תרגיל בית 1

שאלה 1:

נתונה המערכת

$$\begin{cases} \ddot{y}+4\dot{y}+40y=\dot{x}+2x \\ y(0)=k_1 \\ \dot{y}(0)=k_2 \end{cases}$$

סעיף 1: מצא את הפתרון בהינתן $x(t)=0$

פתרון:

המשוואה האופיינית למערכת, ופתרונה, הם

$$r^2+4r+40=0$$

$$r_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-40}=-2\pm 6i$$

ולכן הפתרון הכללי הוא מהצורה

$$y(t)=c_1e^{-2t}\cos 6t+c_2e^{-2t}\sin 6t$$

ואם נציב את תנאי ההתחלה:

$$y(0)=c_1=k_1$$

$$\dot{y}(t)=k_1\left(-2e^{-2t}\cos 6t-6e^{-2t}\sin 6t\right)+c_2\left(-2e^{-2t}\sin 6t+6e^{-2t}\cos 6t\right)$$

$$\dot{y}(0)=-2k_1+6c_2=k_2 \quad\Rightarrow\quad c_2=\frac{2k_1+k_2}{6}$$

ולכן הפתרון הפרטי שלנו הוא

$$y(t)=k_1e^{-2t}\cos 6t+\frac{2k_1+k_2}{6}e^{-2t}\sin 6t$$

או במילים אחרות

$$y(t)=k_1e^{-2t}\cos 6t+\frac{2k_1+k_2}{6}e^{-2t}\cos\left(6t-\tfrac{\pi}{2}\right)$$

סעיף 2: מצא את פונקצית התמסורת של המערכת

פתרון:

עפ"י הגדרתה בתרגיל כיתה 1, פונקצית התמסורת היא

$$H(\alpha)=\frac{\alpha+2}{\alpha^2+4\alpha+40}$$

סעיף 3א: מצא את הפתרון עבור $x_1(t)=\cos\left(3t+\tfrac{\pi}{3}\right)$

מכיוון ש

$$\cos\left(3t+\tfrac{\pi}{3}\right)=\frac{e^{i\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-i\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)}}{2}=\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}e^{3it}+e^{-\frac{\pi}{3}i}e^{-3it}}{2}$$

ומכיוון שהמערכת שלנו ליניארית, הפתרון הפרטי המתאים למשוואה הוא

$$y_p(t)=\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{2}H(3i)e^{3it}+\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2}H(-3i)e^{-3it}$$

כלומר

$$y_p(t)=\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{2}\frac{3i+2}{(3i)^2+4\cdot 3i+40}e^{3it}+\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2}\frac{-3i+2}{(-3i)^2-4\cdot 3i+40}e^{-3it}$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{2}\frac{2+3i}{31+12i}e^{3it}+\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2}\frac{2-3i}{31-12i}e^{-3it}\triangleq z_1e^{3it}+\overline{z_1}e^{-3it}$$

סעיף 3ב: מצא את הפתרון עבור $x_2(t)=2$

מכיוון ש

$$2=2e^{0t}$$

הפתרון הפרטי המתאים למשוואה הוא

$$y_p(t)=2H(0)e^{0t}=2\frac{0+2}{0^2+4\cdot 0+40}=\frac{1}{10}$$

סעיף 4: מצא פתרון פרטי עבור הבעיה, כאשר $x_1(t)=\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)$.

פתרון:

בהמשך לסעיף 3א, אנו רואים כי

$$y_p(t)=\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{2}\frac{2+3i}{31+12i}e^{3it}+\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2}\frac{2-3i}{31-12i}e^{-3it}$$

ולכן הפתרון הכללי יהיה

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-2t}\cos 6t+c_2e^{-2t}\sin 6t+\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{2}\frac{2+3i}{31+12i}e^{3it}+\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2}\frac{2-3i}{31-12i}e^{-3it}$$

את הקבועים c_1,c_2 נחשב ע"י הצבת תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} y(0)=k_1 \\ \dot{y}(0)=k_2 \end{cases}$$

סעיף 5: הוכח את הטענה: $F\left(-e^{i\omega}\right)=F\left(e^{i(\omega\pm\pi(2n+1))}\right)$

פתרון:

אינטואיציה:

הוספת מספר אי-זוגי של π לארגומנט של אקספוננט מדומה טהור (e^{ix}) שקול להכפלה ב (-1) מכיוון ש $e^{i\pi}=-1$.

הוכחה:

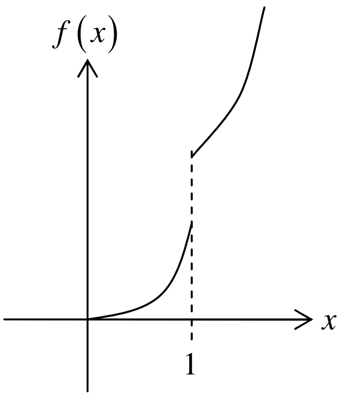
$$F\left(e^{i(\omega\pm\pi(2n+1))}\right)=F\left(e^{i\omega}e^{\pm i\pi(2n+1)}\right)=F\left(e^{i\omega}\left\{\cos\left(\pi(2n+1)\right)+i\sin\left(\pi(2n+1)\right)\right\}\right)$$
$$=F\left(e^{i\omega}\left\{\cos\left(\pi(2n+1)\right)\right\}\right)=F\left(-e^{i\omega}\right)$$

שאלה 2:

גזרו את

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & 0<x<1 \\ x^2+2, & x>1 \end{cases}$$

פתרון:



אנו רואים שמתקיים

$$f'\left(1^+\right)=2x\Big|_{x=1}=2$$
$$f'\left(1^-\right)=3x^2\Big|_{x=1}=3$$

כלומר, ע"פ החדו"א ה"קלאסיות", הפונקציה אינה גזירה ב $x=1$.
נזכר בקורס "תורת המעגלים החשמליים", שם למדנו (רק באינטואיציה) ש הנגזרת של פונקצית מדרגה היא פונקצית (הפונקציה המוכללת) דלתא של דירק, ולכן נגדיר

$$f_1(x)=\begin{cases} x^3, & 0<x<1 \\ x^2, & x\geq 1 \end{cases}$$

ולכן הפונקציה שלנו, $f(x)$, ניתנת לכתיבה כך:

$$f(x)=f_1(x)+2u(x-1)$$

כאשר $u(x-c)$ היא פונקצית המדרגה (פונקצית Heaviside)

$$u(x-c)\triangleq\begin{cases}0, & x<c\\ 1, & x\geq c\end{cases}$$

כאשר אנו משתמשים בתכונה פונקצית $\delta(t)$ המוכללת:

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-c)d\tau=u(t-c)\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}u(t-c)=\delta(t-c)$$

נקבל עבור $0<x<1$:

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left(f_1(x)+2u(x-1)\right)=\frac{d}{dx}\left(x^3+2u(x-1)\right)=3x^2+2\delta(x-1)$$

ועבור $x>1$:

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left(f_1(x)+2u(x-1)\right)=\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2x$$

כלומר, קיבלנו שבאופן מוכלל, הנגזרת של $f(x)$ היא

$$\frac{d}{dx}f(x)=\begin{cases}3x^2+2\delta(x-1), & 0<x<1\\ 2x, & x\geq 1\end{cases}$$

נאמר שבאופן אינטואיטיבי, אי הרציפות מסוג קפיצה של 2 יחידות בפונקציה מתבטאת בפונקצית הלם בנגזרת הפונקציה עם פקטור 2.

את הבדל השיפועים הטבעיים של הפונקציה, כלומר 3 מצד אחד ו 2 מצד שני, לא תיקנו עם פונקצית ההלם.

תרגיל בית 2

שאלה 1

נתון : $y(t)=H[x](t)=\int_{t+d}^{t+c}\left[ax(\alpha\tau)+b\right]d\tau$

סעיף א

$$H(nx_1+mx_2)=\int_{t+d}^{t+c}\left[a(nx_1+mx_2)(\alpha\tau)+b\right]d\tau=$$

$$=n\int_{t+d}^{t+c}\left[ax_1(\alpha\tau)\right]d\tau+m\int_{t+d}^{t+c}\left[ax_1(\alpha\tau)\right]d\tau+\int_{t+d}^{t+c}bd\tau\equiv H(nx_1)+H(mx_1)$$

$$\Updownarrow$$

$$b=0$$

סעיף ב

$$H\left(x_1(t+\Delta t)\right)=\int_{t+d}^{t+c}\left[ax\left(\alpha(\tau+\Delta t)\right)+b\right]d\tau\underset{\tilde\tau=\tau+\Delta t}{=}\int_{t+\Delta t+d}^{t+\Delta t+c}\left[ax\left(\alpha(\tilde\tau)\right)+b\right]d\tau=H\left(x_1(t)\right)(t+\Delta t)$$

עבור $\alpha=1$ ולכל a,b,c,d.

סעיף ג

אם $\alpha=1$, אזי ישנה אינטגרציה בתחום $[t+d,t+c]$, ולכן עבור $c,d\le 0$ המערכת תהיה סיבתית מפני שנקבל תלות רק בזמנים קטנים או שווים ל t.

אך אם $\alpha\ne 1$ המערכת לא תהיה סיבתית משום שערכי אות הכניסה נלקחים בזמנים שגדולים מ t.

שאלה 2

נתון

$$y(t)=H[x](t)=\int_{-\infty}^{f(t)}x(\tau)d\tau$$

נבדוק עבור איזה f המערכת קבועה בזמן. יש לדרוש :

$$H\left[x(t+\Delta t)\right](t)=\int_{-\infty}^{f(t)}x(\tau+\Delta t)d\tau\underset{\tilde\tau=\tau+\Delta t}{=}\int_{-\infty}^{f(t)+\Delta t}x(\tilde\tau)d\tilde\tau$$

$$\Downarrow$$

$$H\left[x(t+\Delta t)\right](t)=H\left[x(t)\right](t+\Delta t)\Leftrightarrow f=t+const$$

שאלה 3

עבור כל אחת מהמערכות הבאות נבדוק חוסר זיכרון, סיבתיות, ליניאריות, קביעות בזמן :

1.1. $y(t)=x(t-2)+x(2-t)$

מערכת זו היא עם זיכרון כי היציאה ברגע t תלויה בכניסות בזמנים שונים מ- t.
המערכת לא סיבתית מפני שהיא תלויה בכניסות עתידיות.
המערכת ליניארית וברור גם שהיא לא קבועה בזמן.

1.2. $y(t)=\int_{-\infty}^{2t}x(\tau)d\tau$

מערכת זו היא עם זיכרון כי היציאה ברגע t תלויה בכניסות בזמנים שונים מ- t.
היא לא סיבתית מפני שהיא תלויה בכניסות עתידיות : סוכמים עד ($2t$) כאשר מעוניינים ביציאה ב- t .
המערכת ליניארית בגלל אופרטור האינטגרל.

המערכת לא קבועה בזמן : $y(t+\theta)=\int_{-\infty}^{2t+2\theta}x(\tau+\theta)d\tau \ne y(t)=\int_{-\infty}^{2t}x(\tau+\theta)d\tau=\int_{-\infty}^{2t+\theta}x(\tilde\tau)d\tilde\tau$

1.3. $y=\left[\cos(3t)\right]x(t)$

מערכת זו היא עם זיכרון כי היציאה ברגע t תלויה בכניסות בזמנים שונים מ- t.
המערכת לא סיבתית מפני שהיא תלויה בכניסות עתידיות.
המערכת ליניארית.
המערכת לא קבועה בזמן.

1.4. $y(t)=x\left(\frac{t}{3}\right)$

מערכת זו היא בעלת זיכרון כי היציאה ברגע t תלויה בכניסות בזמנים שונים מ- t.

היא לא סיבתית מפני שהיא לא תלויה בכניסות עתידיות.
המערכת ליניארית.
המערכת קבועה בזמן.

.1.5 $y(t)=x(t^2)+x(t)$

מערכת זו היא חסרת זיכרון כי היציאה ברגע t לא תלויה בכניסות בזמנים שונים מ- t.
המערכת לא בהכרח ליניארית.
המערכת לא קבועה בזמן.
המערכת סיבתית.

.1.6 $y(t)=x(4t+1)$

מערכת זו היא בעלת זיכרון כי היציאה ברגע t תלויה בכניסות בזמנים שונים מ- t.
המערכת ליניארית.
המערכת לא בהכרח קבועה בזמן.
המערכת לא סיבתית.

.1.7 $y(t)=t\cdot x(t)$

מערכת זו היא חסרת זיכרון כי היציאה ברגע t לא תלויה בכניסות בזמנים שונים מ- t.
המערכת ליניארית.
המערכת לא קבועה בזמן.
המערכת סיבתית.

.1.8 $y(t)=\int_{-\infty}^{t-2}\tau\cdot x(2\tau)\,d\tau$

מערכת זו היא חסרת זיכרון כי היציאה ברגע t לא תלויה בכניסות בזמנים שונים מ- t.
המערכת ליניארית.
המערכת לא קבועה בזמן.
המערכת לא סיבתית.

.1.9 לגבי המערכת הראשונה נבחר $\begin{matrix} x_{1(t)}=x_{2(t)} & \forall t<t_0 \\ x_{1(t)}\neq x_{2(t)} & \forall t\geq t_0 \end{matrix}$ ונבדוק את קיום תנאי הסיבתיות בזמן $t=t_0-\frac{1}{2}$:

$$x_{1(t+1)}\Big|_{t=t_0-\frac{1}{2}}=x_{1\left(t_0+\frac{1}{2}\right)}\neq x_{2\left(t_0+\frac{1}{2}\right)}=x_{2(t+1)}\Big|_{t=t_0-\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$y_1'_{\left(t_0-\frac{1}{2}\right)}=x_{1\left(t_0+\frac{1}{2}\right)}+x_{1\left(t_0-\frac{1}{2}\right)}\neq x_{2\left(t_0+\frac{1}{2}\right)}+x_{2\left(t_0-\frac{1}{2}\right)}=y_2'_{\left(t_0-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$y_1'_{\left(t_0-\frac{1}{2}\right)}\neq y_2'_{\left(t_0-\frac{1}{2}\right)}\Rightarrow y_{1\left(t_0-\frac{1}{2}\right)}\neq y_{2\left(t_0-\frac{1}{2}\right)}$$

.1.10 לגבי המערכת השנייה, גם היא לא סיבתית כיוון ש :

$$x_1(t)=x_2(t)\ \forall t\leq t_0$$

$$\frac{dy_1}{dx}=t+1+x_1(t)=t+1+x_2(t)=\frac{dy_2}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$y_1=y_2+const$$

ולכן לא בהכרח מתקיים ש- $y_1=y_2$.

תרגיל בית 3

שאלה 1

סעיף א

תהי $\phi(t)$ פונקצית בוחן ו $f(t)$ פונקציה רציפה ב $t=0$, ולכן $f(t)\phi(t)$ פונקצית בוחן, ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(t)f(t)\right]\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\left[f(t)\phi(t)\right]dt=f(0)\phi(0)$$

ומצד שני

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(t)f(0)\right]\phi(t)dt=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt=f(0)\phi(0)$$

ולכן קיבלנו שיוון בין שתי הפונקציות המוכללות, כלומר

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

סעיף ב

צ.ל

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0)$$

הוכחה:

נוכיח עבור $n=1$, כלומר נראה את השוויון הבא:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\delta(t)\right)f(t)dt=(-1)\cdot\frac{d}{dt}f(t)\Big|_{t=0}$$

לפי אינטגרציה בחלקים:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\delta(t)\right)f(t)dt=\delta(t)f'(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)dt=$$

$$=(0-0)-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)dt$$

$$=(-1)\cdot\frac{d}{dt}f(t)\Big|_{t=0}$$

כעת נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, ונוכיח את נכונותה עבור $n=k+1$. כלומר נרצה להראות ש

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(k+1)}(t)f(t)dt=(-1)^{k+1}f^{(k+1)}(0)$$

כאשר ידוע כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(k)}(t)f(t)dt=(-1)^{k}f^{(k)}(0)$$

שוב, מאינטגרציה בחלקים נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(k+1)}(t)f(t)dt=\delta^{(k)}(t)f'(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(k)}(t)f'(t)dt$$

ועבור $g(t)\triangleq f'(t)$, ומהנחת האינדוקציה, נקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(k+1)}(t)f(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(k)}(t)g(t)dt=-(-1)^k g^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}f^{(k+1)}(0)$$

מ.ש.ל

סעיף ג

צ.ל.

$$f(t)\delta^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t)$$

הוכחה:

עבור $n=1$ יש להראות שמתקיים

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

נשתמש בהגדרת שוויון בין פונקציות מוכללות.

ראשית,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)\phi(t)dt=-\frac{d}{dt}\left(f(t)\phi(t)\right)_{t=0}=-\left(f'(0)\phi(0)+f(0)\phi'(0)\right)$$

ושנית,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)\right)\phi(t)dt=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\phi(t)dt-f'(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt$$

$$=f(0)\left(-\phi'(0)\right)-f'(0)\phi(0)=-\left(f'(0)\phi(0)+f(0)\phi'(0)\right)$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

כעת נניח שהטענה נכונה עבור n כלשהו, ונוכיח את נכונותה עבור $n+1$. כלומר נרצה להראות ש

$$f(t)\delta^{(n+1)}(t)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n+1-k)}(t)$$

כאשר ידוע כי

$$f(t)\delta^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta^{(n+1)}(t)\phi(t)dt=F(t)\delta^{(n+1)}\Big|_{-\infty}^{\infty}-(n+1)\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\delta^{(n)}(t)dt=$$

$$=-(n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}F^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t)$$

$$=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n+1-k)}(t)$$

ידוע ש

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(f(t)g(t)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)$$

בסעיף ב' ראינו כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta^{(n)}(t)\phi(t)dt=(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}f(t)\phi(t)\Big|_{t=0}$$

כעת,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t)\right)\phi^{(n)}(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(t)\delta^{(n-k)}(t)\right)\phi^{(n)}(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left(\delta(t)f(t)\right)\phi(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t)\right)\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t)\phi(t)\right)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\binom{n}{k}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t)\phi(t)dt\right)$$

שאלה 2

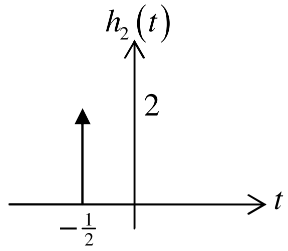
סעיף א

מכיוון שהמערכות כולן LTI, ניתן לקבל את תגובה שלהן לכניסת הלם ע"י גזירת התגובה שלהן לכניסת מדרגה.

מערכת H_1:

התגובה $h_1(t)$ לכניסה $x(t)=\delta(t)$ היא, ע"פ הנתון,

$$h_1(t)=2\delta(t+0.5)$$



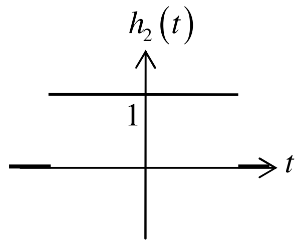
מערכת H_2:

התגובה $y_2(t)$ לכניסה $x(t)=u(t)$ היא, ע"פ הנתון,

$$y_2(t)=\begin{cases} t, & |t|\le 1 \\ 0, & else \end{cases}$$

ולכן התגובה $h_2(t)$ לכניסה $x(t)=\delta(t)$ היא

$$h_2(t)=\begin{cases} 1, & -1<t<1 \\ 0, & t>1, t<-1 \end{cases}$$



מערכת H_3

המערכת הראשונה מגיבה כנתון:

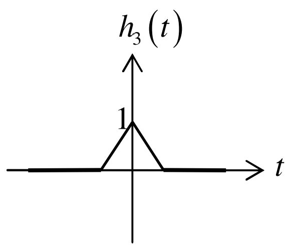
$$a(t)=\begin{cases} 1, & |t|<\tfrac{1}{2} \\ 0, & else \end{cases}.$$

אות זה מופיע בכניסה למערכת השנייה. את התגובה של המערכת השנייה $h_3(t)$, שהיא התגובה של H_3, נוכל לקבל ע"י קונבולוציה של אות הכניסה $a(t)$ עם התגובה של המערכת הראשונה להלם, $a(t)$, כלומר:

$$h_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)a(t-\tau)d\tau.$$

קונבולוציה זו קלה לחישוב באופן גרפי. מתקבל

$$h_3(t)=\begin{cases} 1-|t|, & |t|\le 1 \\ 0, & else \end{cases}$$



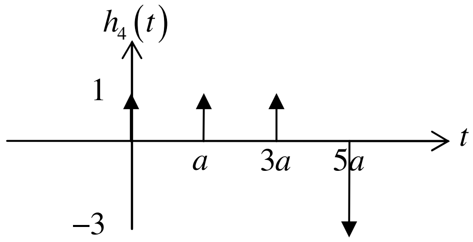
מערכת H_4 :

התגובה $y_4(t)$ לכניסה $x(t)=u(t)$ היא, ע"פ הנתון,

$$y_4(t)=u(t)+u(t-a)+u(t-3a)-3u(t-5a)$$

ולכן התגובה $h_4(t)$ לכניסת הלם היא

$$h_4(t)=\delta(t)+\delta(t-a)+\delta(t-3a)-3\delta(t-5a)$$



<u>סעיף ב</u>

מערכת H_1 :

מערכת זו תלויה בזמנים עתידיים, ולכן היא בעלת זיכרון ולא סיבתית.

מערכת H_2 :

מערכת גרעין שהיא LTI היא מערכת קונבולוציה, ולפי משפט, מערכת קונבולוציה היא סיבתית אס"ם $h(t)=0$ לכל $t<0$, כאשר $h(t)$ היא תגובת המערכת לכניסת הלם.

מערכת LTI זו היא לא סיבתית, מכיוון שלא מתקיים $h_2(t)=0$ לכל $t<0$, ולכן היא גם בעלת זיכרון.

מערכת H_3 :

באותו אופן שהסקנו עבור H_2, נסיק שגם מערכת זו היא לא סיבתית ובעלת זיכרון.

מערכת H_4 :

באותו אופן שהסקנו עבור H_2, נסיק שמערכת H_4 היא סיבתית.

נבדוק את התגובה של H_4 לאות $x(t)$:

$$\begin{aligned}
y(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(\tau)+\delta(\tau-a)+\delta(\tau-3a)-3\delta(\tau-5a)\right]x(t-\tau)\,d\tau\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-a)x(t-\tau)\,d\tau\\
&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-3a)x(t-\tau)\,d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}3\delta(\tau-5a)x(t-\tau)\,d\tau\\
&=x(t)+x(t-a)+x(t-3a)-3x(t-5a)
\end{aligned}$$

ולכן נסיק בקלות שהמערכת בעלת זיכרון – היא תלויה בזמנים שבעבר.

<u>סעיף ג</u>

כאשר מזינים את המערכת באות הלם, הוא נכנס במקביל לשלושת המערכות H_1,H_2,H_3, והתגובות של כל אחד מהם מסתכמות ע"י המחבר. האות של הסכום נכנס למערכת H_4, ולכן נסיק שהתגובה להלם של המערכת הכוללת את H_1,H_2,H_3 והמחבר היא כמובן סכום שלושת התגובות להלם של H_1,H_2,H_3, כלומר האות

$$h_{123}(t)=h_1(t)+h_2(t)+h_3(t)=2\delta(t+0.5)+\begin{cases}-1, & -1<t<0\\ 1, & 0<t<1\\ 0, & t>1, t<-1\end{cases}+\begin{cases}1-|t|, & |t|\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

והתגובה הכוללת להלם $h_{1234}(t)$, היא התגובה של H_4 לאות $h_{123}(t)$, כלומר

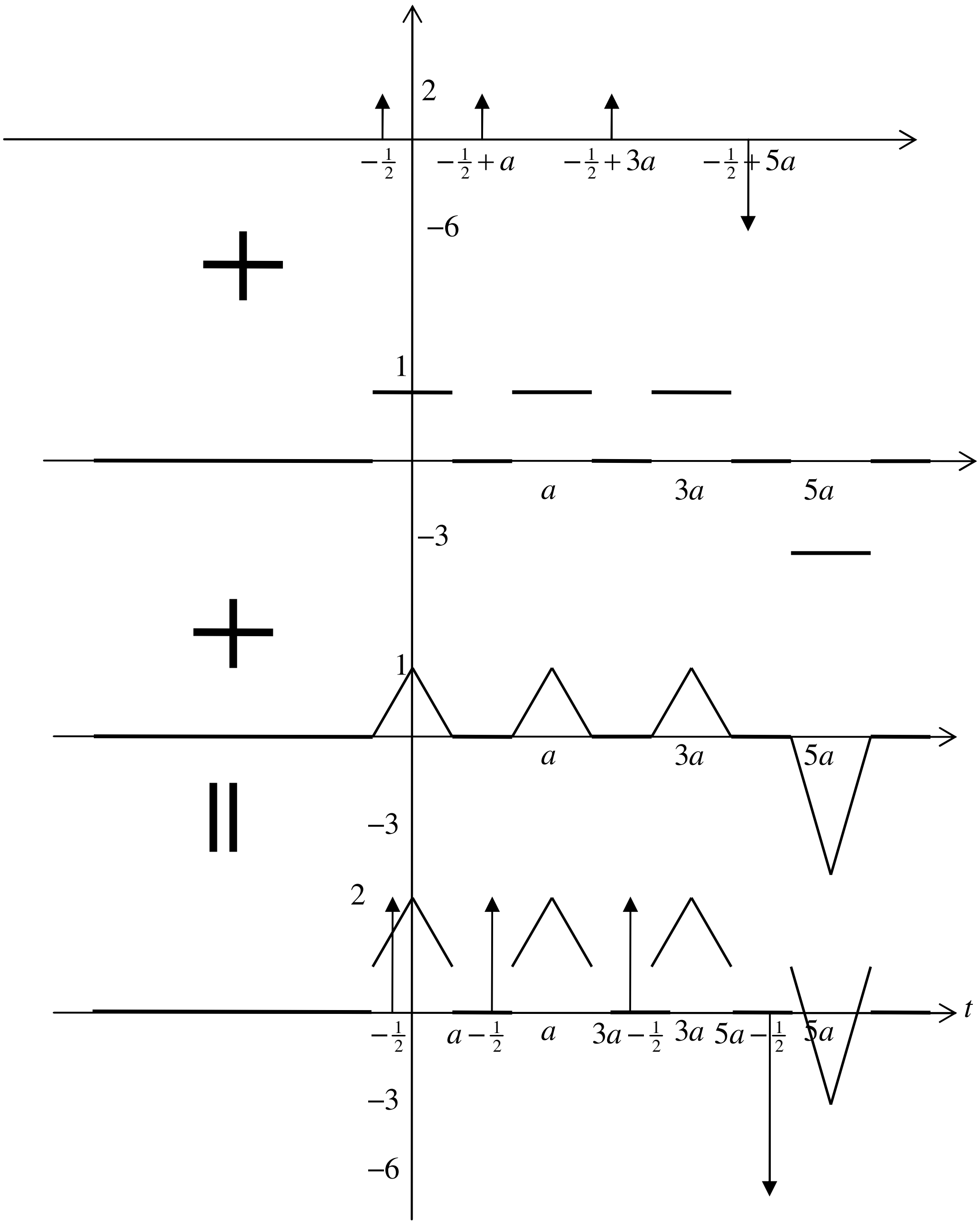
$$h_{1234}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_4(\tau)h_{123}(t-\tau)\,d\tau$$

מליניאריות H_4, התגובה לסכום $h_{123}(t)$ היא סכום התגובות ל $h_1(t),h_2(t),h_3(t)$.

מהעבודה שעשינו בסעיף ב', אנו רואים שתגובת H_4 להלם היא "שכפול" של אות הכניסה והזזתו, כלומר

$$y(t)=x(t)+x(t-a)+x(t-3a)-3x(t-5a)$$

ולכן שרטוט התגובה $h_{1234}(t)$ הוא:



שאלה 3

<u>סעיף א</u>

עבור $\alpha\neq\beta$ נקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\tau}u(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}e^{-\alpha\tau}e^{-\beta(t-\tau)}d\tau=e^{-\beta t}\int_{0}^{t}e^{\tau(\beta-\alpha)}d\tau=e^{-\beta t}\left[\frac{e^{\tau(\beta-\alpha)}}{\beta-\alpha}\right]_{0}^{t}=\frac{e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}\left(e^{(\beta-\alpha)t}-1\right)$$

ואילו עבור $\alpha=\beta$ נקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\tau}u(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}e^{-\alpha\tau}e^{-\beta(t-\tau)}d\tau=e^{-\beta t}\int_{0}^{t}1d\tau=te^{-\beta t}$$

סעיף ב

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(t-\tau)-2u(t-\tau-2)+u(t-\tau-5)\right]e^{-2\tau}u(1-\tau)d\tau=$$
$$=\int_{-\infty}^{1}\left[u(t-\tau)-2u(t-2-\tau)+u(t-5-\tau)\right]e^{-2\tau}d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{1}u(t-\tau)e^{-2\tau}dt-2\int_{-\infty}^{1}u(t-2-\tau)e^{-2\tau}dt+\int_{-\infty}^{1}u(t-5-\tau)e^{-2\tau}dt$$
$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{t}e^{-2\tau}dt, & t\le 1\\ 0, & t>1\end{cases}-2\begin{cases}\int_{-\infty}^{t-2}e^{-2\tau}dt, & t-2\le 1\\ 0, & t-2>1\end{cases}+\begin{cases}\int_{-\infty}^{t-5}e^{-2\tau}dt, & t-5\le 1\\ 0, & t-5>1\end{cases}$$
$$=-\frac{1}{2}\begin{cases}e^{-2\tau}\Big|_{-\infty}^{t}, & t\le 1\\ 0, & t>1\end{cases}+\begin{cases}e^{-2\tau}\Big|_{-\infty}^{t-2}, & t\le 3\\ 0, & t>3\end{cases}-\frac{1}{2}\begin{cases}e^{-2\tau}\Big|_{-\infty}^{t-5}, & t\le 6\\ 0, & t>6\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & t>6\\ \infty, & t\le 6\end{cases}$$

שאלה 4

תהי המערכת

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

סעיף א

נפתח את הביטוי לאות המוצא:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)x(\tau-2)d\tau\underset{s=\tau-2}{=}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t-(s+2))}u(t-(s+2))x(s)ds$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t-2-s)}u(t-2-s)x(s)ds$$

וזו קונבולוציה של אות הכניסה $x(t)$ עם הגרעין $h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$, כלומר, התגובה להלם.

המערכת סיבתית כי התגובה להלם מקיימת $h(t)=0$ עבור $t<0$.

סעיף ב

נחשב את התגובה למדרגה:

$$y_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t-2-\tau)}u(t-2-\tau)u(\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}e^{-(t-2-\tau)}u(t-2-\tau)d\tau=e^{-t+2}\int_{0}^{t-2}e^{\tau}d\tau=e^{-t+2}\left(e^{t-2}-1\right)=1-e^{-t+2}$$

ומליניאריות וקביעות בזמן נקבל שהתגובה ל $x_2(t)=u(t+2)-u(t-1)$ היא

$$y_1(t)=1-e^{-(t+2)+2}-1-e^{-(t-1)+2}=-e^{-t}-e^{-t+3}$$

שאלה 5

נתון: $x(t)$ היא T-מחזורית. הוכח כי $y(t)=(x*h)(t)$ גם כן T-מחזורית.

הוכחה:

נתון כי

$$x(t+T)=x(t)$$

ולכן

$$y(t+T)=(x*h)(t+T)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+T-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=(x*h)(t)=y(t)$$

מש"ל.

תרגיל בית 5

שאלה 1

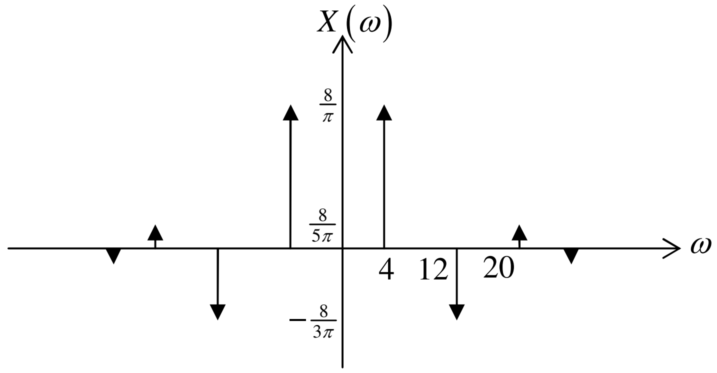
סעיף א

יהי האות

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\delta\left(t-\frac{\pi}{2}n\right)$$

שהתמרת פורייה שלו היא

$$X(\omega)=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{2}\right)\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{\frac{\pi}{2}}\right)=4\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{2}\right)\delta(\omega-4k)$$



סעיף ב

ע"פ השרטוט שבסעיף א, אנו רואים שהתמרת האות שלנו מקיימת $X(\omega)=0$ עבור $\omega<4$ ולכן מעבר דרך המסנן $H(\omega)$ תניב את ההתמרה $Y(\omega)=0$ של $y(t)$ ולכן $y(t)=0$, ולכן גם $energy(y)=0$.

סעיף ג

המכפל מייצר את האות הבא:

$$z(t)=x(t)\cdot\cos(t)=\cos(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{2}\right)\delta\left(t-\frac{\pi}{2}k\right)$$

ידוע כי

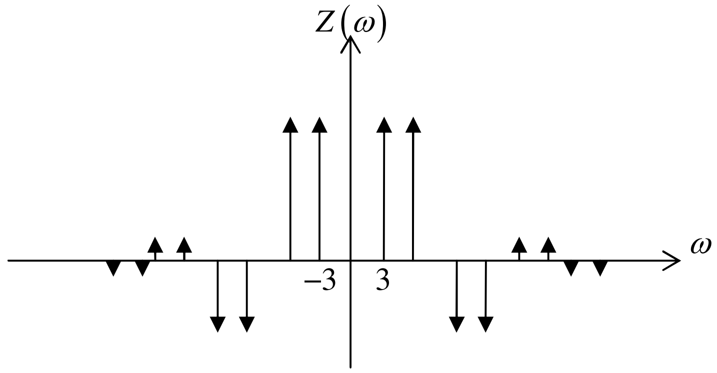
$$X(\omega)=4\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{2}\right)\delta(\omega-4k)$$

$$F\{\cos(t)\}(\omega)=\pi\big(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\big)$$

ולכן

$$\begin{aligned}Z(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega-s)\pi\big(\delta(s-1)+\delta(s+1)\big)ds\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega-s)\delta(s-1)ds+\pi\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega-s)\delta(s+1)ds\\&=\frac{1}{2}\big(X(\omega-1)+X(\omega+1)\big)\end{aligned}$$

כלומר נקבל את האות שבשרטוט הבא:



ולכן המוצא יהיה $r(t)=0$ ולכן נקבל $\int_{-\infty}^{\infty}r(t)\,dt=0$.

שאלה 2

אם מערכת מתוארת ע"י

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\cos(\omega_0 t)x(t)$$

אזי

$$Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left(X(\omega+\omega_0)+X(\omega-\omega_0)\right)$$

מצד שני

$$Y(\omega)=\frac{\omega+2\omega_0}{\omega_0}\left(u(\omega+2\omega_0)-u(\omega+\omega_0)\right)+\frac{\omega}{\omega_0}\left(u(\omega)-u(\omega-\omega_0)\right)$$

ולכן

$$X(\omega)=2\pi\frac{2\omega+2\omega_0}{\omega_0}\left(u(\omega+\omega_0)-u(\omega)\right)$$

ולכן

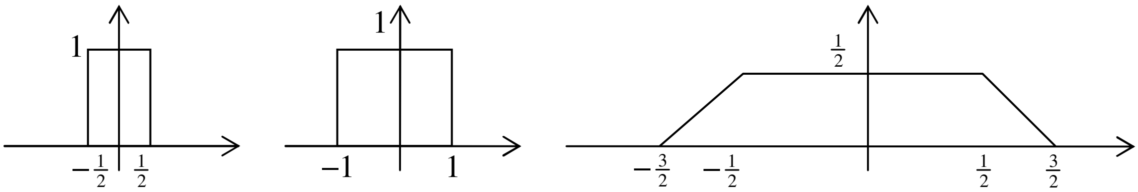
$$\begin{aligned}
x(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\frac{2\omega+2\omega_0}{\omega_0}\left(u(\omega+\omega_0)-u(\omega)\right)e^{j\omega t}d\omega\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\omega+2\omega_0}{\omega_0}\left(u(\omega+\omega_0)-u(\omega)\right)e^{j\omega t}d\omega=\frac{2}{\omega_0}\int_{-\omega_0}^{0}(\omega+\omega_0)e^{j\omega t}d\omega\\
&=\frac{2}{\omega_0}\left(\int_{-\omega_0}^{0}\omega e^{j\omega t}d\omega+\omega_0\int_{-\omega_0}^{0}e^{j\omega t}d\omega\right)=\frac{2}{\omega_0}\left(\left[\omega\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-\omega_0}^{0}-\frac{1}{jt}\int_{-\omega_0}^{0}e^{j\omega t}d\omega+\frac{\omega_0}{jt}\left[e^{j\omega t}\right]_{-\omega_0}^{0}\right)\\
&=\frac{2}{\omega_0}\left(\omega_0\frac{e^{-j\omega_0 t}}{jt}+\frac{1}{t^2}\left[e^{j\omega t}\right]_{-\omega_0}^{0}+\frac{\omega_0}{jt}\left(1-e^{j\omega_0 t}\right)\right)=\frac{2}{\omega_0}\left(\omega_0\frac{e^{-j\omega_0 t}}{jt}+\frac{1}{t^2}\left(1-e^{j\omega_0 t}\right)+\frac{\omega_0}{jt}\left(1-e^{j\omega_0 t}\right)\right)\\
&=\frac{2}{\omega_0}\left(\frac{1}{t^2}\left(1-e^{j\omega_0 t}\right)+\frac{\omega_0}{jt}\right)
\end{aligned}$$

שאלה 3

יהי האות

$$x(t)=\frac{\sin(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t^2}=\frac{1}{2\pi}\operatorname{sinc}(t)\operatorname{sinc}\left(\tfrac{t}{2}\right)$$

ולכן ההתמרה של $x(t)$ היא לא אחרת מאשר



או במילים :

$$X(\omega)=\begin{cases}0, & \omega<-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{8}\left(\omega+\frac{3}{8}\right), & -\frac{3}{2}<\omega<-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}<\omega<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}-\omega\right), & \frac{1}{2}<\omega<\frac{3}{2}\\ 0, & \omega>\frac{3}{2}\end{cases}$$

שאלה 4

תהי מערכת עם תגובה להלם

$$h(t)=u(t+3)u(3-t)$$

נכניס למערכת את האות

$$x(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

ונקבל את התגובה :

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)u(\tau+3)u(3-\tau)d\tau=$$

$$=\int_{-3}^{3}\delta(t-\tau)d\tau+\int_{-3}^{3}\delta'(t-\tau)d\tau=\left[\begin{cases}0, & t>3\\ 1, & -3<t<3\\ 0, & t<-3\end{cases}\right]+(-1)^1\frac{d}{dt}(1)\Big|_t=\begin{cases}0, & t>3\\ 1, & -3<t<3\\ 0, & t<-3\end{cases}$$

שהתמרת פורייה שלו היא

$$Y(\omega)=\frac{2\sin(3\omega)}{\omega}=6\operatorname{sinc}3\omega$$

תרגיל בית 7

שאלה 1

סעיף א

חישוב המשוואה המתארת את המעגל:

$$\begin{cases} i(t) = C\dot{V}_C(t) + \dfrac{V_R(t)}{R} \\ V_R(t) = V_C(t) - L\dfrac{V_R(t)}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{i(t)}{C} = \dot{V}_C(t) + \dfrac{V_R(t)}{RC} \\ \dot{V}_R(t) = \dfrac{i(t)}{C} - \dfrac{V_R(t)}{RC} - L\dfrac{\dot{V}_R(t)}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y'(t)\left(1+\frac{L}{R}\right)+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{C}i(t)$$

סעיף ב

פונקצית התמסורת של המעגל היא

$$H(s)=\frac{\frac{1}{C}}{s\left(1+\frac{L}{R}\right)+\frac{1}{RC}}=\frac{1}{sC\left(1+\frac{L}{R}\right)+\frac{1}{R}}$$

סעיף ג

חישוב פונקצית התמסורת ע"י התמרת לפלס על המשוואה הדיפרנציאלית:

$$y'(t)\left(1+\frac{L}{R}\right)+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{C}i(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\left[sY(s)-y(0^-)\right]\left(1+\frac{L}{R}\right)+\frac{1}{RC}Y(s)=\frac{1}{C}I(s)$$

$$s\left(1+\frac{L}{R}\right)Y(s)+\frac{1}{RC}Y(s)=\frac{1}{C}I(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{C}I(s)}{s\left(1+\frac{L}{R}\right)+\frac{1}{RC}}$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{I(s)}=\frac{1}{sC\left(1+\frac{L}{R}\right)+\frac{1}{R}}$$

סעיף ד

נתמיר את אות הכניסה $x(t)$ ונקבל

$$X(s)=\frac{e^{-s}}{s}$$

ולכן

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{\frac{e^{-s}}{s}}{sC\left(1+\frac{L}{R}\right)+\frac{1}{R}}=e^{-s}\frac{1}{s(3s+1)}=e^{-s}\left(\frac{A}{s}+\frac{B}{3s+1}\right)$$

ואז

$$s^0: \qquad A=1$$

$$s^1: \qquad 3A+B=0 \;\Rightarrow\; B=-3$$

כלומר

$$Y(s)=e^{-s}\left(\frac{1}{s}-\frac{3}{3s+1}\right)=e^{-s}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{3}}\right)$$

ולכן

$$y(t)=u(t-1)-e^{-\frac{1}{3}(t-1)}u(t-1)$$

שאלה 2

תהי המערכת

$$y''-2y'-8y=x$$

פונקצית התמסורת היא כמובן

$$H(s)=\frac{1}{s^2-2s-8}=\frac{1}{s^2-2s-8}=\frac{1}{(s-4)(s+2)}=\frac{\frac{1}{6}}{s-4}-\frac{\frac{1}{6}}{s+2}$$

ולה קטבים רגילים ב $s=-2,4$. מכיוון ש $j\omega$ בתחום ההתכנסות, אזי תחום ההתכנסות הוא

$$-2<\text{Re}\{s\}<4$$

ולכן התגובה של המערכת להלם היא לא אחרת מאשר

$$h(t)=-\tfrac{1}{6}e^{4t}u(-t)-\tfrac{1}{6}e^{-2t}u(t)$$

שאלה 3

<u>סעיף א</u>

ידועה התמרת תגובת מערכת LTI וסיבתית לכניסה $u(t)$

$$V(s)=\frac{3s+2\beta+6}{s^2+(6+\beta)s+6\beta}$$

נחשב את התגובה בציר הזמן

$$V(s)=\frac{3s+2\beta+6}{s^2+(6+\beta)s+6\beta}=\frac{2(s+\beta)+s+6}{(s+6)(s+\beta)}=\frac{2(s+\beta)+s+6}{(s+6)(s+\beta)}=\frac{2}{s+6}+\frac{1}{s+\beta}$$

ולכן

$$v(t)=2e^{-6t}+e^{-\beta t}$$

ואז, מכיוון ש $u'(t)=\delta(t)$, נקבל שהתגובה להלם היא

$$h(t)=-12e^{-6t}-\beta e^{-\beta t}$$

<u>סעיף ב</u>

נביט בכניסה $x(t)=tu(t)$ למערכת. בגלל שהמערכת סיבתית,

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}1d\tau=t=tu(t)$$

ולכן התגובה לאות $x(t)$, $y(t)$, יהיה אינטגרציה של התגובה לאות $u(t)$. הווה אומר

$$y(t)=\int_0^t v(z)dz=\int_0^t 2e^{-6z}+e^{-\beta z}dz=-\frac{1}{3}e^{-6t}-\frac{1}{\beta}e^{-\beta t}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\beta}\right)$$

נדרוש קיום תנאי השאלה ונקבל

$$\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{3}e^{-6t}-\frac{1}{\beta}e^{-\beta t}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{\beta}\overset{!!}{=}1\;\Rightarrow\;\beta=\frac{3}{2}$$

<u>סעיף ג</u>

במישור לפלס,

$$\begin{aligned}Y(s)&=\Big(\big(X(s)-Y(s)\big)H_1(s)-Y(s)\Big)H_2(s)=\big(X(s)-Y(s)\big)H_1(s)H_2(s)-Y(s)H_2(s)\\&=X(s)H_1(s)H_2(s)-Y(s)H_1(s)H_2(s)-Y(s)H_2(s)\end{aligned}$$

ולכן

$$Y(s)\left(1+H_1(s)H_2(s)+H_2(s)\right)=X(s)H_1(s)H_2(s)$$

$$\Rightarrow\ H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H_1(s)H_2(s)}{1+H_1(s)H_2(s)+H_2(s)}$$

שאלה 4

התמרה רציונאלית שלה אפס מסדר ראשון ב $s=-2$ וקטבים מסדר ראשון ב $s=-3,-1$ היא

$$H(s)=A\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}=A\left(\frac{\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+3}\right)$$

נדרוש ש

$$H\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{4}{3}$$

ונקבל

$$A\frac{-\frac{3}{2}+2}{\left(-\frac{3}{2}+1\right)\left(-\frac{3}{2}+3\right)}=A\frac{\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}A=-\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ A=2$$

ולכן

$$h(t)=A\left(-\tfrac{1}{2}e^{t}u(-t)+\tfrac{1}{2}e^{-3t}u(t)\right)=-e^{t}u(-t)+e^{-3t}u(t)$$

תרגיל בית 9

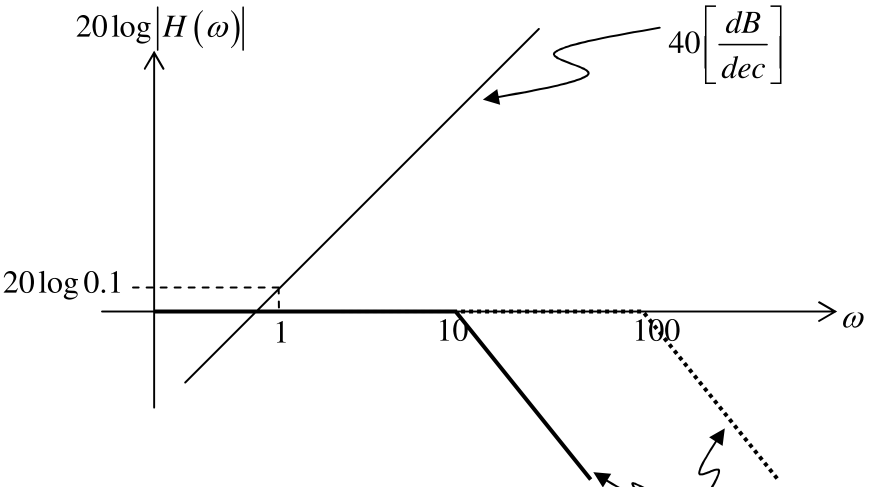
שאלה 1

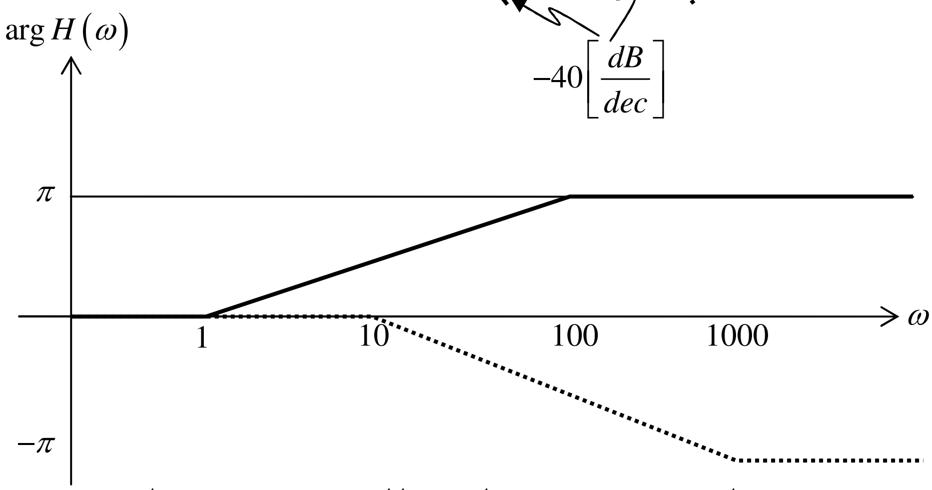
תגובת התדר היא

$$H(\omega) = -\frac{10^5 (j\omega)^2}{(j\omega-10)^2 (j\omega+100)^2} = -\frac{10^5 (j\omega)^2}{10^2\left(1-j\frac{\omega}{10}\right)^2 10^4\left(1+j\frac{\omega}{100}\right)^2} = -\frac{1}{10}\frac{(j\omega)^2}{\left(1-j\frac{\omega}{10}\right)^2\left(1+j\frac{\omega}{100}\right)^2}$$

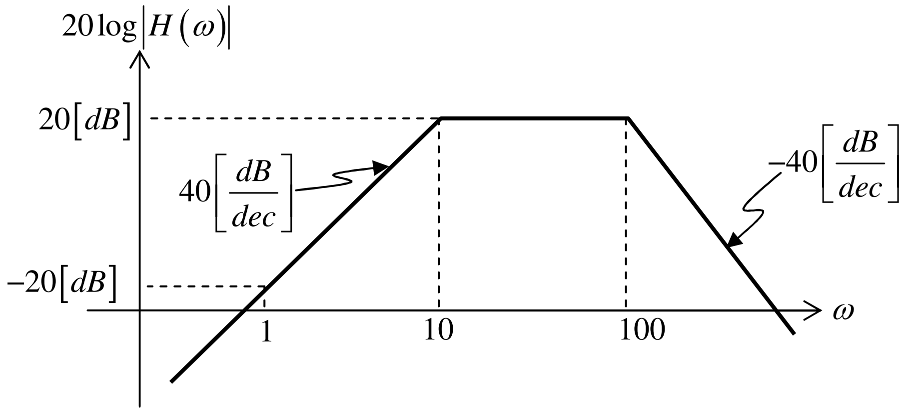
סעיף א

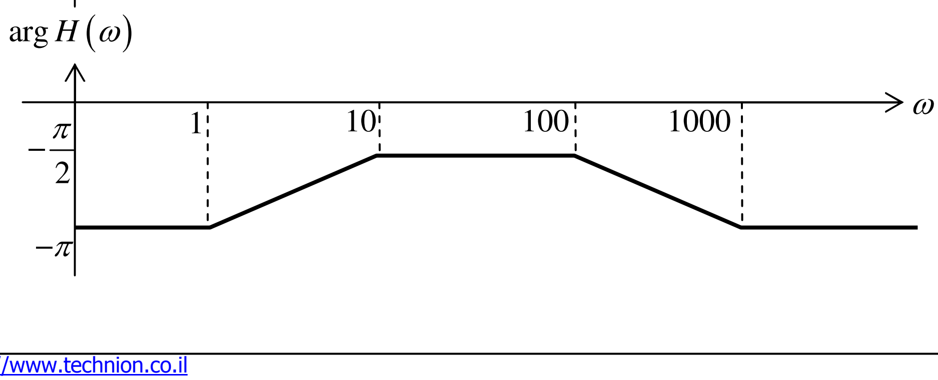
להלן עקומי בודה של תגובת התדר, לכל אלמנט בנפרד:





וכאשר מחברים את התרומות, לאחר הוספת פאזה של π בגלל סימן המינוס, מקבלים:





<u>סעיף ב</u>

מכיוון ש $\omega_1 = 10 << 100 = \omega_2$, נוכל לסכום את התרומות של כל קוטב בנפרד, ולכן המרחק בין הקירוב האסימפטוטי להגבר המדויק בנקודה $\omega_1 = 10$ וגם בנקודה $\omega_2 = 100$ הוא $6[dB]$ כי בנקודות אלו יש קטבים מסדר שני. נוכל לבדוק ע"י חישוב עבור $\omega = 10$:

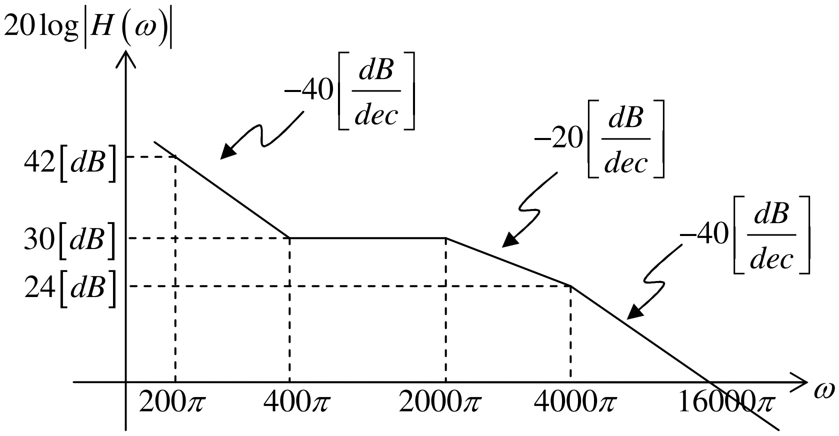
$$20\log|H(\omega)| = 20\log\left|-\frac{1}{10}\frac{(10j)^2}{(1-j)^2\left(1+j\frac{1}{10}\right)^2}\right| = 20\log\left|\frac{1}{10}\frac{100}{(1-2j-1)\left(1+j\frac{1}{5}-\frac{1}{100}\right)}\right|$$

$$= 20\log\frac{10}{|-2j|\left|\frac{99}{100}+j\frac{1}{5}\right|} = 20\log\frac{10}{2\sqrt{\left(\frac{99}{100}\right)^2+\frac{1}{25}}} \approx 13.9[dB]$$

אכן המרחק בין הקירוב האסימפטוטי להגבר האמיתי הוא כ $6[dB]$.

שאלה 2

נחשב את השיפועים של הקווים הישרים בדיאגרמה:



מהשיפועים ומהנתונים נוכל להסיק שמדובר ב:

- קוטב כפול ב $\omega_0 = 0$
- אפס מרוכב ב $\omega_1 = 400\pi$: נתון כי בתדר זה, המרחק בין הקירוב האסימפטוטי להגבר האמיתי הוא רק $2[dB]$, ולא $6[dB]$, כפי שהיינו מצפים מאפס כפול.
- קוטב פשוט ב $\omega_2 = 2000\pi$
- קוטב פשוט ב $\omega_3 = 4000\pi$
- כל הקטבים והאפסים נמצאים בחלק השמאלי של המישור המרוכב.

ולכן נקבל:

$$H(\omega) = \frac{K\left(1+j2\xi\frac{\omega}{400\pi}-\left(\frac{\omega}{400\pi}\right)^2\right)}{(j\omega)^2\left(1+j\frac{\omega}{2000\pi}\right)\left(1+j\frac{\omega}{4000\pi}\right)}$$

נחשב את K, ע"י הצבת תדר שמספיק רחוק מהקטבים והאפסים, באזור הקבוע של ההגבר. כלומר תדר ω_0 כזה שיהיה קרוב מאוד להתנהגות האסימפטוטית של ההגבר:

$$H(\omega_0) = \frac{K\left(1+j2\xi\frac{\omega_0}{400\pi}-\left(\frac{\omega_0}{400\pi}\right)^2\right)}{(j\omega_0)^2\left(1+j\frac{\omega_0}{2000\pi}\right)\left(1+j\frac{\omega_0}{4000\pi}\right)} \approx K\frac{-\left(\frac{\omega_0}{400\pi}\right)^2}{-\omega_0^2} = K\frac{1}{400^2\pi^2}$$

ומהעקום האסימפטוטי, מתקיים

$$20\log\left|H\left(\omega_0\right)\right| = 20\log\frac{K}{400^2\pi^2} = 30 \;\Rightarrow\; \frac{K}{400^2\pi^2} = 10^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; K = 400^2\pi^2\sqrt{1000}$$

ואם נבדוק את התנהגות פונקצית התמסורת עבור $\omega \to 0$, נקבל

$$\lim_{\omega\to 0} H\left(\omega\right) = \lim_{\omega\to 0}\frac{K\left(1+j2\xi\frac{\omega}{400\pi}-\left(\frac{\omega}{400\pi}\right)^2\right)}{\left(j\omega\right)^2\left(1+j\frac{\omega}{2000\pi}\right)\left(1+j\frac{\omega}{4000\pi}\right)} \approx \frac{K}{\left(j\omega\right)^2} = -\frac{K}{\omega^2} \geq 0$$

ולכן יש לשים סימן מינוס לפונקצית התמסורת.

נחשב את הקבוע ξ לפי ההפרש בין ההגבר האסימפטוטי להגבר האמיתי בתדר $\omega_1 = 400\pi$:

$$30 - 20\log\left|H\left(400\pi\right)\right| = 30 - 20\log\left|-\frac{400^2\pi^2\sqrt{1000}\left(1+j2\xi\frac{400\pi}{400\pi}-\left(\frac{400\pi}{400\pi}\right)^2\right)}{\left(j400\pi\right)^2\left(1+j\frac{400\pi}{2000\pi}\right)\left(1+j\frac{400\pi}{4000\pi}\right)}\right| = 2$$

$$\Rightarrow\; \log\left|\frac{400^2\pi^2\sqrt{1000}\cdot j2\xi}{\left(-400^2\pi^2\right)\left(1+j\frac{1}{5}\right)\left(1+j\frac{1}{10}\right)}\right| = \frac{7}{5} \;\Rightarrow\; \log\frac{2\sqrt{1000}\xi}{\sqrt{1+\frac{1}{25}}\sqrt{1+\frac{1}{100}}} = \log\frac{2\sqrt{1000}\xi}{\frac{\sqrt{26}}{5}\,\frac{\sqrt{101}}{10}} = \frac{8}{5} \;\Rightarrow\; \xi \approx 0.41$$

ולכן, לסיכום:

$$H\left(\omega\right) = -400^2\pi^2\sqrt{1000}\,\frac{1+j0.82\frac{\omega}{400\pi}-\left(\frac{\omega}{400\pi}\right)^2}{\left(j\omega\right)^2\left(1+j\frac{\omega}{2000\pi}\right)\left(1+j\frac{\omega}{4000\pi}\right)}$$

שאלה 3

משרטוט האמפליטודה, נסיק שיש אפסים ב

$$\omega_0 = 0, \omega_3$$

וקטבים ב

$$\omega_1, \omega_2$$

ומגודל השיפועים, פונקצית התמסורת היא:

$$H\left(\omega\right) = \frac{\pm K\left(j\omega\right)\left(1\pm j\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2}{\left(1\pm j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1\pm j\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

מכיוון שהזווית הנתרמת בקוטב ω_1 היא $-\frac{\pi}{2}$, הקוטב שם הוא בחצי המישור השמאלי.

מכיוון שהקוטב ב ω_2 לא תורם לפאזה, נסיק שישנם שם קני קטבים עם סימנים מנוגדים.

מכיוון שהזווית הנתרמת באפס ω_3 היא $+\pi$, הקוטב שם הוא בחצי המישור השמאלי.

אם נצמיד את $\pm K$ לקוטב ב ω_1, נקבל ש $K = \pm 10 \;\Rightarrow\; 20\log K = 20$.

מכיוון שהזווית הנתרמת לגרף כאשר $\omega \to 0$ היא $-\frac{\pi}{2}$, אזי $K = -10$

ולכן קיבלנו

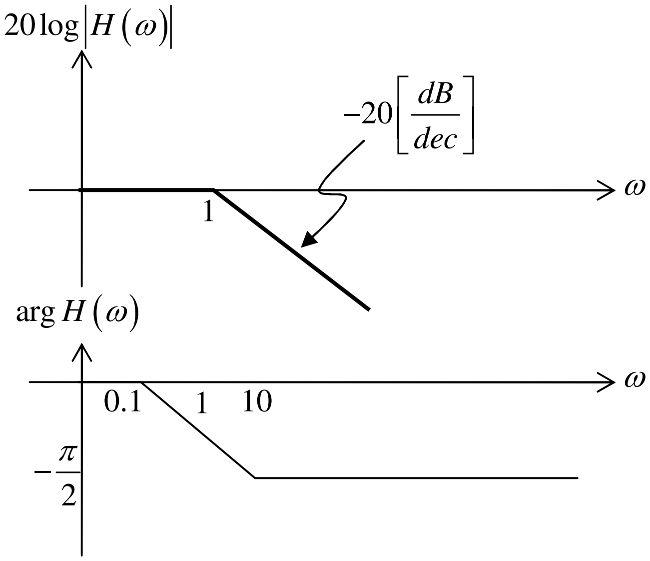
$$H\left(\omega\right) = -10\frac{j\omega\left(1+j\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1-j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

שאלה 4

סעיף א

$$H(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$$

לתגובה זו יש קוטב פשוט יחיד ב $\omega=-1$.



סעיף ב

במערכות LTI, התמרת היציאה היא

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega).$$

עבור $x_1(t)=\cos(0t)=1$, התמרת פורייה היא $X_1(\omega)=2\pi\delta(\omega)$, ולכן

$$Y_1(\omega)=H(\omega)X_1(\omega)=2\pi\frac{\delta(\omega)}{1+j\omega}=2\pi\delta(\omega)$$

ואז

$$y_1(t)=1$$

עבור תדרים ששואפים ל 0, ע"פ דיאגראמת בודה, אנו מקבלים שאין שינוי באמפליטודה של האות וגם אין שינוי בפאזה, מה שמסביר את אות המוצא $y_1(t)=1$.

עבור $x_2(t)=\cos(3t)$, התמרת פורייה היא $X_2(\omega)=\pi\left(\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)\right)$, ולכן

$$Y_2(\omega)=H(\omega)X_2(\omega)=\pi\frac{\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)}{1+j\omega}=\pi\frac{\delta(\omega-3)}{1+j\omega}+\pi\frac{\delta(\omega+3)}{1+j\omega}$$

$$=\frac{\pi}{1+3j}\delta(\omega-3)+\frac{\pi}{1-3j}\delta(\omega+3)$$

ואז

$$y_2(t)=\frac{1}{1+3j}\frac{1}{2}e^{3jt}+\frac{1}{1-3j}\frac{1}{2}e^{-3jt}=\frac{1}{2}\frac{(1-3j)e^{3jt}+(1+3j)e^{-3jt}}{(1+3j)(1-3j)}=\frac{1}{20}\left[e^{3jt}-3je^{3jt}+e^{-3jt}+3je^{-3jt}\right]$$

$$=\frac{1}{10}(\cos 3t+3\sin 3t)=\frac{1}{10}\cos 3t+\frac{3}{10}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-3t\right)$$

עבור תדרים קצת גדולים מ 1, ע"פ דיאגראמת בודה, אנו מקבלים הנחתה באמפליטודה של האות ויש תוספת של קצת יותר מ $\frac{\pi}{4}$ לפאזה, מה שמסביר את אות המוצא $y_2(t)$.

סעיף ג

עבור $x_1(t)=e^{-t}u(t)$, התמרת פורייה היא $X_1(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$, ולכן

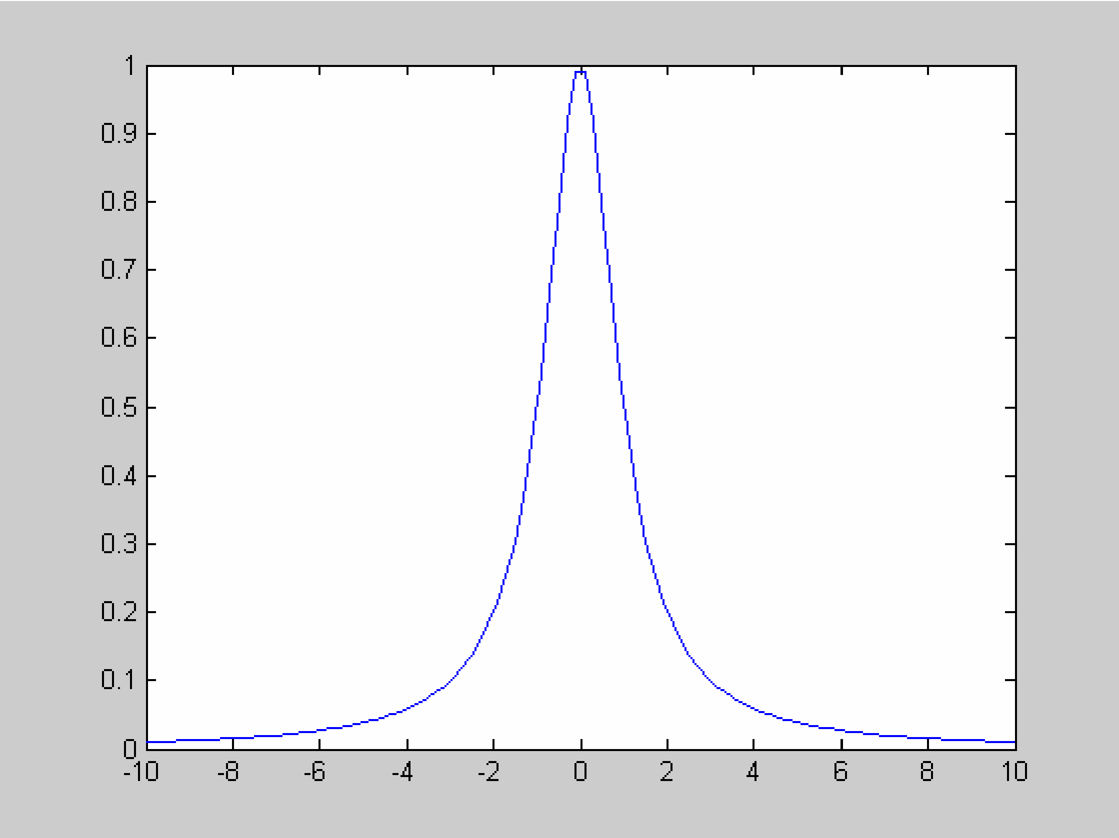
$$Y_1(\omega)=H(\omega)X_1(\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)^2}=\frac{1}{1+2j\omega-\omega^2}$$

ואז

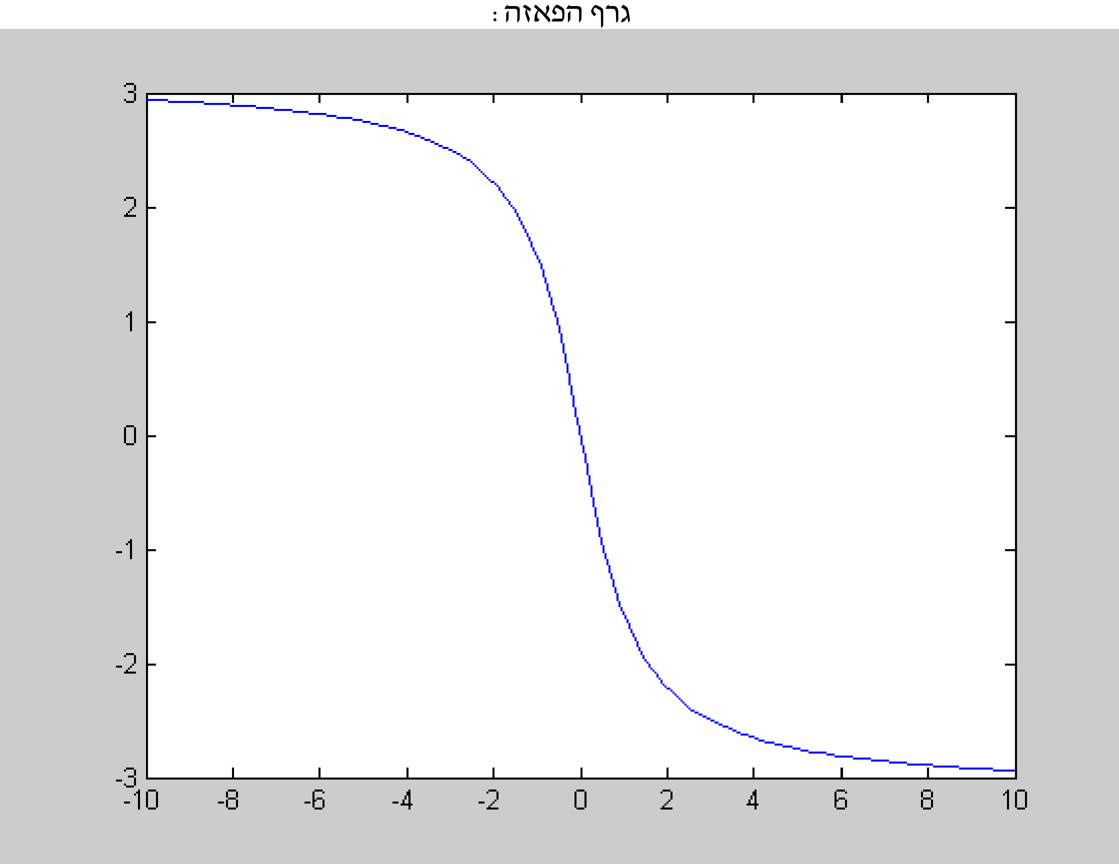
$$\left|Y_1(\omega)\right| = \left|\frac{1}{1+2j\omega-\omega^2}\right| = \frac{1}{\left(1-\omega^2\right)^2+4\omega^2} = \frac{1}{1-2\omega^2+\omega^4+4\omega^2} = \frac{1}{1+2\omega^2+\omega^4} = \frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}$$

$$\arg Y_1(\omega) = \arg(1) - \arg\left(1+2j\omega-\omega^2\right) = -\arctan\frac{2\omega}{1-\omega^2}$$

גרף האמפליטודה :



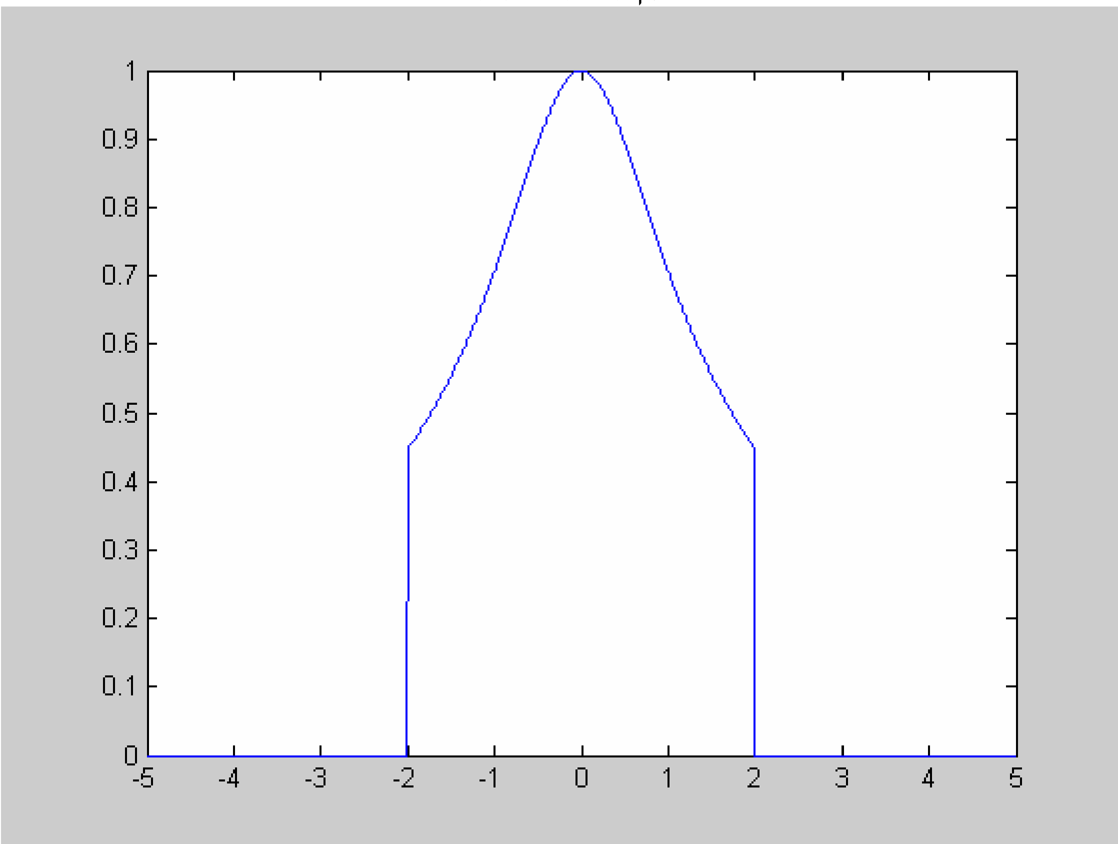
גרף הפאזה :



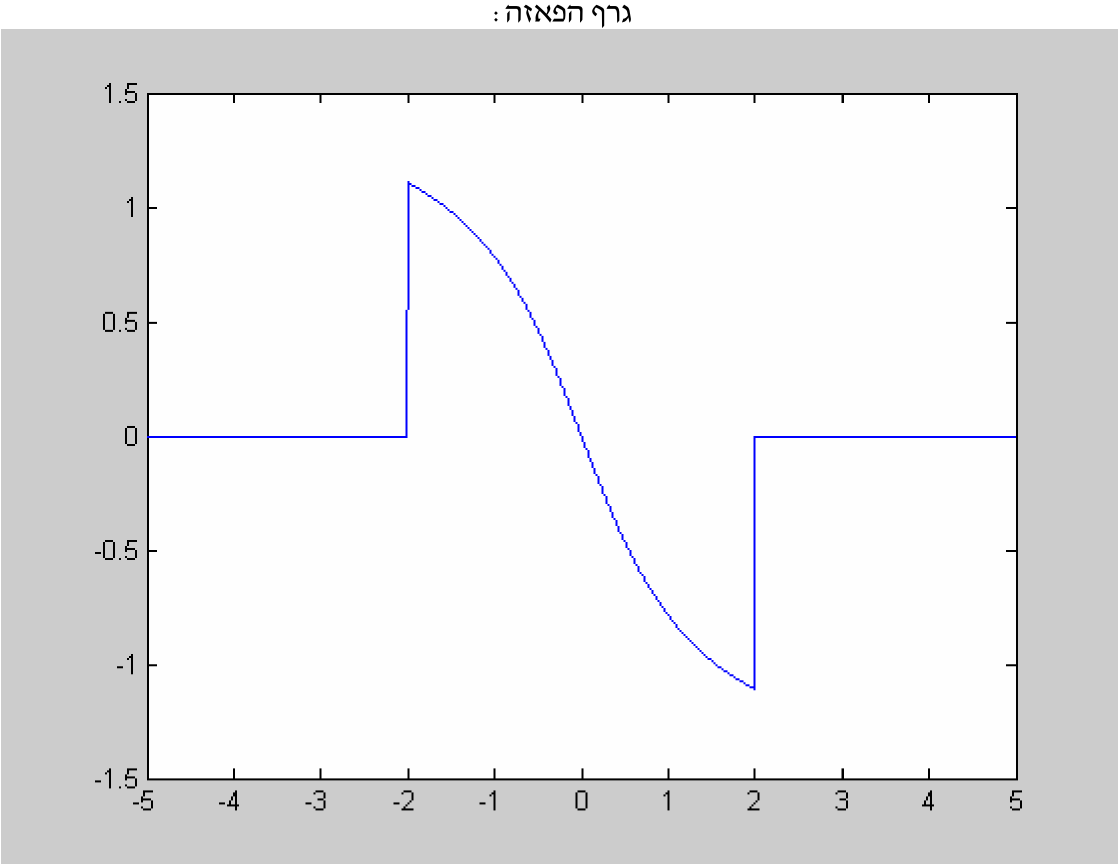
עבור $x_2(t)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sinc}2t$, התמרת פורייה היא $X_2(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<2\\ 0, & |\omega|>2\end{cases}$, ולכן

$$Y_2(\omega)=H(\omega)X_2(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{1+j\omega}, & |\omega|<2\\ 0, & |\omega|>2\end{cases}$$

גרף האמפליטודה :

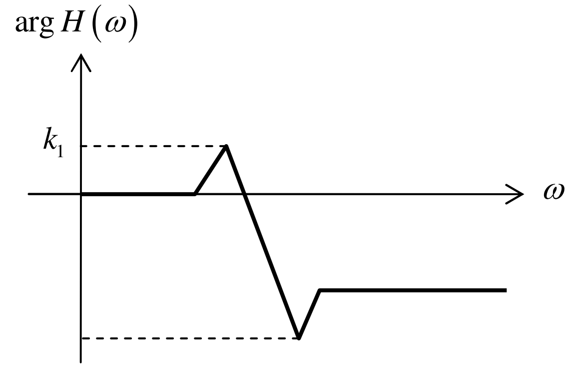


גרף הפאזה :



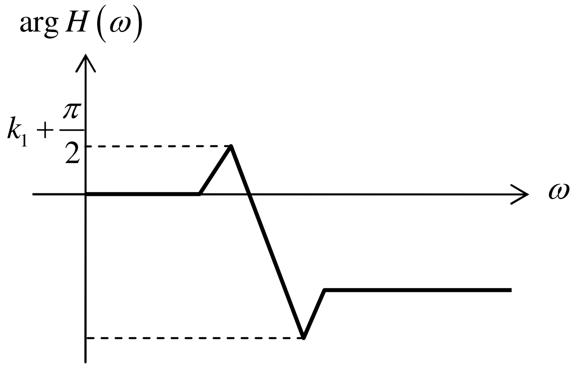
שאלה 5

עבור מערכת שלה עקום הפאזה הבא:



מוסיפים מערכת גוזרת בזמן לפניה.

גזירה בזמן שקולה להכפלת התמרת האות ב $j\omega$. הכפלה זו תגרום לפונקצית התמסורת לקבל אפס נוסף ב $\omega = 0$, מה שיוסיף פאזה של $\frac{\pi}{2}$ לדיאגראמת הפאזה של הפונקציה, כלומר נקבל:



תרגיל בית 14

שאלה 1

עבור מערכת המצב

$$\dot{q} = Aq + Bx$$
$$y = Cq + Dx$$

ובהינתן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = 1$$

נחשב את e^{At} :

מכיוון ש A אינה אלכסונית אזי לא ניתן להפעיל את $e^{a_{ij}t}$ על כל איבר של A, נחשב את e^{At} כך :

$$e^{At} = L^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -4 & s-3 \end{pmatrix}^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-3)-8}\begin{pmatrix} s-3 & 2 \\ 4 & s-1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{s-3}{(s+5)(s-1)} & \frac{2}{(s+5)(s-1)} \\ \frac{4}{(s+5)(s-1)} & \frac{s-1}{(s+5)(s-1)} \end{pmatrix}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{\frac{4}{3}}{s+5} - \frac{\frac{1}{3}}{s-1} & \frac{\frac{1}{3}}{s-1} - \frac{\frac{1}{3}}{s+5} \\ \frac{\frac{2}{3}}{s-1} - \frac{\frac{2}{3}}{s+5} & \frac{1}{s+5} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}e^{-5t} - \frac{1}{3}e^{t} & \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-5t} \\ \frac{2}{3}e^{t} - \frac{2}{3}e^{-5t} & e^{-5t} \end{pmatrix} u(t)$$

לכן, הע״ע של המערכת (של מטריצה A) הם $\lambda_{1,2} = 1, -5$.

מכיוון שיש ע״ע חיובי ממש, המערכת לא יציבה אסימפטוטית.

נחשב את פונקצית התמסורת של המערכת :

$$H_{+}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -4 & s-3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{(s+5)(s-1)}\begin{pmatrix} s-3 & 2 \\ 4 & s-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1$$

$$= \frac{1}{(s+5)(s-1)}\begin{pmatrix} s+1 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 = 1$$

זוהי מערכת הזהות (אות המוצא הוא אות הכניסה, כי לדוגמה במישור התדר, $Y(s) = X(s)H(s) = X(s)$)

מכיוון שכך, המערכת יציבה $BIBO$.

נביט כעת במערכת דומה, בתוספת ווקטור $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. כלומר על המערכת :

$$\dot{q} = Aq + Bx + ky$$
$$y = Cq + Dx$$

ובהינתן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = 1, \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נרצה לחשב את פונקצית התמסורת של המערכת הזו. לשם כך נכתוב :

$$\dot{q} = Aq + Bx + k(Cq + Dx) = Aq + Bx + kCq + kDx = (A + kC)q + (B + kD)x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = A_{new}q + B_{new}x \\ y = Cq + Dx \end{cases}$$

$$A_{new} = A + kC, \qquad B_{new} = B + kD$$

ולכן

$$H_+(s)=C\left(sI-A_{new}\right)^{-1}B_{new}+D=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\left(sI-\left(A+kC\right)\right)^{-1}\left(B+kD\right)+1$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\left(sI-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k_1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_1\\ 0\end{pmatrix}\cdot 1\right)+1$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\left(sI-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k_1 & k_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}k_1+1\\ -1\end{pmatrix}+1$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s-1+k_1 & -2+k_1\\ -4 & s-3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}k_1+1\\ -1\end{pmatrix}+1$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\left(s-1+k_1\right)\left(s-3\right)+4\left(k_1-2\right)}\begin{pmatrix}s-3 & 2-k_1\\ 4 & s-1+k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1+1\\ -1\end{pmatrix}+1$$

$$=\frac{1}{s^2-\left(4-k_1\right)s+\left(k_1-3\right)}\begin{pmatrix}s+1 & s+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1+1\\ -1\end{pmatrix}+1$$

$$=\frac{\left(s+1\right)k_1}{s^2-\left(4-k_1\right)s+\left(k_1-3\right)}+1=\frac{sk_1+k_1+s^2-\left(4-k_1\right)s+\left(k_1-3\right)}{s^2-\left(4-k_1\right)s+\left(k_1-3\right)}$$

$$=\frac{s^2+2s\left(k_1-2\right)+2k_1-3}{s^2-\left(4-k_1\right)s+\left(k_1-3\right)}$$

כדי שמערכת זו תהיה יציבה אסימפטוטית, נרצה שהשורשים של הפ"א $s^2-\left(4-k_1\right)s+\left(k_1-3\right)$ יהיו בחצי השמאלי של המישור. זהו פולינום מסדר 2, ולכן נדרוש חיוביות המקדמים:

$$\begin{cases}k_1-4>0\\ k_1-3>0\end{cases}\Rightarrow\quad k_1>4$$

עבור כל אותם ערכי k_1, המערכת תהיה גם יציבה $BIBO$. בנוסף, ייתכן שערכי k_1 מסוימים יגרמו לאפסים בפונקציית התמסורת, שיגרמו לצמצום הקטבים.

נחשב את הקטבים באופן מפורש:

$$s^2+2s\left(k_1-2\right)+2k_1-3$$

$$s_{1,2}=2-k_1\pm\sqrt{k_1^2-2k_1+1}=2-k_1\pm\left(k_1-1\right)$$

$$\Rightarrow\quad s_1=3-2k_1,\qquad s_2=1$$

ועבור המכנה:

$$s^2-\left(4-k_1\right)s+\left(k_1-3\right)$$

$$s_{1,2}=\frac{4-k_1\pm\sqrt{k_1^2-12k_1+28}}{2}=\frac{4-k_1\pm\sqrt{k_1^2-12k_1+28}}{2}$$

$$\Rightarrow\quad s_1=2k_1-3,\qquad s_2=-1$$

שאלה 2

נביט במערכת ההפרשים הבאה:

$$y\left[k+2\right]+\frac{5}{2}y\left[k+1\right]+y\left[k\right]=x\left[k+1\right]-2x\left[k\right]$$

ונרצה לבדוק האם היא יציבה אסימפטוטית.

ראשית נחשב את פונקציית התמסורת המתאימה, ע"י התמרת Z של המשוואה:

$$z^2Y\left(z\right)+\frac{5}{2}zY\left(z\right)+Y\left(z\right)=zX\left(z\right)-2X\left(z\right)$$

$$\Rightarrow\quad H\left(z\right)=\frac{Y\left(z\right)}{X\left(z\right)}=\frac{z-2}{z^2+\frac{5}{2}z+1}=\frac{z-2}{\left(z+2\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

מכיוון ש $z_1=-2$ נמצא מחוץ למעגל היחידה, המערכת אינה יציבה אסימפטוטית.

נביט במערכת ההפרשים הבאה:

$$y[k]-y[k-1]+0.21y[k-2]=2x[k-1]+3x[k-2]$$

ונרצה לבדוק האם היא יציבה אסימפטוטית.

ראשית נחשב את פונקצית התמסורת המתאימה, ע"י התמרת Z של המשוואה:

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)+0.21z^{-2}Y(z)=2z^{-1}X(z)+3z^{-2}X(z)$$

$$z^2Y(z)-zY(z)+0.21Y(z)=2zX(z)+3X(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2z+3}{z^2-z+0.21}=\frac{2z+3}{(z-0.7)(z-0.3)}$$

מכיוון ששני השורשים נמצאים בתוך מעגל היחידה, המערכת יציבה אסימפטוטית.