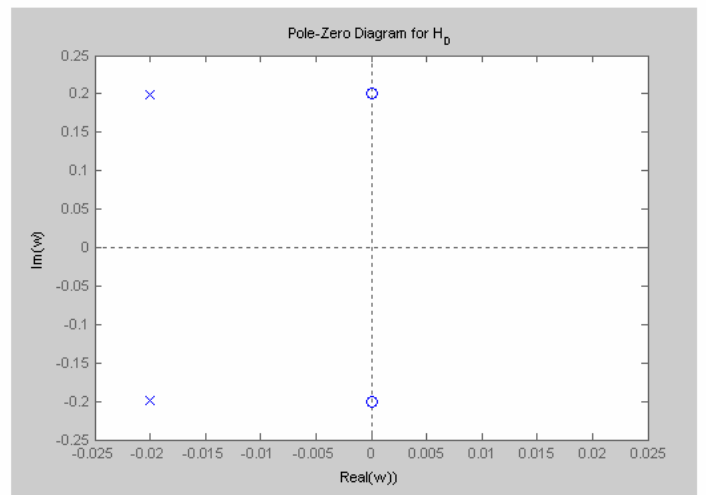
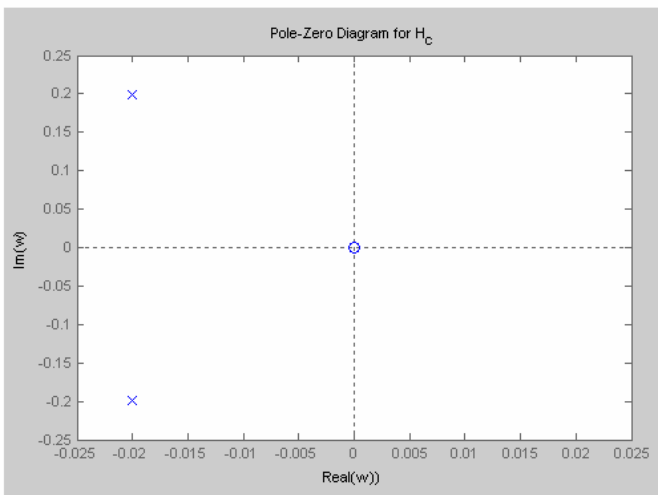
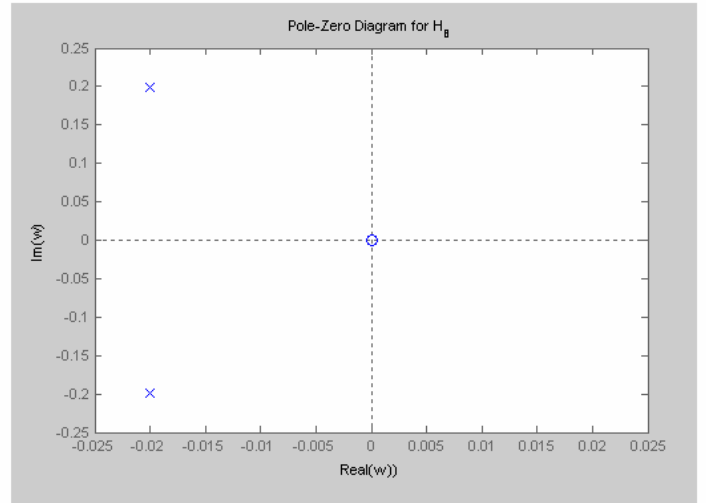
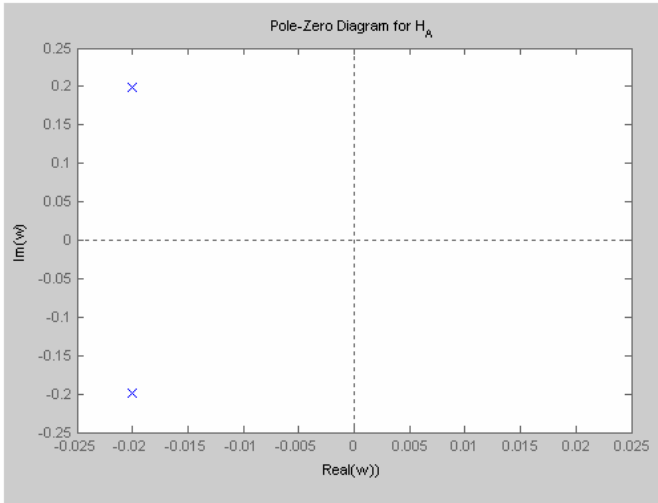
ד. להלן תגובת מדרגה עבור המערכות הנתונות:



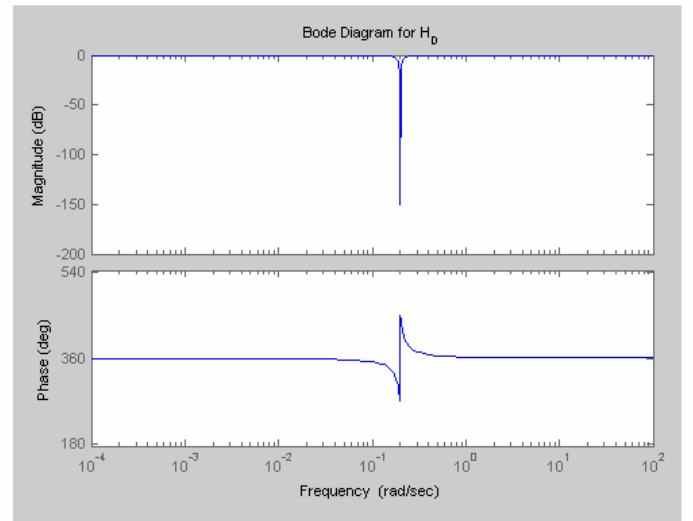
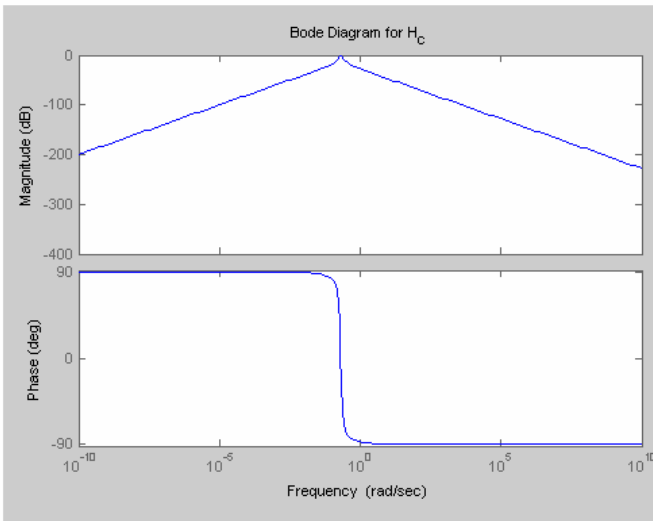
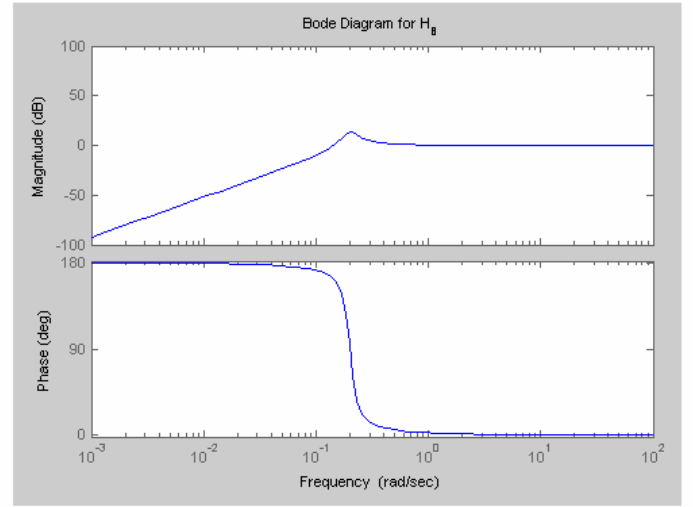
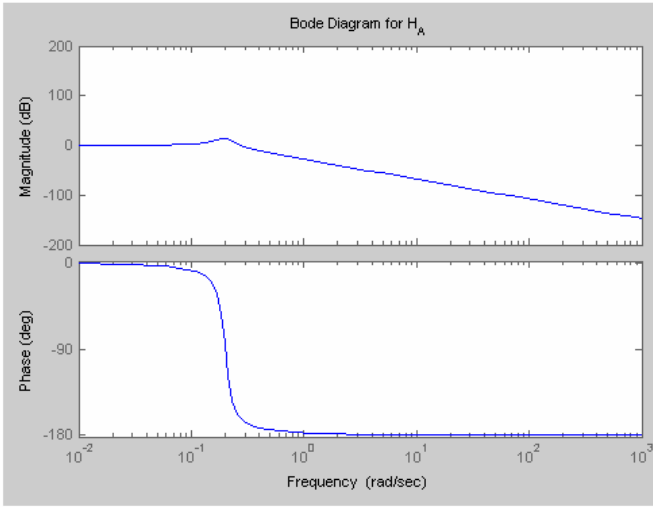
- מניתוח דיאגרמות בודה, נסיק את תפקיד כל אחד מהמעגלים:
- מערכת  $A$  משמשת כ  $LPF$  - ניתן לראות שעבור תדרים נמוכים, אין הגבר, ועבור תדרים גבוהים יותר ישנה הנחתה.
  - מערכת  $B$  משמשת כ  $HPF$  - נימוק הפוך למערכת  $A$ .
  - מערכת  $C$  משמשת כ  $BPF$  - מעבירה פס תדרים בסדר גודל של  $Hz$  בודדים.
  - מערכת  $D$  משמשת כמסנן פס, וחוסמת למעשה תחום קטן של תדרים (את השאר מעבירה).

ה. כעת נחזור על הסימולציה עבור  $R = C = L = 5$  :

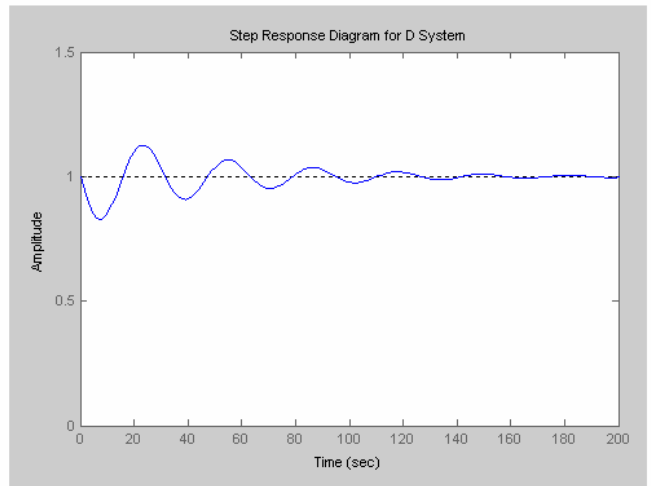
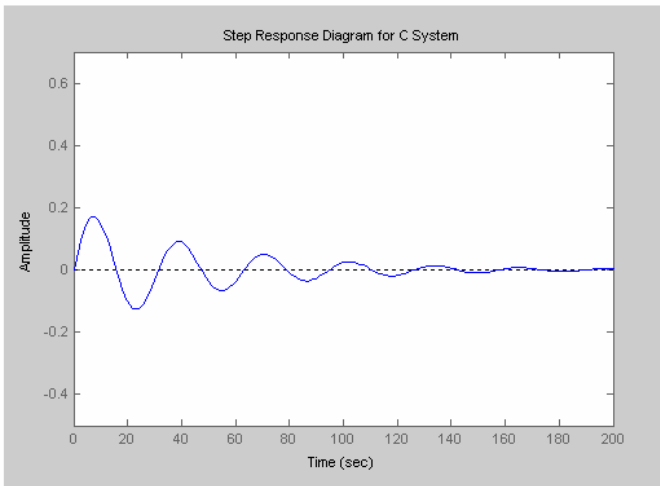
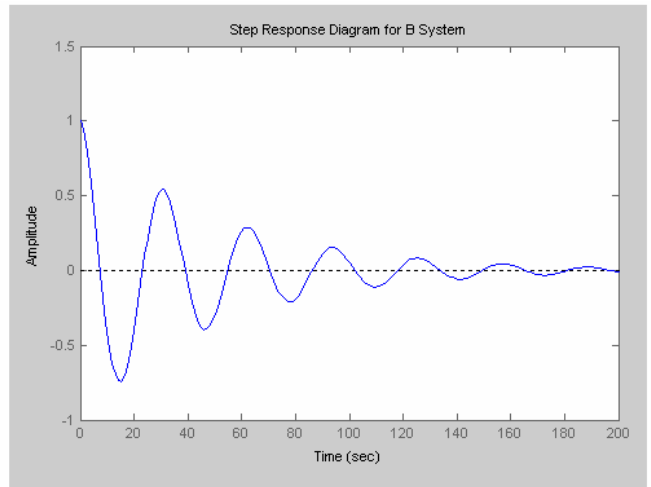
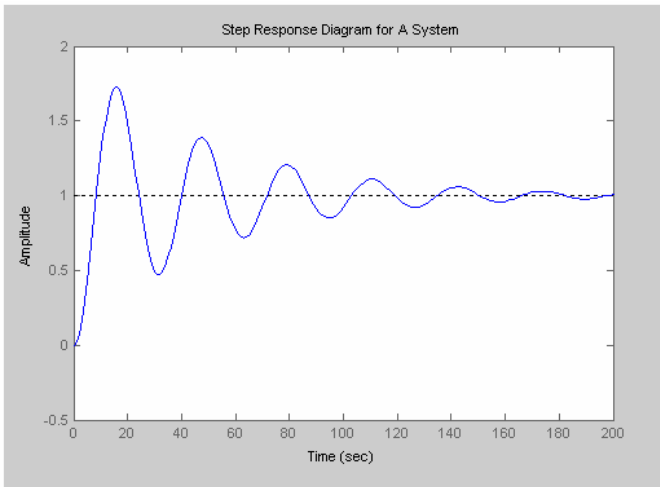
להלן מפות קטבים אפסים עבור המערכות הנתונות:



להלן דיאגרמות בודה עבור המערכות הנתונות:



להלן תגובת מדרגה עבור המערכות הנתונות:



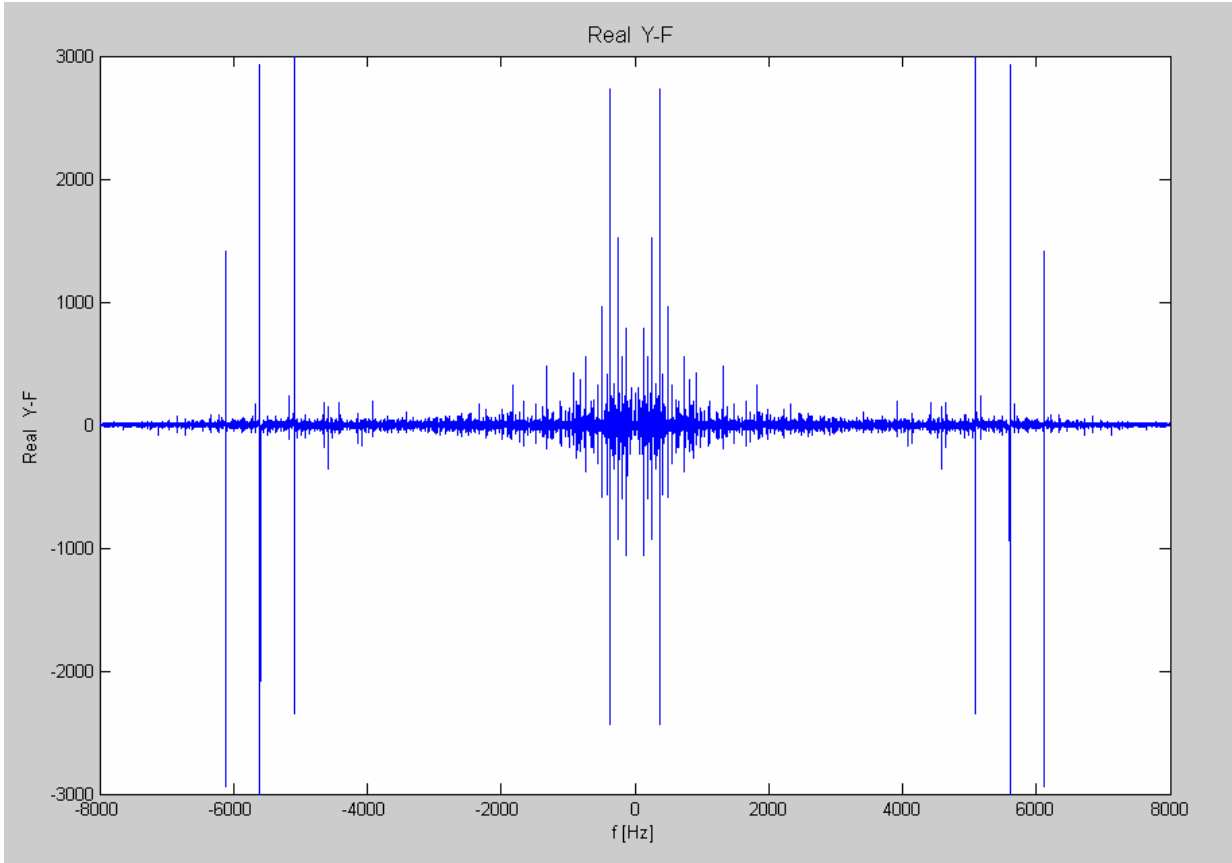
עבור הערכים החדשים:

- יש מעט שינוי במיקום הקטבים והאפסים, כצפוי – הרי המשוואות השתנו.
- אין הבדל בתפקוד המערכות (דיאגרמות בודה), אך יש מעט הבדל בערך ההגבר/הנחתה עבור תחומים מסויימים.
- בגרף התגובה למדרגה, אנו רואים שחל שינוי בזמן הדעיכה למצב המתמיד. שינוי זה נובע בגדילת קבוע הזמן  $\tau$  עבור המעגלים.



## שאלה 2

להלן התמרת פורייה של האות הדגום:



ניתן לראות (ולשמוע) שהרעש נמצא בתדרים גבוהים מ  $5000\text{Hz}$ , לכן בחרנו לממש  $LPF$ .

קבועים ופרמטרים עבור המערכת והמסנן:

$$f_s = 5000\text{Hz}$$

$$f_p = f_s - 1000 = 4000\text{Hz}$$

$$\delta_p = \delta_s = 0.01$$

$$\kappa = \frac{f_p}{f_s} = 0.8$$

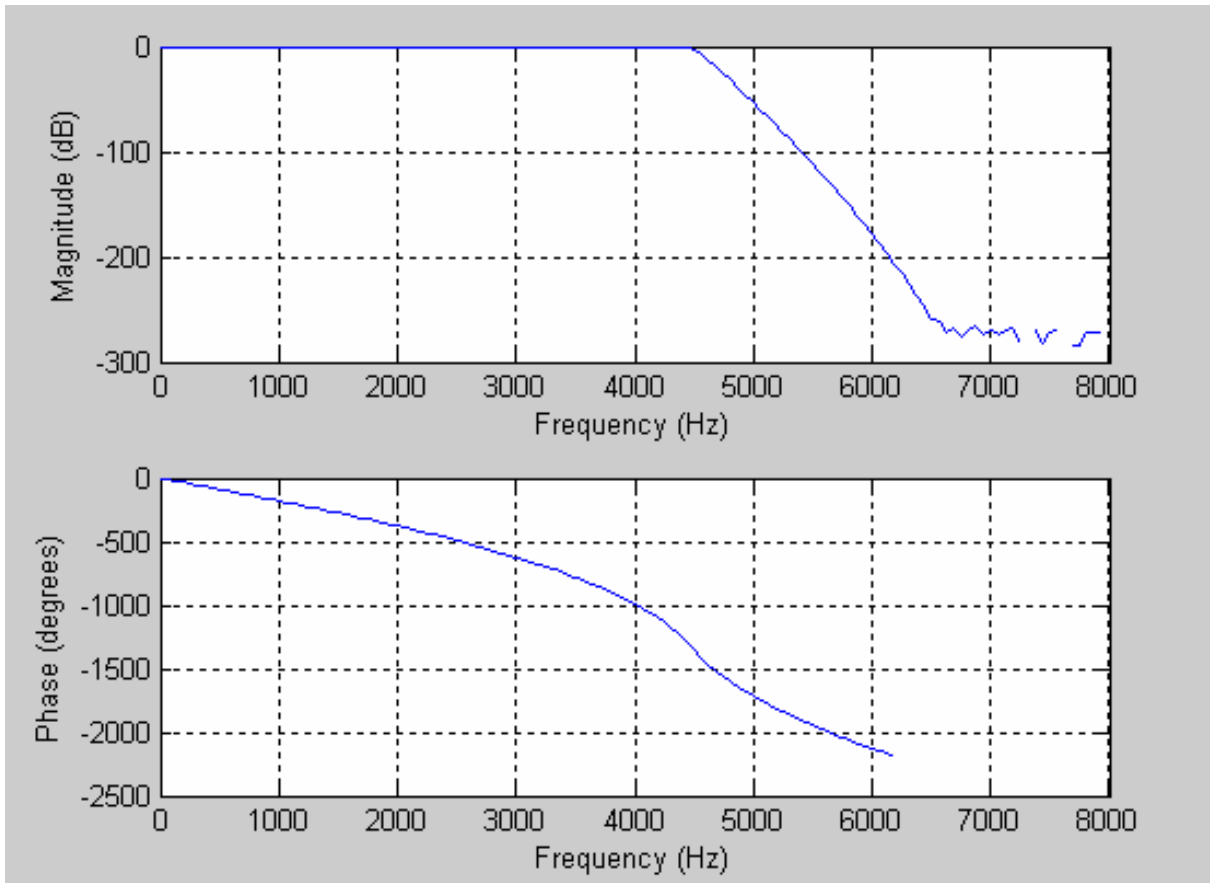
$$d = \sqrt{\frac{(1 - \delta_p)^{-2} - 1}{\delta_s^{-2} - 1}} = \dots = 0.001424$$

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{1}{d}\right)}{\log\left(\frac{1}{\kappa}\right)} = \dots = 30$$

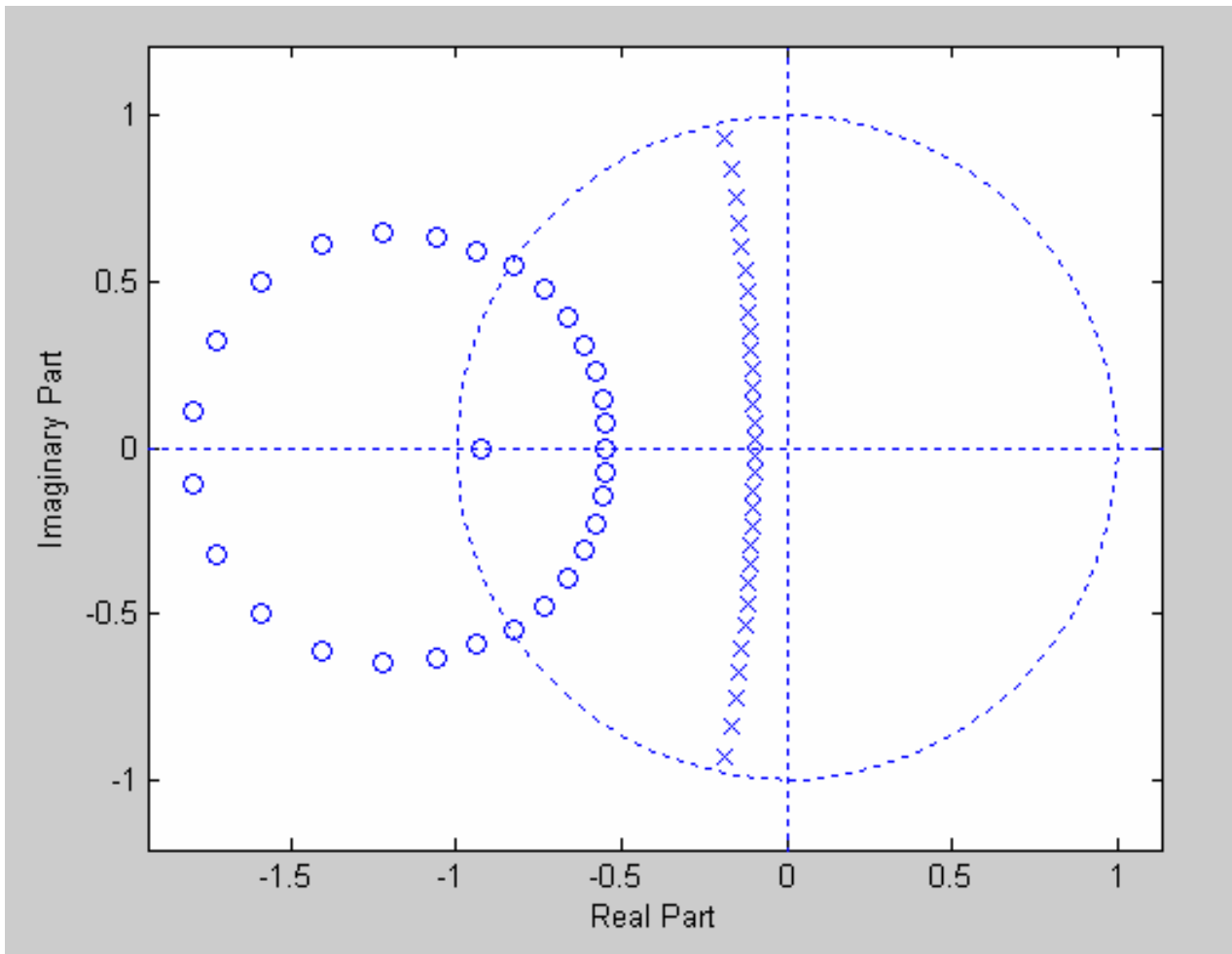
נמצא את תדר הקיטעון של המסנן:

$$f_p \left[ (1 - \delta_p)^{-2} - 1 \right]^{\frac{1}{2N}} \leq f_0 \leq f_s \left[ \delta_s^{-2} - 1 \right]^{\frac{1}{2N}} \Rightarrow f_0 = 4270 \text{ Hz}$$

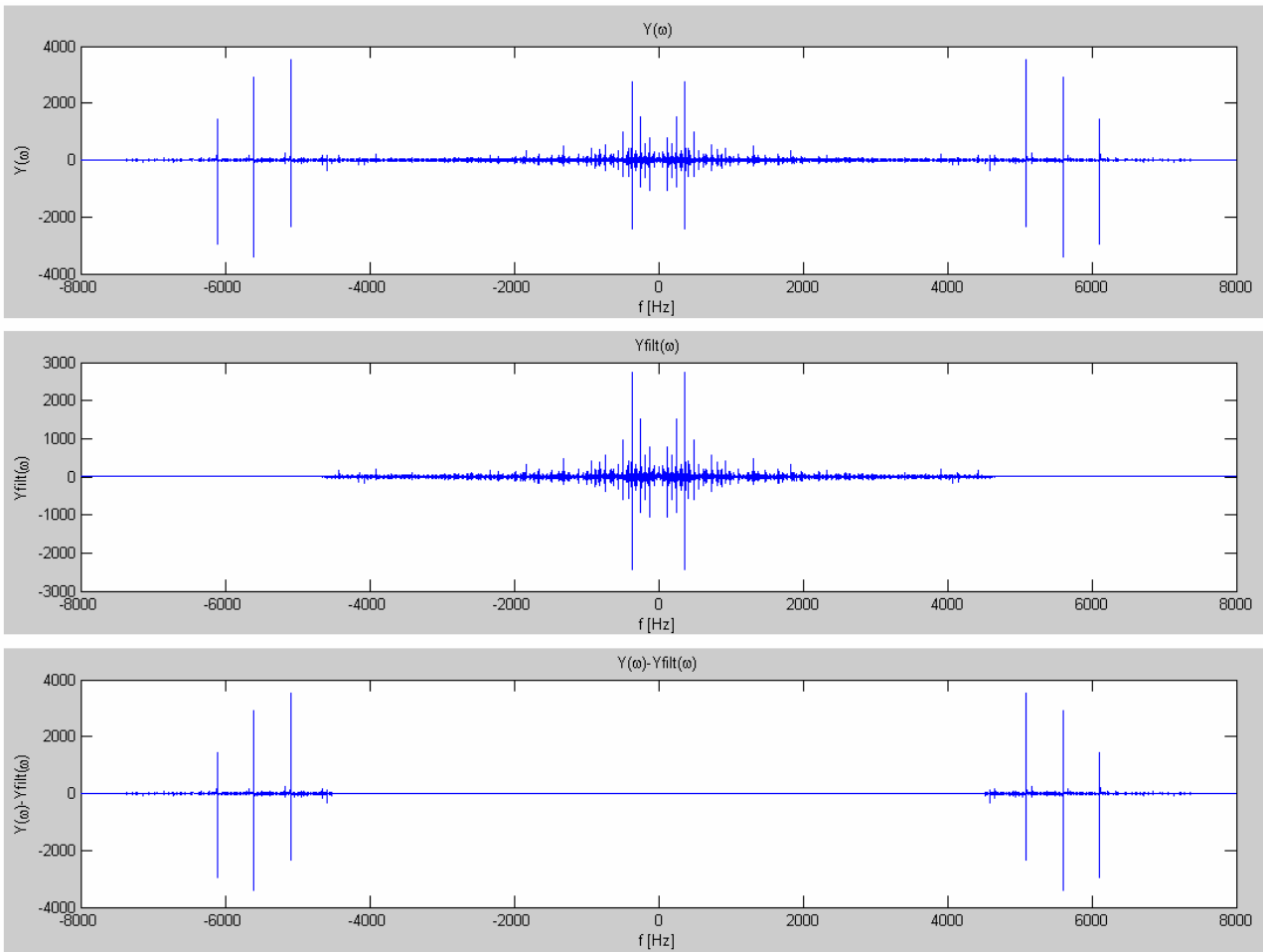
להלן תגובת התדר של המסנן:



להלן מפת הקטבים-אפסים של המסנן :



להלן האות המקורי, האות המסונן ואיבר השגיאה:



ניתן לראות שהשגיאה מכילה תדרים גבוהים בלבד (אותם בחרנו לסנן), אך מכילה גם מידע מהאות המקורי ולא רק מהרעש. במקרה זה, המחיר ששילמנו על ניקוי הרעש, היה איבוד חלק מהמידע הנמצא בתדרים גבוהים.

ניתן עדיין לשמוע מעט רעש באות המסונן, זאת בגלל שהיה קיים רעש בתדרים נמוכים, ובאזור זה, כאמור, לא שינינו את האות המקורי.

### שאלה 3

א. מהצבה בנוסחא הנתונה, נקבל את הביטוי הבא:

$$H(z) = C \cdot (z \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D =$$

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & z & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{16} & \frac{1}{8} & z - \frac{3}{64} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 = \frac{1}{64z^4 - 3z^3 + 8z^2 + 28z + 32} \cdot (\dots \ \dots \ \dots \ \dots) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{64 \cdot (4z^3 + 3z^2 + 2z + 1)}{64z^4 - 3z^3 + 8z^2 + 28z + 32} = \frac{4z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^4 - \frac{3}{64}z^3 + \frac{1}{8}z^2 + \frac{7}{16}z + \frac{1}{2}}$$

עבור הפונקציה  $ss2tf(A, B, C, D)$ , קיבלנו, כצפוי, את אותו הביטוי.

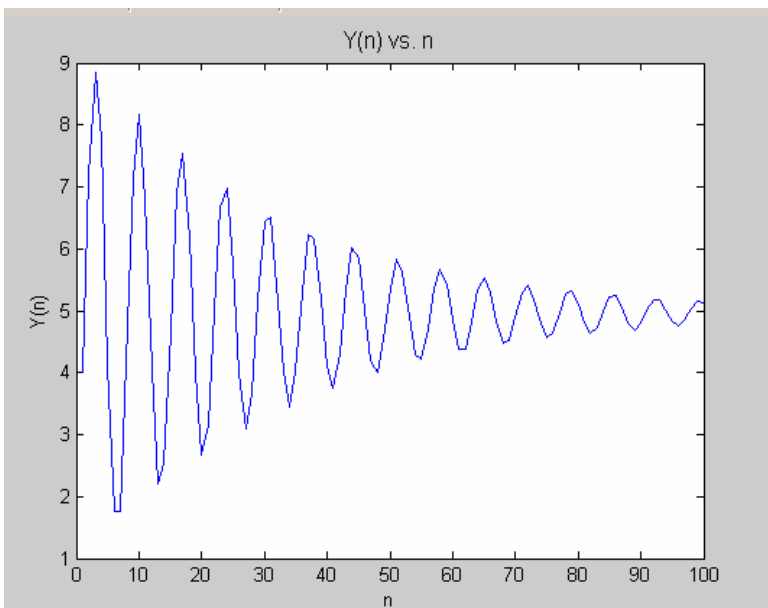
ב. כיידוע לנו מההרצאות, ניתן להציג מערכת משוואות הפרש ע"י משוואות המצב הבאות:

$$\begin{cases} q(n+1) = Aq(n) + Bx(n) \\ y(n) = Cq(n) + Dx(n) \end{cases}$$

$$q(n) = A^n q(0) + \sum_{k=1}^n A^{k-1} B \cdot x(n-k) \quad \text{לאחר פיתוח טריוויאלי, נגיע לביטוי המפורש:}$$

מכאן נוכל למצוא את ערכי  $y(n)$ .

לאחר חישוב רקורסיבי (מתואר בקוד) של וקטור המוצא  $y(n)$  קיבלנו את הגרף הבא:



ניתן לראות שזהו גרף "תגובה למדרגה" טיפוסי, שיתייצב לבסוף על  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 5$ .