אליחי מאיקס 036209492

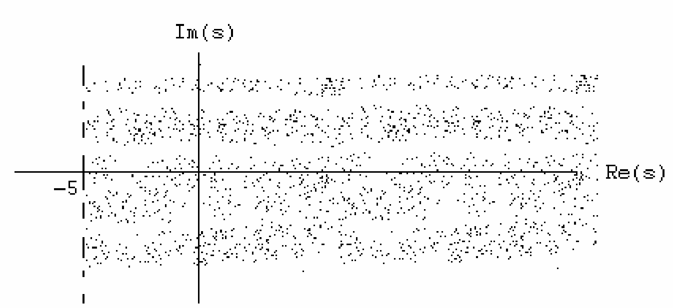
אירנה וולוקטינה

אותות ומערכות - תרגיל בית #6

תרגיל I

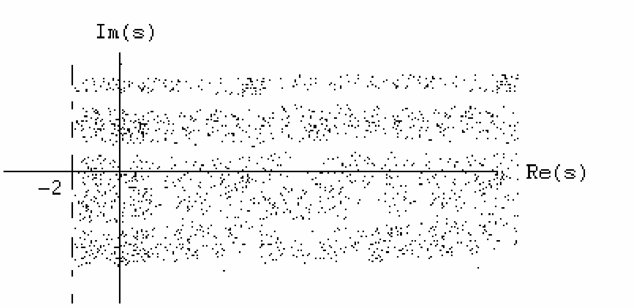
a. $x(t)=e^{-4t}u(t)+e^{-5t}\left(\sin(5t)\right)u(t)$

$$X(s)=\frac{1}{s+4}+\frac{5}{(s+5)^2+25}$$



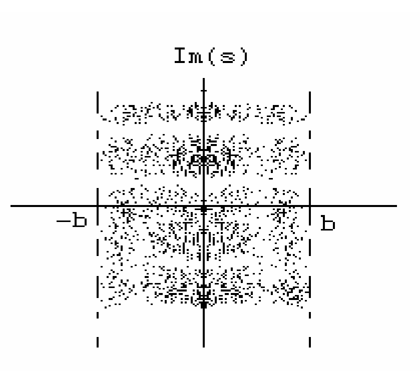
b. $x(t)=\delta(t+1)+\delta(t)+e^{-2(t+3)}u(t+1)=\delta(t+1)+\delta(t)+e^{-4}\cdot e^{-2(t+1)}u(t+1)$

$$X(s)=e^{s}+1+e^{-4}\frac{e^{s}}{s+2}=e^{s}+1+\frac{e^{s-4}}{s+2}$$



c. $x(t)=|t|e^{-b|t|}=u(t)\cdot te^{-bt}+u(-t)\cdot(-t)e^{-b(-t)}$

$$X(s)=-\left(\frac{1}{s+b}\right)'-\left(\frac{1}{s-b}\right)'=\frac{1}{(s+b)^2}+\frac{1}{(s-b)^2}=\frac{s^2-2sb+b^2+s^2+2sb+b^2}{(s+b)^2(s-b)^2}=\frac{2}{s^2+b^2}$$



תרגיל II

$$y(t) = x(t) * h(t) = e^{-\omega t}u(t) * t\cos(\omega t)u(t)$$

$$Y(s) = X(s)\cdot H(s) = \frac{1}{s+\omega}\cdot\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2} - \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2} - \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{-1}{s^2+\omega^2}\right)' - L^{-1}\frac{\omega}{2s}\left(\frac{-1}{s^2+\omega^2}\right)'$$

$$= \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)\cdot u(t) - \frac{\omega}{2\omega}\int_{-\infty}^{t} t'\sin(\omega t')u(t')dt' = \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)\cdot u(t) - \frac{1}{2}\left[\sin(t') - t'\cos(t')\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2}\left[\sin(\omega t)\left[\omega t - 1\right] + \omega t\cdot\cos(\omega t)\right]\cdot u(t)$$

תרגיל III

a. $H(s) = \dfrac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad ;|\xi|<1$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{(\xi\omega_n)^2 - \omega_n^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{A}{s-s_1} - \frac{B}{s-s_2} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{2j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}\right)$$

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{2j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}\right)\right] = \frac{1}{2j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\left(e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}\right) = e^{-\omega_n\xi t}\,\frac{\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t)}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

b. $H(s) = \dfrac{s^3+5s^2+3s+3}{s^3+4s^2+5s+2} = \dfrac{s^3+4s^2+5s+2+s^2-2s+1}{s^3+4s^2+5s+2} = 1 + \dfrac{(s-1)^2}{(s+2)(s+1)^2}$

$$= 1 + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{9}{(s+2)} + \frac{-8}{(s+1)}$$

$$h(t) = L^{-1}\left[1 + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{9}{(s+2)} + \frac{-8}{(s+1)}\right] = \delta(t) + 4te^{-t} + 9e^{-2t} - 8e^{-t}$$

תרגיל IV

נתונה המשוואה $\dot{y}(t)+2y(t)=3\dot{x}(t)+x(t)$.

א. נמצא את $h(t)$ בצורה ישירה.

$h(t)$ מורכב מחלק סינגולרי וחלק רגולרי.

ע"מ למצוא את החלק הסינגולרי נסתכל על המשוואה בסביבות 0 עבור כניסת הלם $\delta(t)$:

$$\dot{y}(t)+2y(t)=3\dot{\delta}(t)+\delta(t)$$

$$-\varepsilon<t<\varepsilon \Rightarrow \dot{y}(t)=a\dot{\delta}(t)+b\delta(t) \Rightarrow y(t)=a\delta(t)$$

נציב חזרה במשוואה הנתונה:

$$a\dot{\delta}(t)+b\delta(t)+2a\delta(t)=3\dot{\delta}(t)+\delta(t) \Rightarrow \quad a=3, b=-5$$

לכן החלק הסינגולרי של $h(t)$ הוא: $h_1(t)=3\delta(t)$

ע"מ למצוא את תנאי ההתחלה $y(0+)$, נבצע איזון הלמים על המשוואה הבאה:

$$\int_{0-}^{0+}\dot{y}(t)=3\int_{0-}^{0+}\dot{\delta}(t)-5\int_{0-}^{0+}\delta(t) \quad\Rightarrow\quad y(0+)=-5$$

מפתרון המשוואה ההומוגנית $\dot{y}(t)+2y(t)=0$, וצירוף ת"ה שמצאנו לעיל נקבל:

$$h_2(t)=-5e^{-2t}$$

לסיכום קיבלנו: $h(t)=h_1(t)+h_2(t)=3\delta(t)-5e^{-2t}u(t)$

ב. נמצא את $h(t)$ בעזרת התמרת לפלס.

$$\dot{y}(t)+2y(t)=3\dot{x}(t)+x(t)$$

$$sY(s)+2Y(s)=3sX(s)+X(s)$$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{3s+1}{s+2} \quad\Rightarrow\quad h(t)=3\delta(t)-5e^{-2t}u(t)$$

תרגיל V

ל $X(s)$ 4 קטבים לכן צורתו הכללית תהייה : $X(s)=\dfrac{C}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$.

בגלל הממשיות והסימטריות של $x(t)$, והקוטב הקומפלקסי הנתון, נסיק שארבעת הקטבים של $X(s)$ הם פשוט שני זוגות של מספרים מרוכבים וסימטרים.

בצרוף לקוטב הנתון נקבל :

$$X(s)=\frac{C}{(s-e^{j\frac{\pi}{4}})(s-e^{-j\frac{\pi}{4}})(s+e^{j\frac{\pi}{4}})(s+e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$

$$X(s)=\frac{C}{(s^2-\sqrt{2}s+1)(s^2+\sqrt{2}s+1)} \qquad ;X(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-0t}dt=C=1$$

לסיכום : $X(s)=\dfrac{1}{(s^2-\sqrt{2}s+1)(s^2+\sqrt{2}s+1)}$