אותות ומערכות
044130

תרגיל מחשב #1

מגישים: אליחי מאיקס
אירנה וולוקטינה

אותות ומערכות - תרגיל מחשב 1#

חלק I

א. עבור המערכת בעל תגובת התדר : $H(\omega)=-jsign(\omega)$, נוכל להסיק ללא חישוב את העובדות הבאות :

$H(\omega)=-jsign(\omega)$ הינה מדומה טהורה ואי זוגית $\Leftarrow$ $h(t)$ היא ממשית ואי זוגית.

הוכחה: נניח ש- $h(t)$ היא ממשית ואי-זוגית. אז

$$H(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\cdot e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\cdot\left[\cos(wt)-j\sin(wt)\right]dt=\cancel{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\cos(wt)dt}-\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\sin(wt)dt=$$

$$=-\frac{j}{\pi}\int_{0}^{\infty}h(t)\sin(wt)dt$$

האינטגרל הראשון התאפס כי האינטגרנד הוא פונקציה אי-זוגית בקטע סימטרי.
קיבלנו ש- $H(\omega)$ הינה פונקציה אי-זוגית ומדומה טהורה. מ.ש.ל

ב. עבור חיבור בקסקדה של שתי מערכות, נקבל את הקשר הבא :

$$y(t)=x(t)*h(t)*h(t)$$

$$Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)\cdot H(\omega)=X(\omega)\cdot sign^2(\omega)\cdot j^2=-X(\omega)\quad\forall\ \omega\neq 0$$

בנוסף, הקשר הנתון במישור הזמן $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt=0$ עובר למישור התדר באופן הבא :

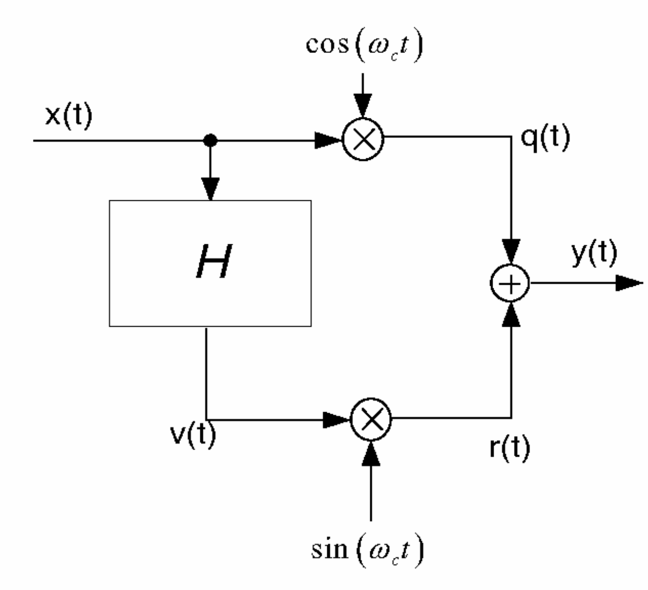
$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\overline{y(t)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\cdot\overline{Y(\omega)}d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\bar{1}dt=\frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\cdot\overline{\cancel{2\pi}\delta(\omega)}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\delta(\omega)d\omega=X(0)$$

$$\Rightarrow X(\omega)\big|_{\omega=0}=0$$

מכאן נקבל את הקשר המיוחל : $y(t)=-x(t)\quad\forall t$

ג. עבור המערכת הבאה :



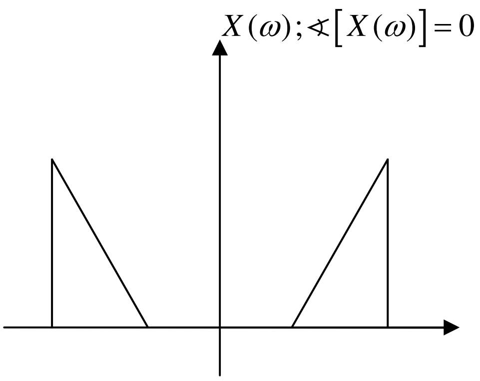
נקבל :

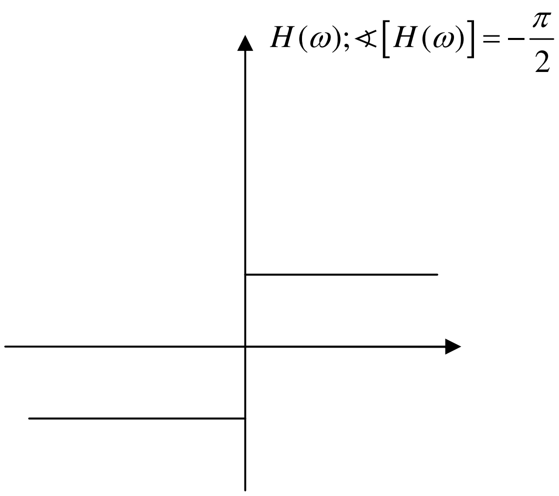
$$v(t)=x(t)*h(t)$$
$$r(t)=v(t)\cdot\sin(\omega_c t)$$
$$q(t)=x(t)\cdot\cos(\omega_c t)$$
$$y(t)=q(t)+r(t)$$

ומכאן, ע״י מתמטיקה פשוטה :

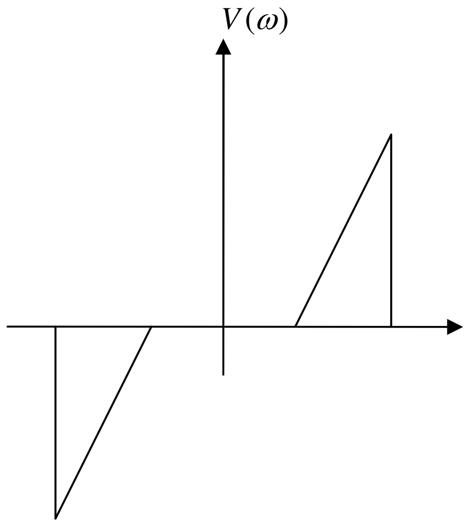
$$V(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)$$
$$Q(\omega)=\frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)\right]$$
$$R(\omega)=\frac{1}{2}\left[V(\omega-\omega_c)+V(\omega+\omega_c)\right]=\frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_c)H(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)H(\omega+\omega_c)\right]$$
$$Y(\omega)=Q(\omega)+R(\omega)$$

עבור שרטוט הגרפים, נשתמש בשני הגרפים הנתונים :



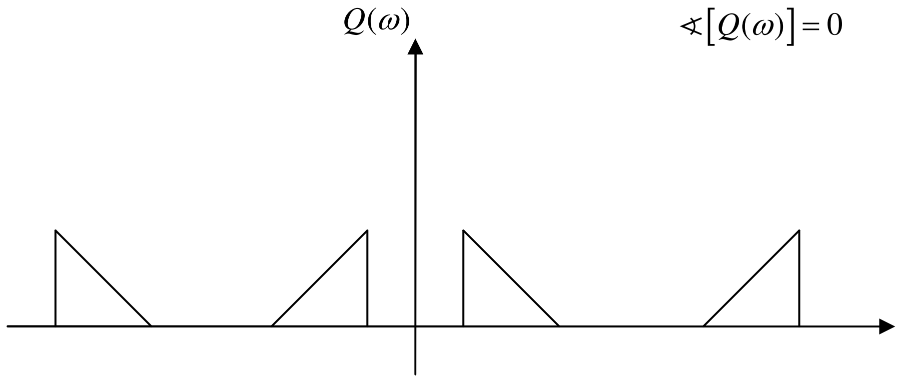


$$V(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$



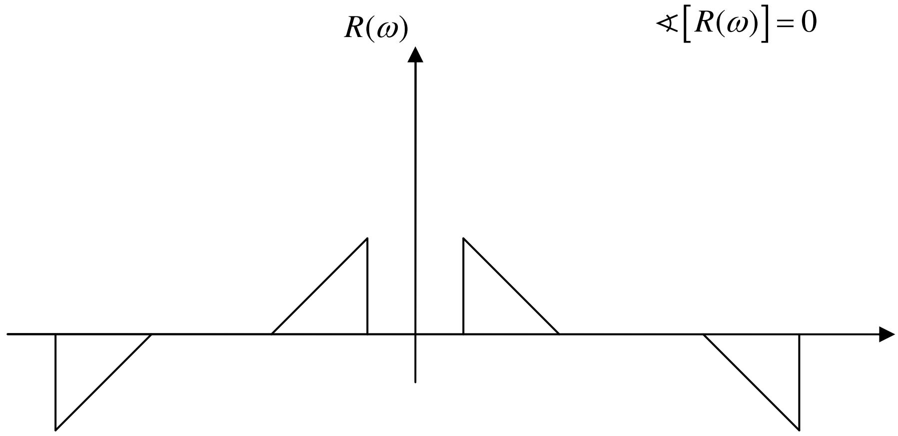
$$\sphericalangle\left[V(\omega)\right] = -\frac{\pi}{2}$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_c) + X(\omega+\omega_c)\right]$$



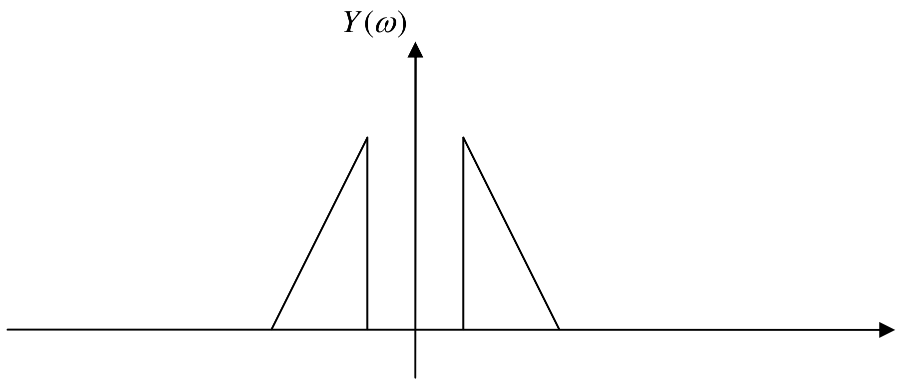
$$\sphericalangle\left[Q(\omega)\right] = 0$$

$$R(\omega) = \frac{1}{2j}\left[V(\omega-\omega_c) - V(\omega+\omega_c)\right] = -\frac{j}{2}\left[X(\omega-\omega_c)H(\omega-\omega_c) - X(\omega+\omega_c)H(\omega+\omega_c)\right]$$



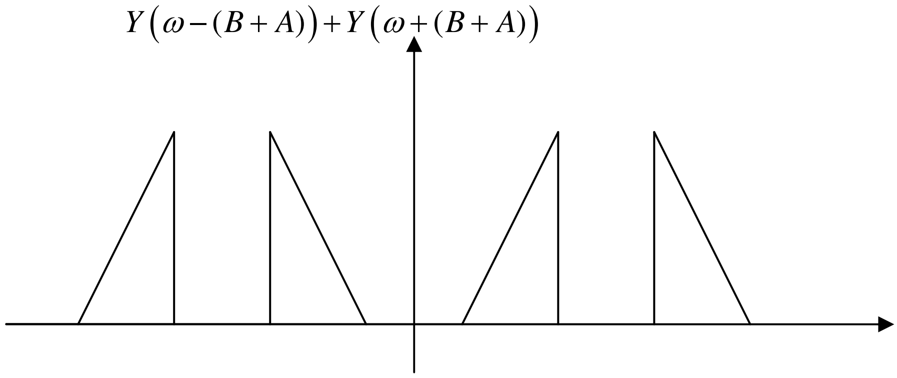
$$\sphericalangle\left[R(\omega)\right] = 0$$

$Y(\omega) = Q(\omega) + R(\omega)$ $\qquad$ $\measuredangle\left[Y(\omega)\right] = 0$

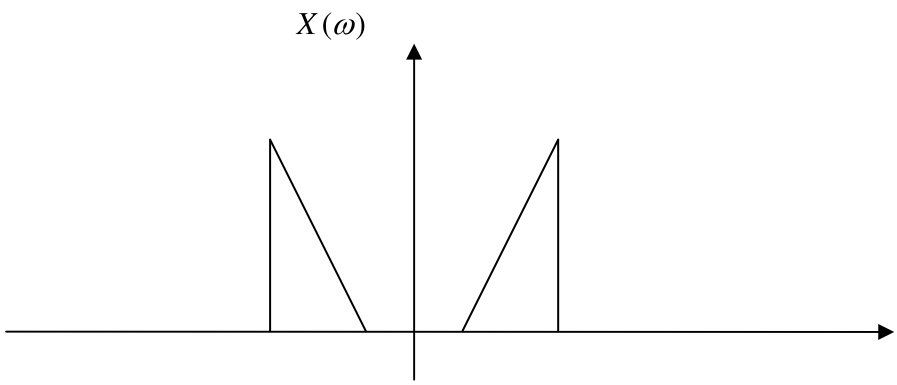


ניתן לראות בברור את הדימיון בין $Y(\omega)$ ל $X(\omega)$. נוכל להגיע מ $Y(\omega)$ ל $X(\omega)$ ע"י הצעדים הבאים:

- הזזה של האות ימינה ושמאלה תתן את האות:



- הכפלה ב LPF בתחום התדרים $\left[-B-\varepsilon, B+\varepsilon\right]$ תתן את האות המבוקש:

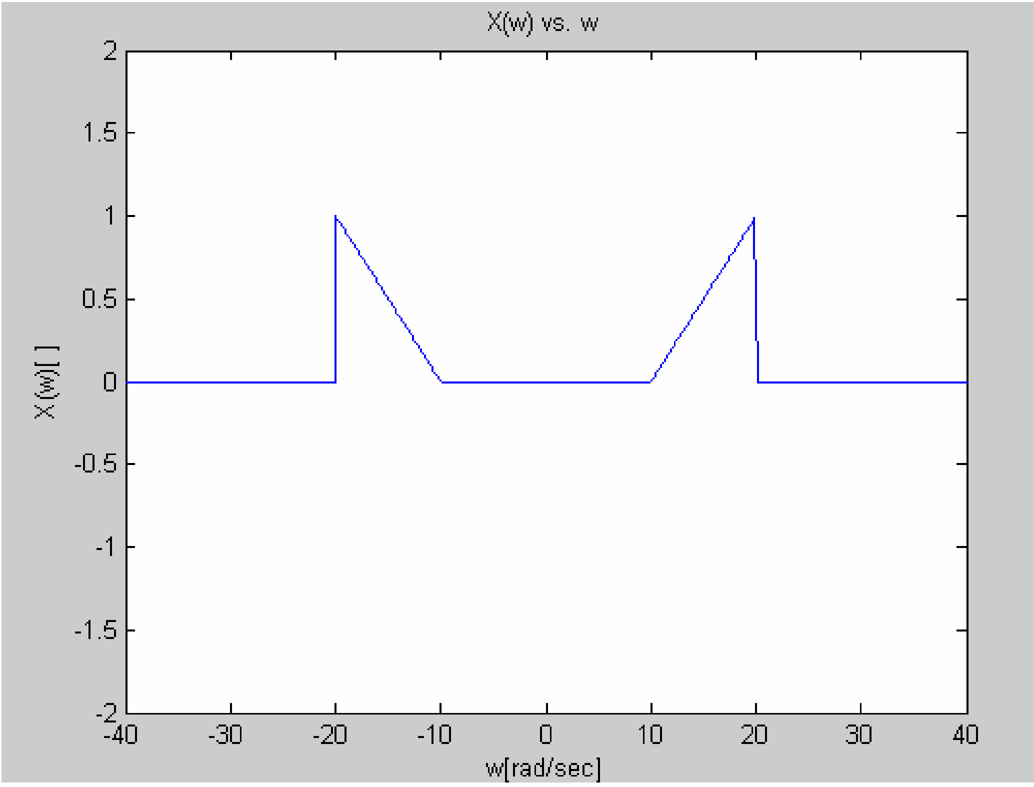


המשמעות של פעולות אלה בתחום הזמן הן: $y(t)\cdot\cos\left((A+B)t\right)*\left(\frac{B+\varepsilon}{\pi}\sin c\left((B+\varepsilon)t\right)\right) = x(t)$

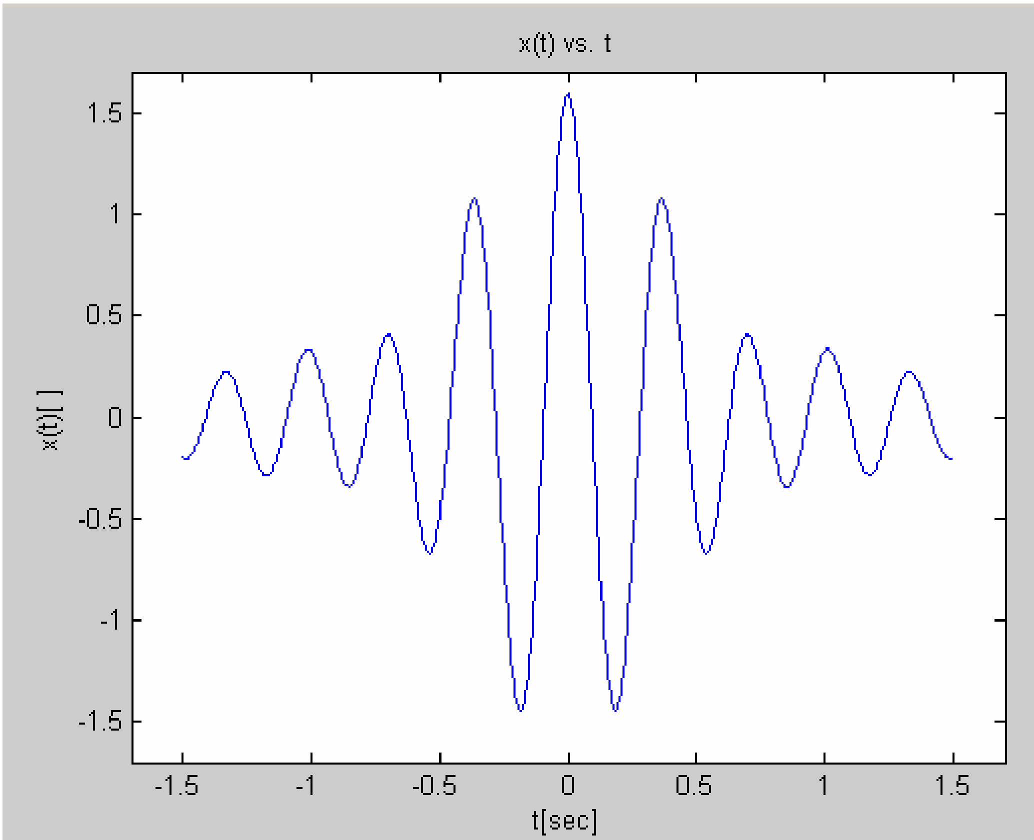
חלק II

בחלק זה נחשב ונשרטט גרפים עבור הקבועים: $A=10\frac{rad}{\sec}$;$B=20\frac{rad}{\sec}$;$\omega_c=30\frac{rad}{\sec}$

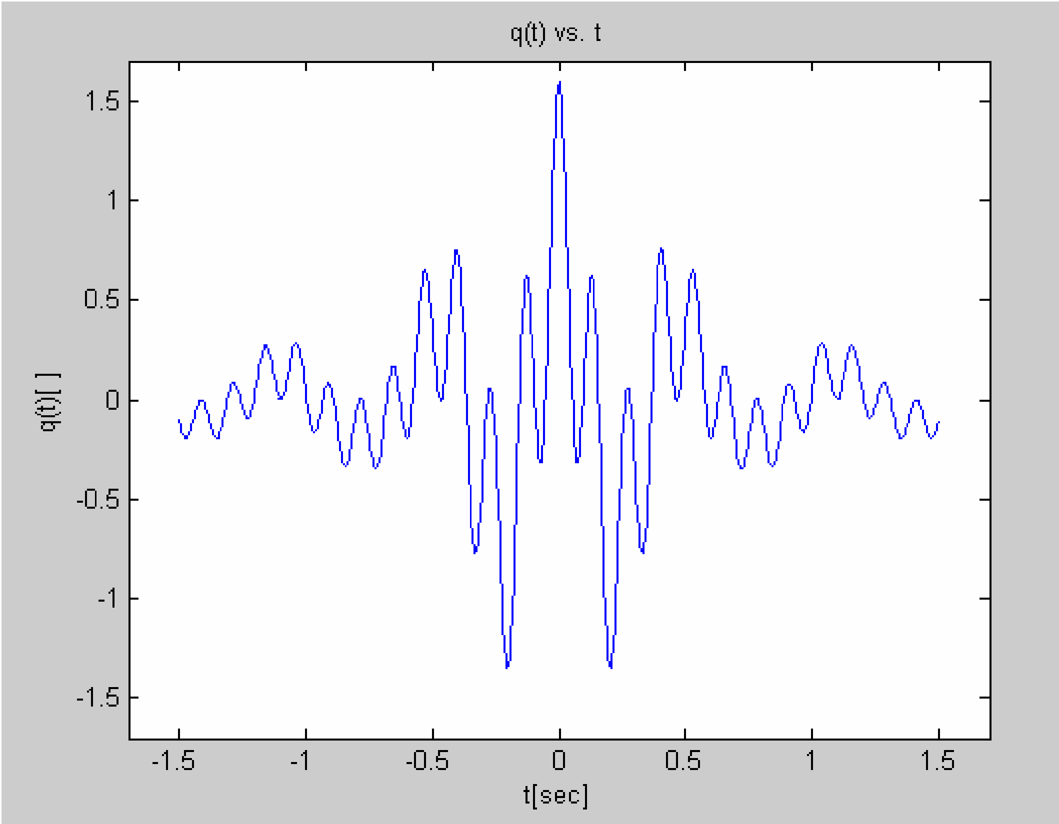
בעזרת משוואות ישרים ומספר פונקציות מדרגה, להלן שרטוט של $X(\omega)$:



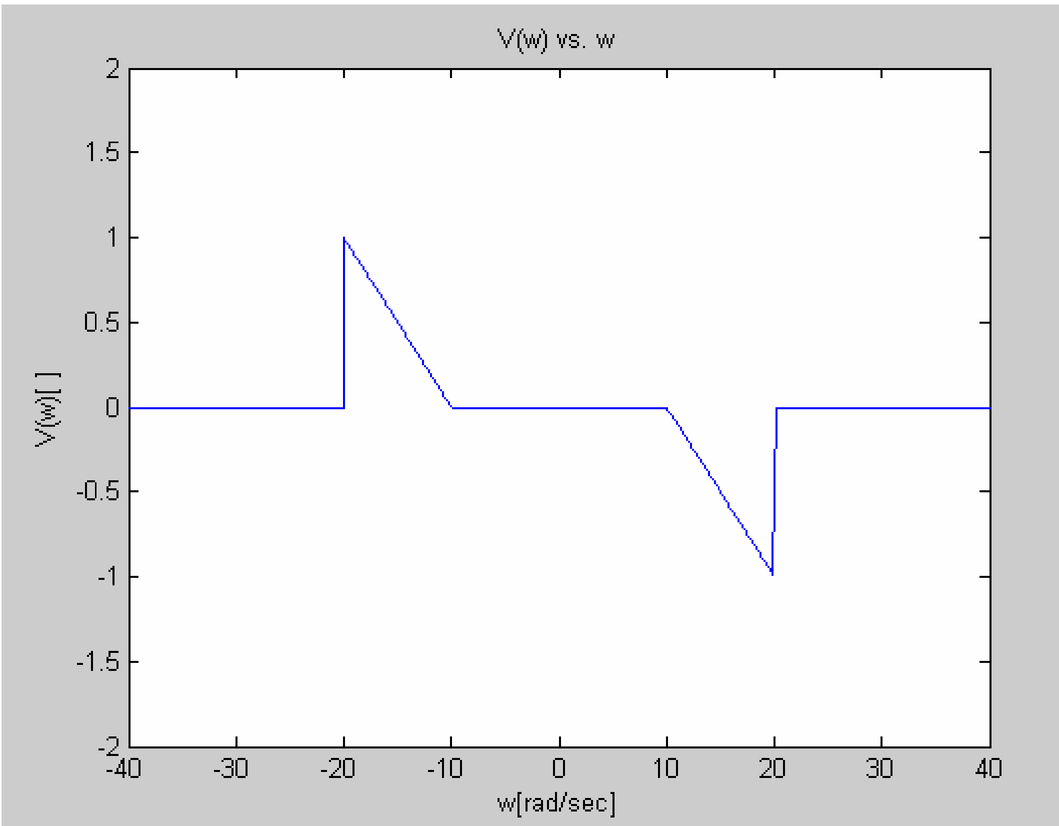
חישבנו את התמרת פורייה ההפוכה של $X(\omega)$ בעזרת הקרובים הנתונים, וקיבלנו:



עבור האות $q(t)=x(t)\cdot\cos(\omega_c t)$ נקבל את הגרף הבא :

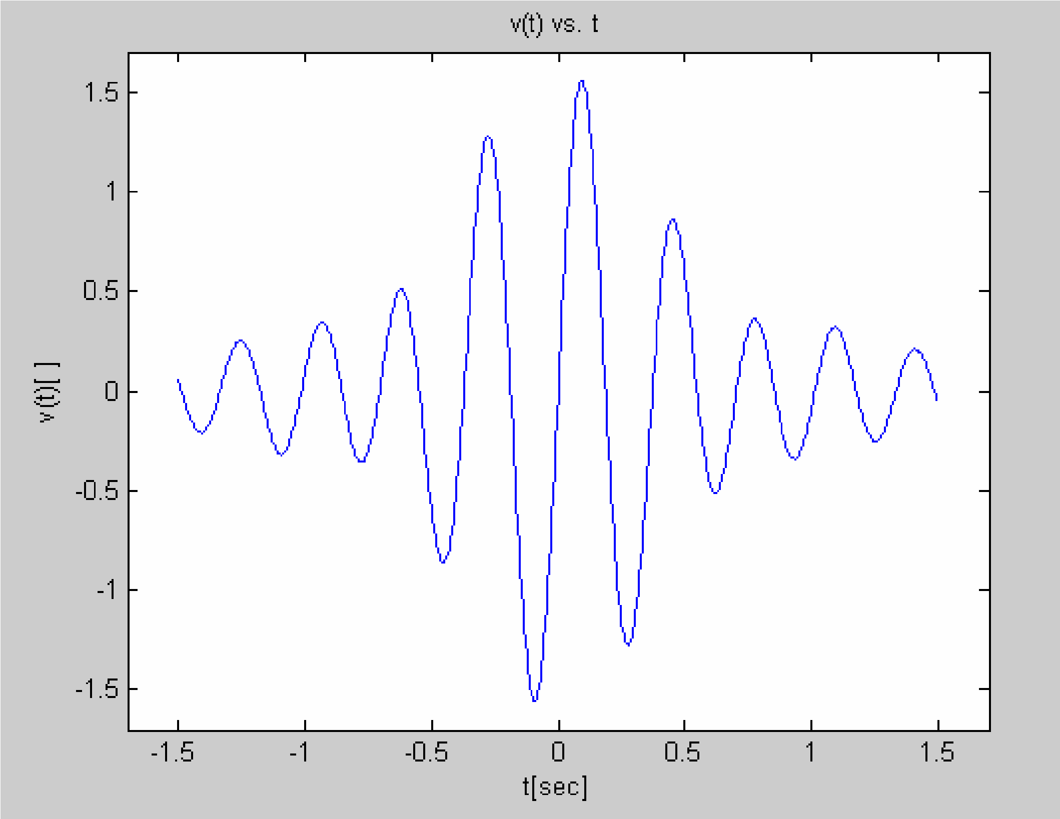


עבור האות $V(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)$ נקבל :

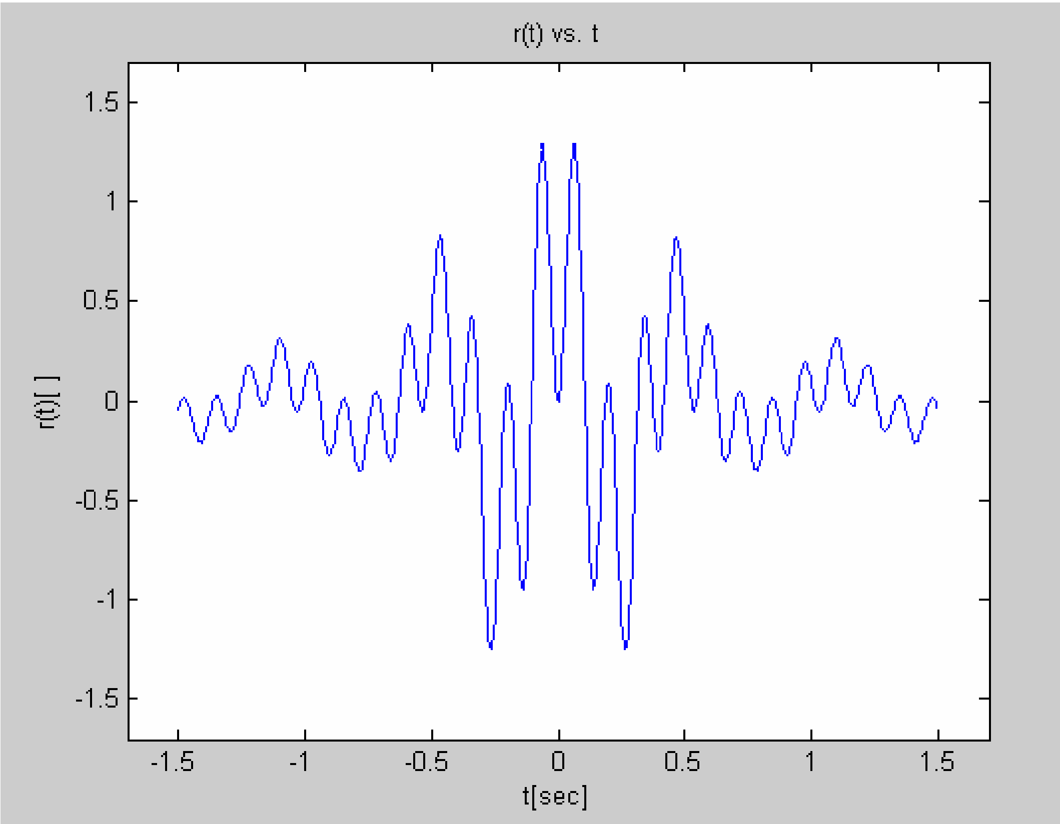


**זהו החלק המדומה של $V(\omega)$. החלק הממשי כאמור הוא אפס זהותית.

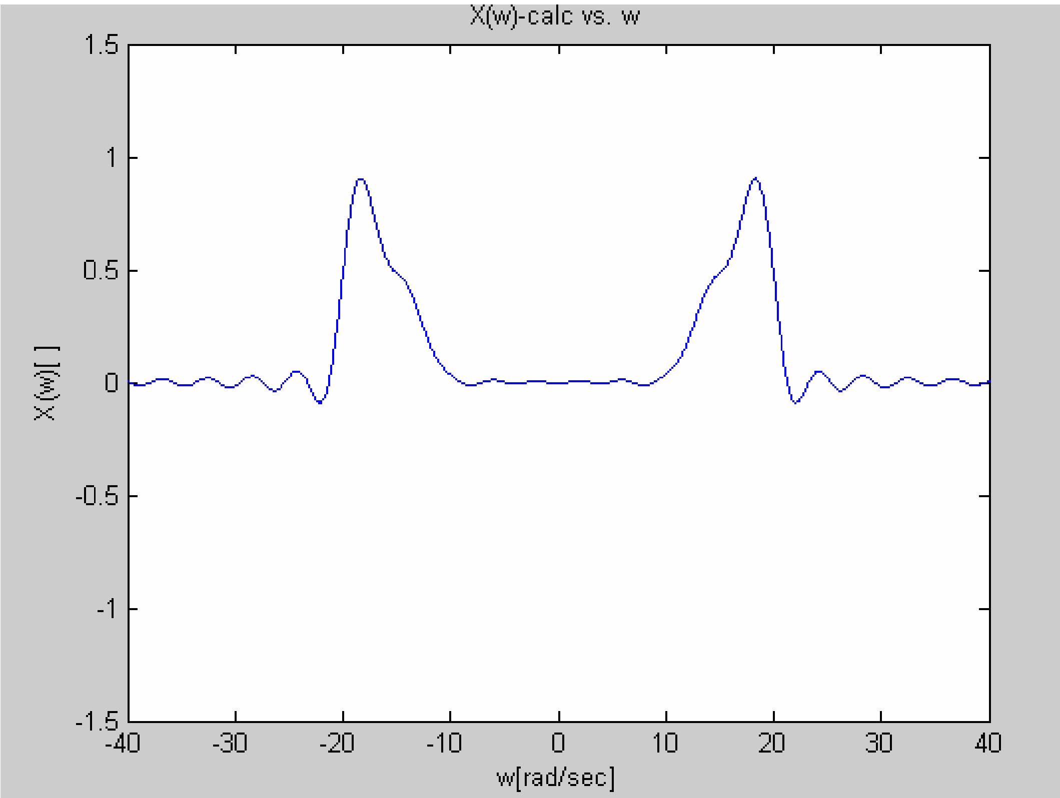
חישבנו את התמרת פורייה ההפוכה של $V(\omega)$ בעזרת הקרובים הנתונים, וקיבלנו:



עבור האות $r(t) = v(t) \cdot \sin(\omega_c t)$ נקבל את הגרף הבא:

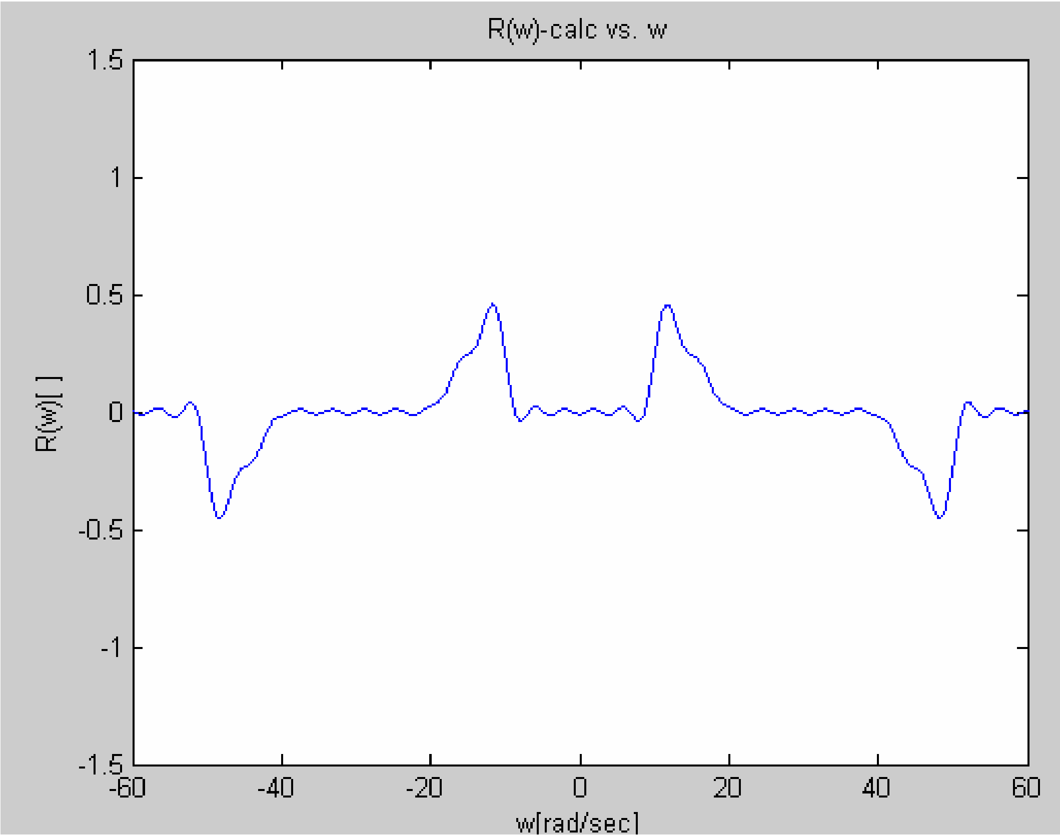


קירבנו את התמרת פורייה של $x(t)$ בעזרת הקרובים הנתונים, וקיבלנו:



** השוואה לגרף הנתון בהמשך.

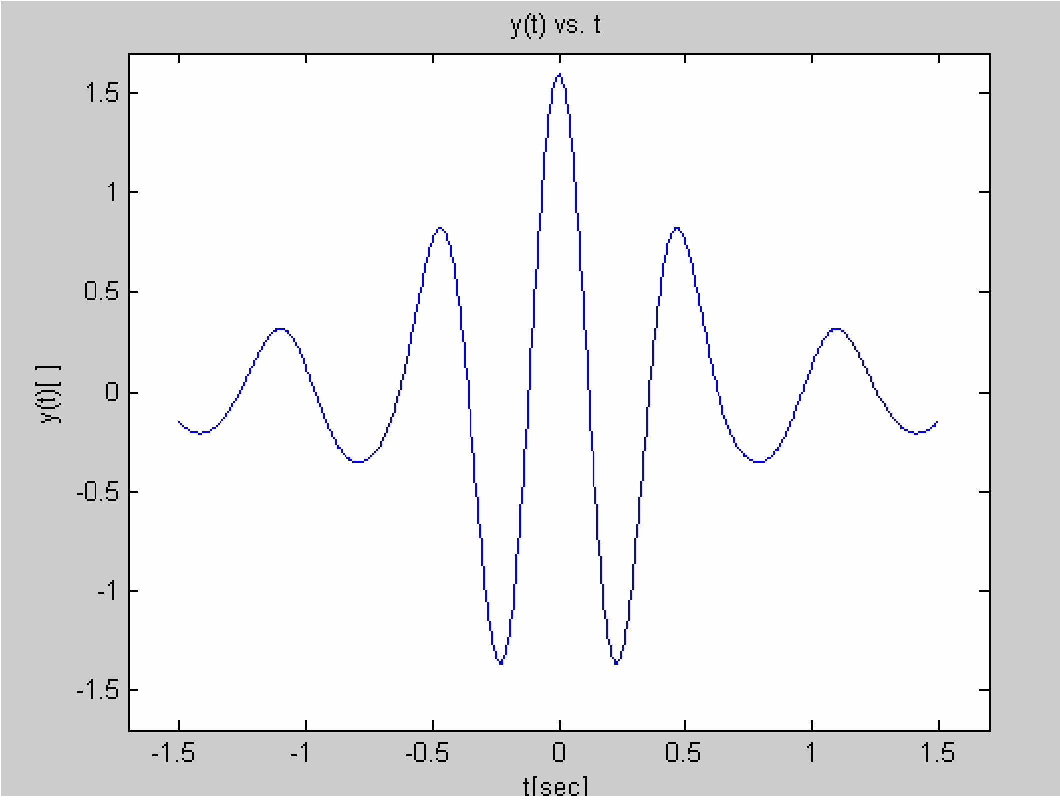
חישבנו את התמרת פורייה של $r(t)$ בעזרת הקרובים הנתונים, וקיבלנו:



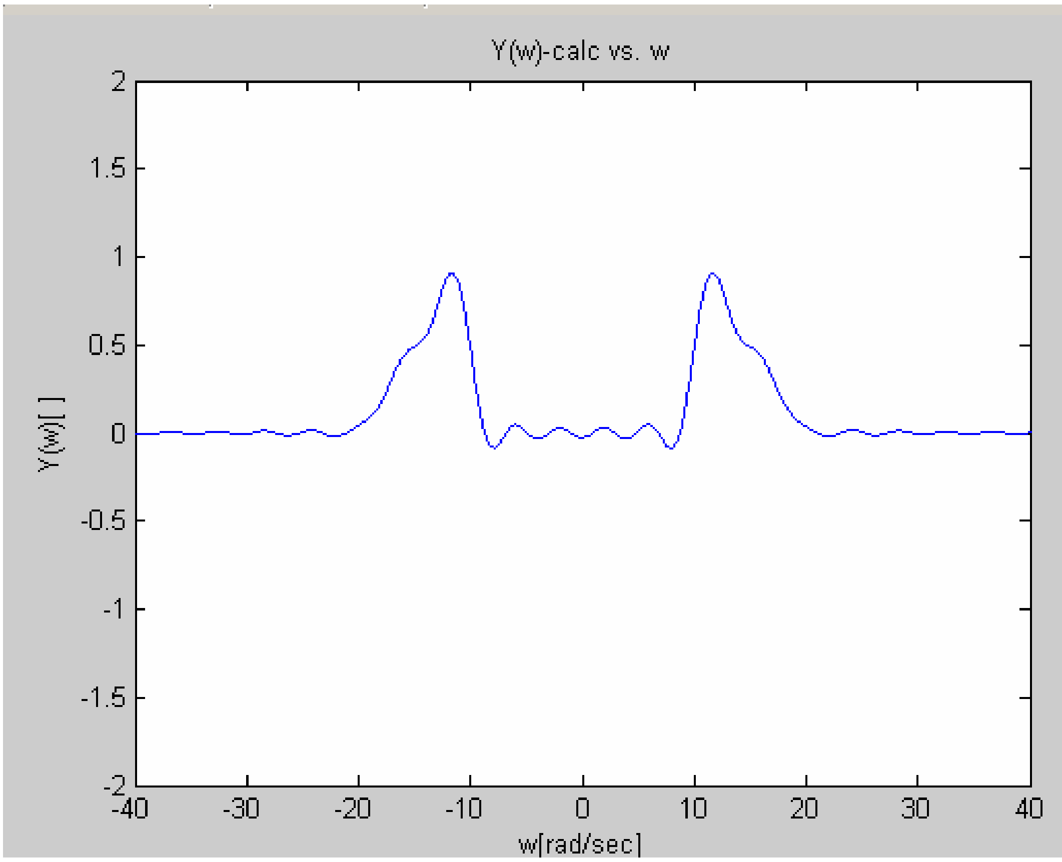
**זהו החלק הממשי של $R(\omega)$. החלק המדומה הוא כאמור אפס זהותית.

***השוואה למצופה מהתאוריה – בהמשך.

עבור האות $y(t)=q(t)+r(t)$ קיבלנו את הגרף הבא :

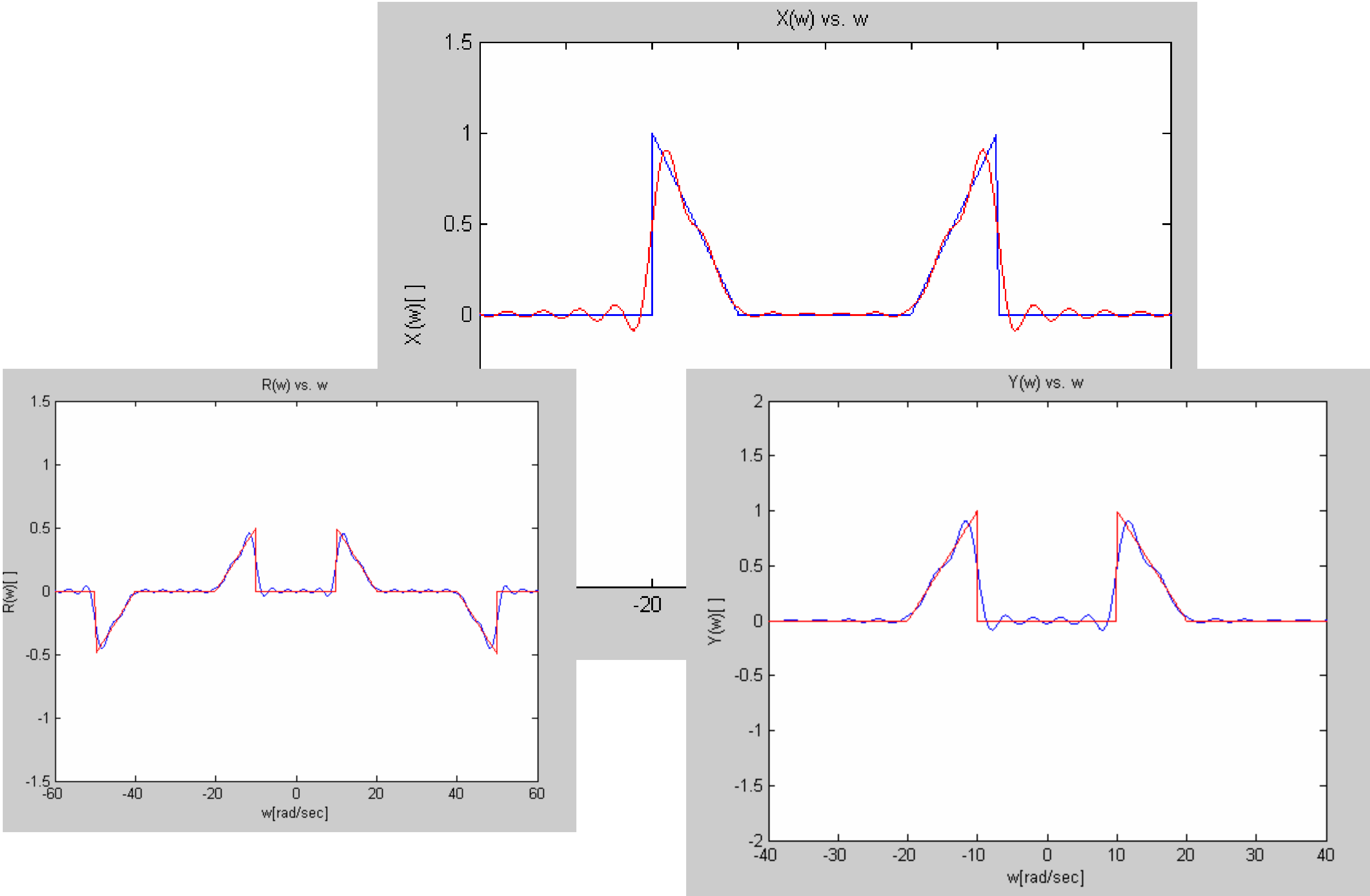


ואיך אפשר בלי $Y(\omega)=Q(\omega)+R(\omega)$:



ניתן להשתמש ללא חשש בקרובים הנתונים להתמרות ולהתמרות ההפוכות מהסיבה הפשוטה שהפונקציות איתן עבדנו כולן רציפות, מוגדרות על כל הציר (למעט מספר בן-מנייה של נקודות) וחסומות, ולכן אינטגרביליות לפי רימן. כמובן שהכפלה ב- $e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)$ אינה משנה את התכונות. הקרובים בעצם מייצגים חלוקה למלבנים צרים של השטח מתחת לגרף וסיכומים. סכום זה, לפי רימן, מייצג את האינטגרל המסויים של הפונקצייה.

כמו כן, בחרנו להשוות בין הערך התאורטי והערך המחושב של מספר אותות :



ניתן לראות בנקל את הקרוב הרב בין האות המחושב לאות הנתון.

<u>הבהרה</u> : בחלק מהקוד ממשנו התמרה או התמרה הפוכה לפונקציות זוגיות או אי-זוגיות בנפרד.

מתכונות התמרת פורייה אנו יודעים :

$$f(t)=\mathrm{Re}\{f(t)\} \Leftrightarrow F(-\omega)=F(w)^*$$
$$f(t)=\mathrm{Im}\{f(t)\} \Leftrightarrow F(-\omega)=-F(w)^*$$
$$f(t)=f(-t) \Leftrightarrow F(-\omega)=F(w)$$
$$f(t)=-f(-t) \Leftrightarrow F(-\omega)=-F(w)$$

מתכונות אלה ידענו מתי האות/התמרה אמור להית ממשי או מדומה טהור, ובהתאם ממשנו את הפונקציה. (הוכחה מתמטית עבור התמרה מדומה וא״ז ניתן למצוא בחלק א׳. שאר ההוכחות זהות).