יסודות התקני מוליכים למחצה

044127

תרגיל מחשב 1

מגישים:

אבי בנדל 040517708

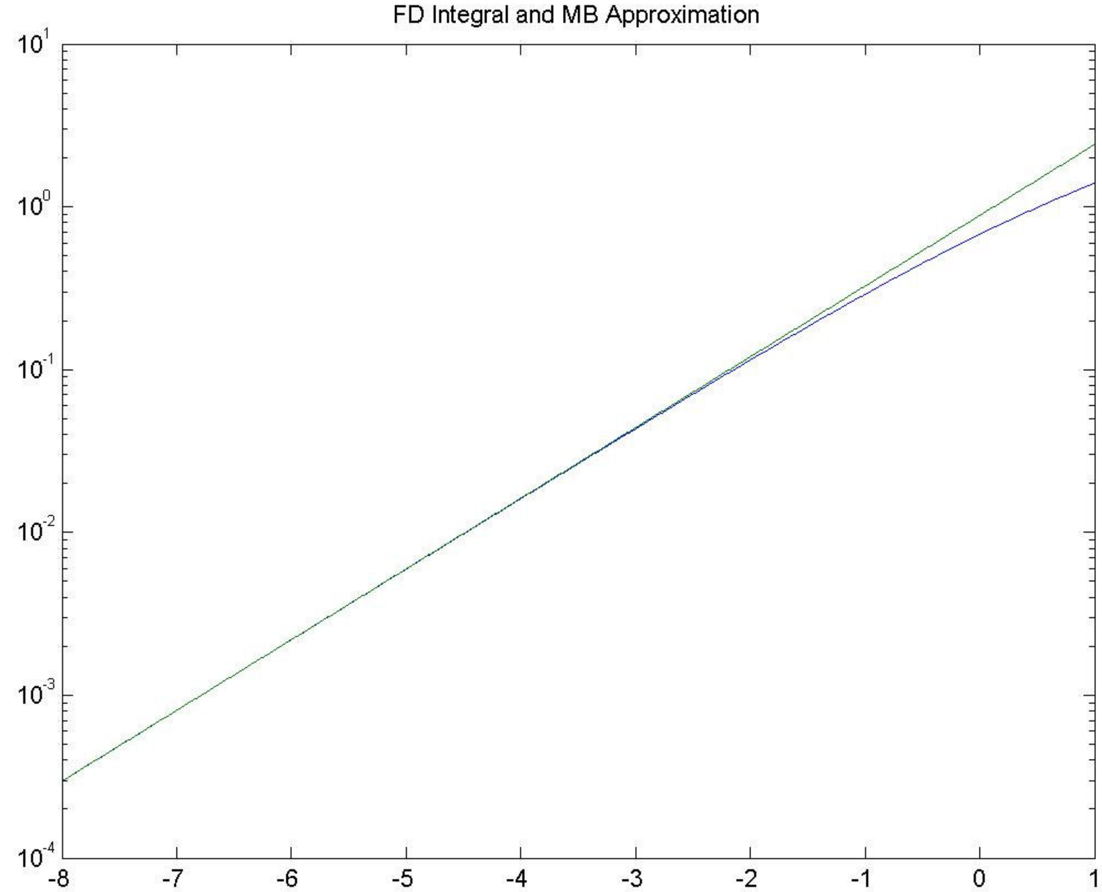
תומר גפנר 060634078

נתונים :

- נבחר את ריכוז הסיגים הנוטלים כקבוע: $N_A = 8 \cdot 10^{14} \left[cm^{-3} \right]$
- נבחר את ריכוז הסיגים התורמים : $N_A = \left(8 \cdot 10^{15}, 8 \cdot 10^{16}, 8 \cdot 10^{17}, 8 \cdot 10^{18}, 8 \cdot 10^{19}, 8 \cdot 10^{20} \right) \left[cm^{-3} \right]$
- נעבוד עם המוליך למחצה $InSb - Indium\ Antimonide$:

רוחב הפער האסור, Energy Gap	$E_{gap} = 0.17 \left[eV \right]$
תלות רוחב הפער האסור בטמפרטורה	$E_{gap}(T) = 0.24 - \frac{6 \cdot 10^{-4} T^2}{T + 500} \left[eV \right]$
צפיפות מצבים בפס ההולכה	$N_C \sim 8 \cdot 10^{12} \cdot T^{\frac{3}{2}} \left[cm^{-3} \right]$
צפיפות מצבים בפס הערכיות	$N_V \sim 1.4 \cdot 10^{15} \cdot T^{\frac{3}{2}} \left[cm^{-3} \right]$
אנרגית יינון של תורמים	$0.0007 \left[\mathrm{eV} \right]$
אנרגית יינון של נוטלים	$0.01 \left[eV \right]$
צפיפות מצבים אפקטיבית בפס ההולכה	$N_C = 4.2 \cdot 10^{16}$
צפיפות מצבים אפקטיבית בפס הערכיות	$N_V = 7.3 \cdot 10^{18}$

שאלה 1



ניתן לראות בקלות שעבור $\eta_c < -3$ קירוב מקסוול בולצמן (בכחול) קרוב מאוד לאינטגרל פרמי-דירק (בירוק)

שאלה 2

סעיף א

משוואת הניטרליות הכללית:

$$n_c + N_A^- = p_v + N_D^+$$

כפי שלמדנו בהקדמה, הביטויים לריכוזי הסיגים המיוננים הם:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + g_D e^{(E_F - E_D)/kT}}, \qquad N_A^+ = \frac{N_A}{1 + g_A e^{(E_A - E_F)/kT}}$$

וכמו כן, ריכוזי האלקטרוני בפס ההולכה וריכוזי החורים בפס הערכיות נתונים ע"י:

$$n_c = N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_c), \quad p_v = N_v \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_v)$$

ולכן משוואת הניטרליות מקבלת את הצורה

$$N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_c) + \frac{N_A}{1 + g_A e^{(E_A - E_F)/kT}} = N_v \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_v) + \frac{N_D}{1 + g_D e^{(E_F - E_D)/kT}}$$

ובתוספת הסימונים

$$\eta_a = \frac{E_A - E_F}{kT}, \qquad \eta_d = \frac{E_F - E_D}{kT}$$

נקבל את הביטוי הרצוי:

$$N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_c) + \frac{N_A}{1 + g_A e^{\eta_a}} = N_v \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_v) + \frac{N_D}{1 + g_D e^{\eta_d}}$$

סעיף ב

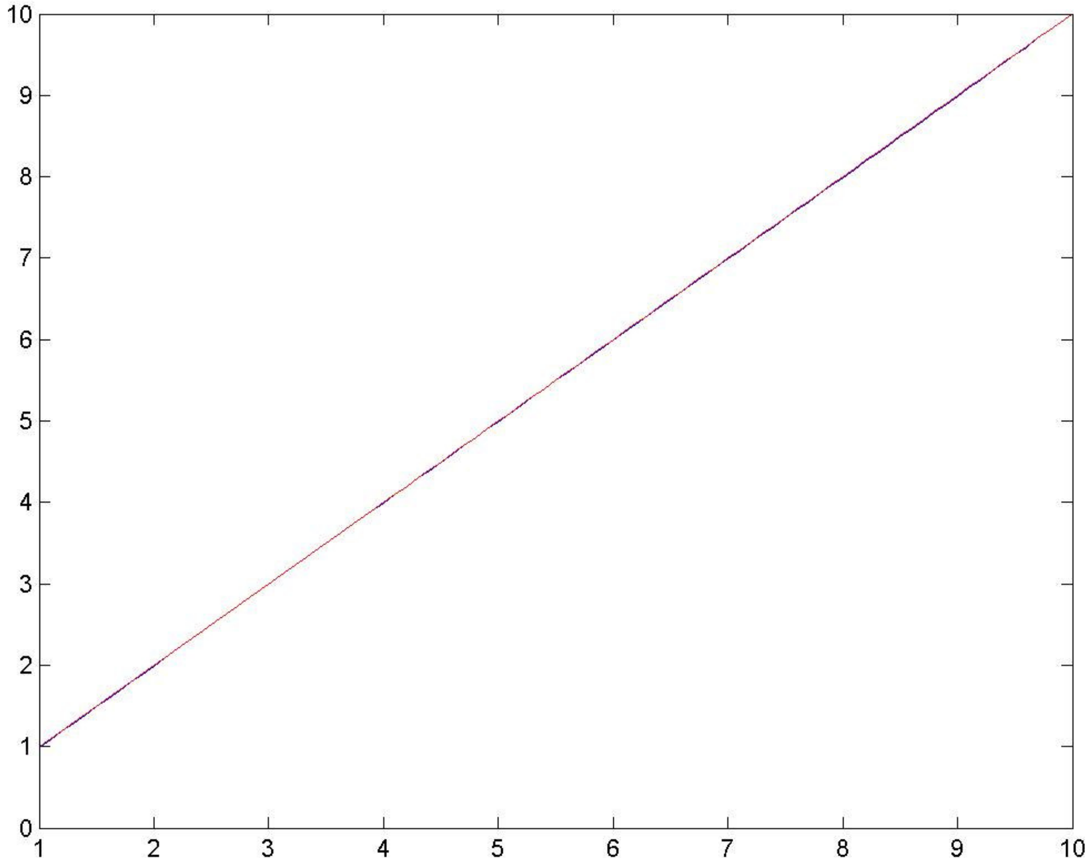
$$\eta_v = \frac{E_V - E_F}{kT} = \frac{E_V - E_F - E_C + E_C}{kT} = -\frac{E_F - E_C}{kT} - \frac{E_C - E_V}{kT} = -\eta_c - \frac{E_{gap}}{kT}$$

$$\eta_d = \frac{E_F - E_D}{kT} = \frac{E_F - E_D - E_C + E_C}{kT} = \frac{E_F - E_C}{kT} + \frac{E_C - E_D}{kT} = \eta_c + \frac{E_C - E_D}{kT}$$

$$\eta_a = \frac{E_A - E_F}{kT} = \frac{E_A - E_F - E_V + E_V}{kT} = \frac{E_V - E_F}{kT} + \frac{E_A - E_V}{kT} = \eta_v + \frac{E_A - E_V}{kT}$$

<u>שאלה 3</u>

הגרף המתקבל:



אנו רואים שעבור $\Delta x_1 = 0.2$ ולאחר מכן $\Delta x_2 = 0.01$, הקו הכחול חלק דיו, והפתרון הנומרי מדויק מספיק.

שאלה 4

סעיף א

משוואת הניטרליות המלאה שקיבלנו בשאלה 2:

$$N_c\frac{2}{\sqrt{\pi}}F_{1/2}(\eta_c)+\frac{N_A}{1+g_Ae^{\eta_a}}=N_v\frac{2}{\sqrt{\pi}}F_{1/2}(\eta_v)+\frac{N_D}{1+g_De^{\eta_d}}$$

מכיוון שהחומר אינטרינסי, $N_A=N_D=0$, ולכן:

$$N_c\frac{2}{\sqrt{\pi}}F_{1/2}(\eta_c)=N_v\frac{2}{\sqrt{\pi}}F_{1/2}(\eta_v)$$

כעת נוסיף את קירוב בולצמן:

$$N_c\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\eta_c}=N_v\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\eta_v}$$

או במילים אחרות

$$N_ce^{\eta_c}=N_ve^{\eta_v}$$

מכיוון שאנו עוסקים במל"מ $InSb$, נקבל:

$$8\cdot10^{12}\cancel{T^{\frac{3}{2}}}e^{\eta_c}=1.4\cdot10^{15}\cancel{T^{\frac{3}{2}}}e^{\eta_v}$$

נציב את הביטויים $\eta_v=\frac{E_v-E_F}{kT}$, $\eta_c=\frac{E_F-E_c}{kT}$, כאשר נגדיר רמת ייחוס ב $E_v=0$ ולכן $E_c=E_{gap}$:

$$e^{\eta_c}=175e^{\eta_v}\Rightarrow e^{\frac{E_F-E_{gap}}{kT}}=175e^{-\frac{E_F}{kT}}\Rightarrow\frac{E_F-E_{gap}}{kT}=\ln175-\frac{E_F}{kT}$$

$$\Rightarrow E_F-E_{gap}=kT\ln175-E_F\Rightarrow E_F=\frac{kT\ln175+E_{gap}}{2}$$

נציב את הנתון עבור מל"מ $InSb$ $E_{gap}=0.17[eV]$ ולכן

$$E_F=\frac{kT\ln175+0.17}{2}=kT\ln\sqrt{175}+0.085$$

סעיף ב

את הפתרון האנליטי המקורב קיבלנו, נותר לפתור את המשוואה בצורה נומרית.
המשוואה שיש לפתור:

$$N_c\frac{2}{\sqrt{\pi}}F_{1/2}(\eta_c)+\frac{N_A}{1+g_Ae^{\eta_a}}=N_v\frac{2}{\sqrt{\pi}}F_{1/2}(\eta_v)+\frac{N_D}{1+g_De^{\eta_d}}$$

מכיוון שהחומר אינטרינסי, $N_A=N_D=0$, ולכן:

$$N_c\frac{2}{\sqrt{\pi}}F_{1/2}(\eta_c)=N_v\frac{2}{\sqrt{\pi}}F_{1/2}(\eta_v)$$

ואם נפרט את אינטגרל פרמי-דירק:

$$8\cdot10^{12}\cancel{T^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\eta_c}}d\eta=1.4\cdot10^{15}\cancel{T^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\eta_v}}d\eta$$

$$\int_0^\infty\frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\eta_c}}d\eta=175\int_0^\infty\frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\eta_v}}d\eta$$

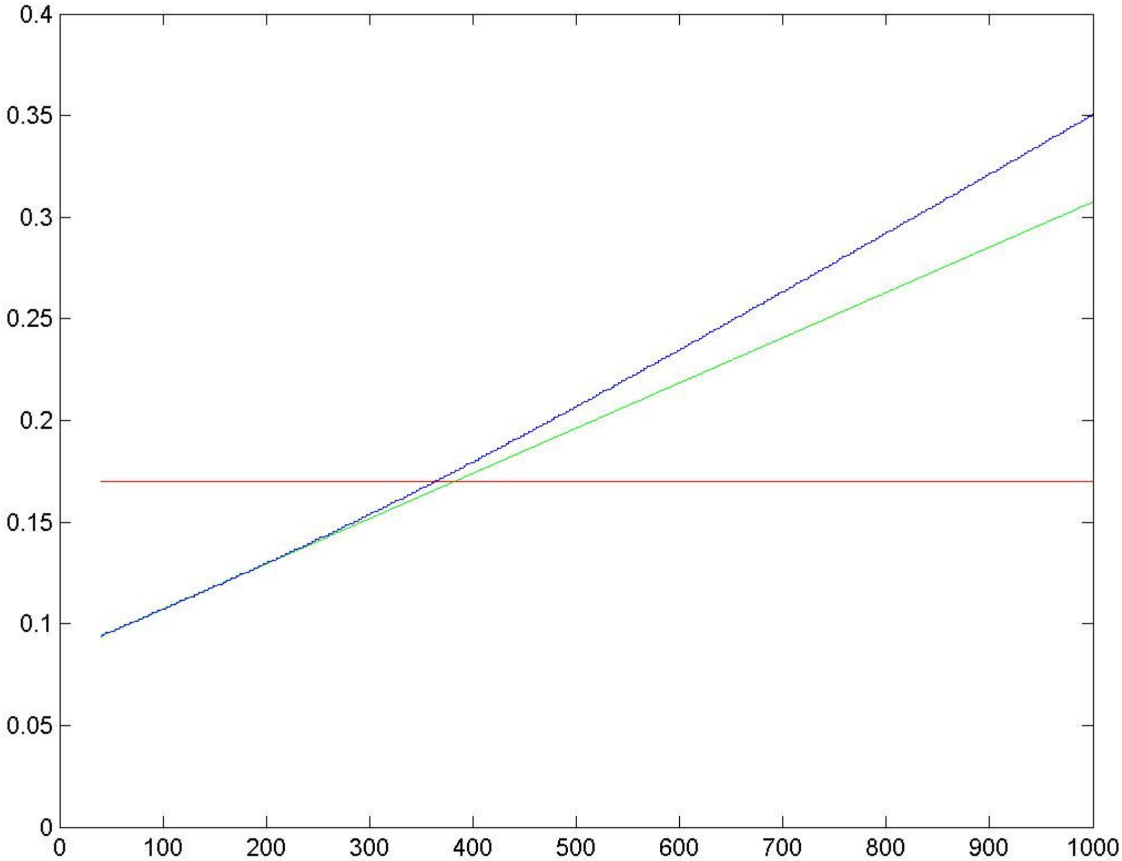
אזי עבור הפתרון הנומרי, נגדיר

$$f_1(E_F)=\int_0^\infty\frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\frac{E_F-E_{gap}}{kT}}}d\eta$$

$$f_2(E_F)=175\int_0^\infty\frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\left(-\frac{E_F}{kT}\right)}}d\eta$$

כאשר T פרמטר בתחום $T\in[40K,1000K]$

לסיכום סעיפים א׳ וב׳, הגרף הבא מתאר את רמת פרמי האינטרינסית כפונקציה של הטמפרטורה.



בירוק – הפתרון האנליטי עם קירוב מקסוול-בולצמן, בכחול הפתרון הנומרי ללא קירובים. באדום רמות הערכיות E_C וההולכה E_V, כאשר קבענו את רמת הייחוס $E_V = 0$.

ההבחנה שלנו היא שעבור טמפרטורות שקטנות מ $250°K$ הקירוב טוב.

סעיף ג

הביטוי עבור מספר האלקטרונים בפס ההולכה הוא

$$n_c = N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\eta_c\right)$$

ידוע כי

$$\eta_c = \frac{E_F - E_c}{kT}$$

במל״מ שלנו מתקיים

$$N_C \sim 8 \cdot 10^{12} \cdot T^{\frac{3}{2}} \left[cm^{-3}\right]$$

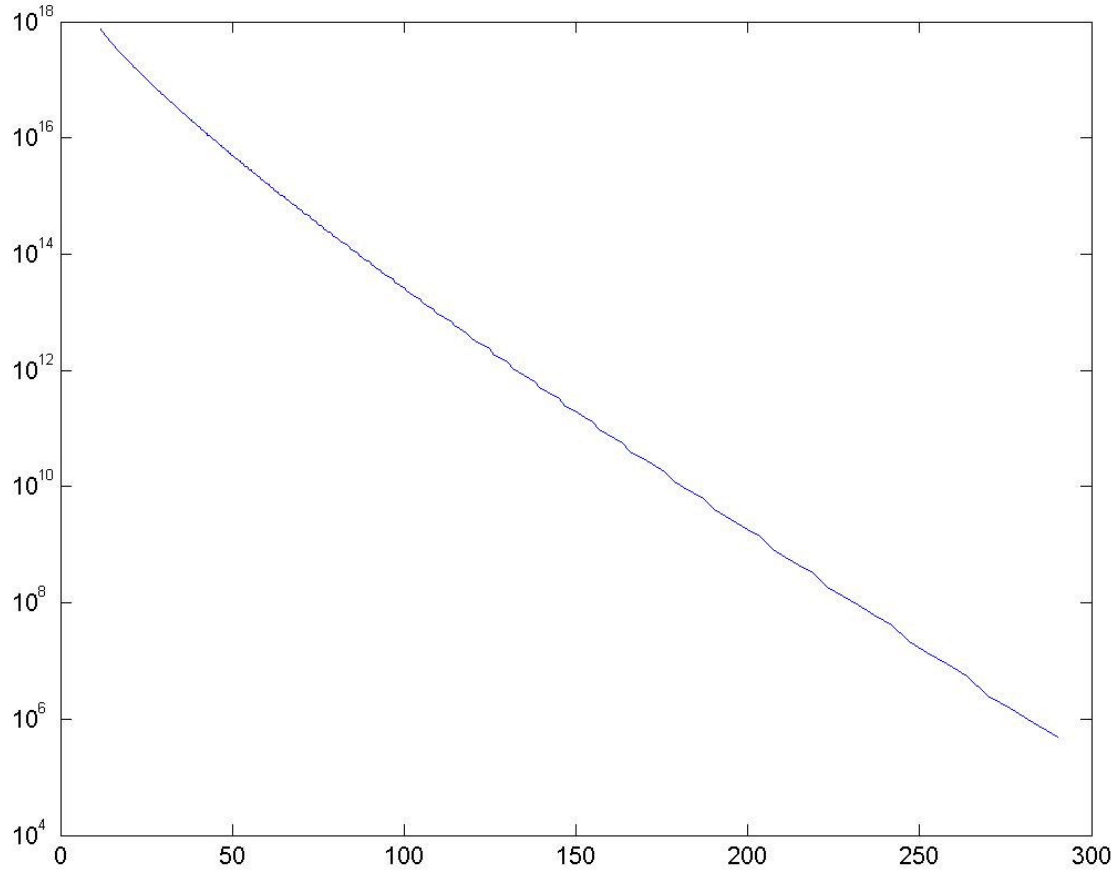
ולכן

$$n_c = 8 \cdot 10^{12} \cdot T^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\frac{E_F - E_{gap}}{kT}\right)$$

או

$$\ln n_c = \ln\left[8 \cdot 10^{12} \cdot T^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\frac{E_F - E_{gap}}{kT}\right)\right]$$

הגרף הבא הוא $\ln\left(n_c\right)$ כפונקציה של $\frac{1}{kT}$.



שאלה 5

סעיף א

1. המשוואה שיש לפתור ($N_A = 0$):

$$N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_c) = N_v \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_v) + \frac{N_D}{1+g_D e^{\eta_d}}$$

$$8 \cdot 10^{12} \cdot T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\eta_c}} d\eta = 1.4 \cdot 10^{15} T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\eta_v}} d\eta + \frac{N_D}{1+2e^{\frac{E_F-E_d}{KT}}}$$

עבור הערכים הבאים:

$$N_D \in \left[8 \cdot 10^{15}, 8 \cdot 10^{16}, 8 \cdot 10^{17}, 8 \cdot 10^{18}, 8 \cdot 10^{19}, 8 \cdot 10^{20}\right]$$

עבור החישוב הנומרי שנעשה נגדיר את הפונקציות:

$$f_1(E_F) = 8 \cdot 10^{12} \cdot T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\frac{E_F-E_C}{kT}}} d\eta$$

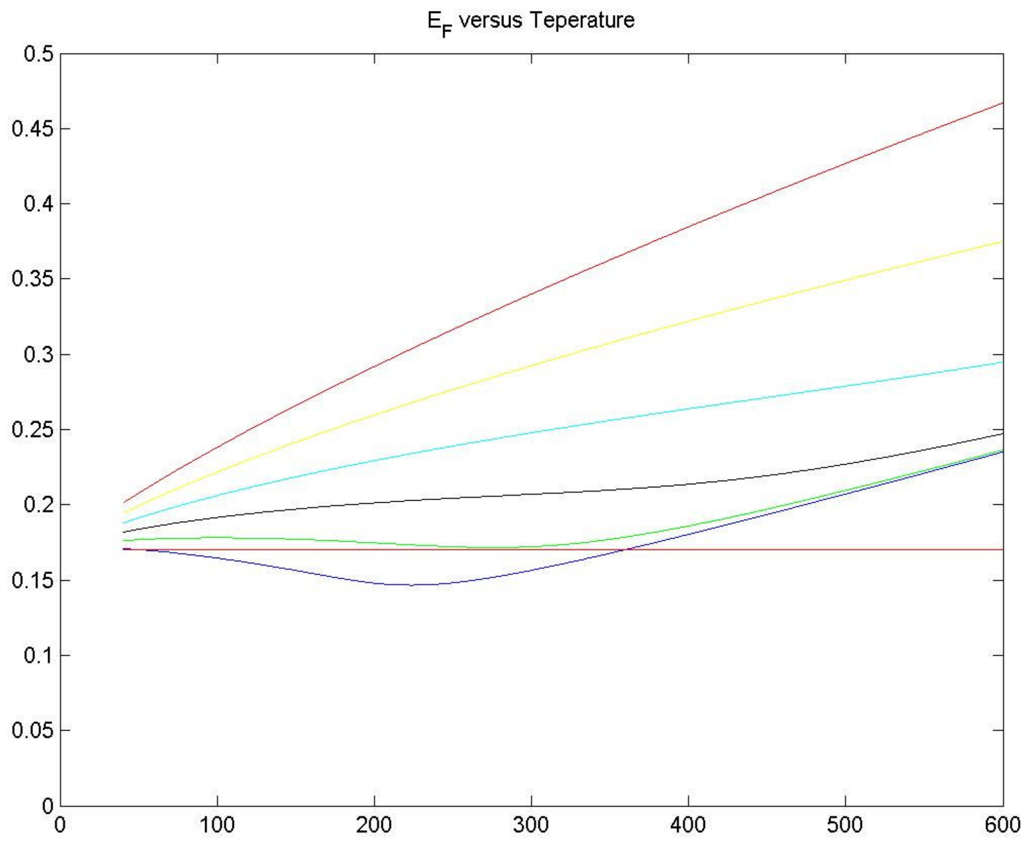
$$f_2(E_F) = 1.4 \cdot 10^{15} T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\left(\frac{-E_F}{kT}\right)}} d\eta + \frac{N_D}{1+2e^{\frac{E_F-E_d}{kT}}}$$

הקדמה לגבי כל הגרפים בשאלות 5 ו 6:

הצבעים כחול, ירוק, שחור, תכלת, צהוב ואדום מסמנות בהתאמה את הסימומים

$$N_D \in \left(8 \cdot 10^{15}, 8 \cdot 10^{16}, 8 \cdot 10^{17}, 8 \cdot 10^{18}, 8 \cdot 10^{19}, 8 \cdot 10^{20}\right)\left[cm^{-3}\right]$$

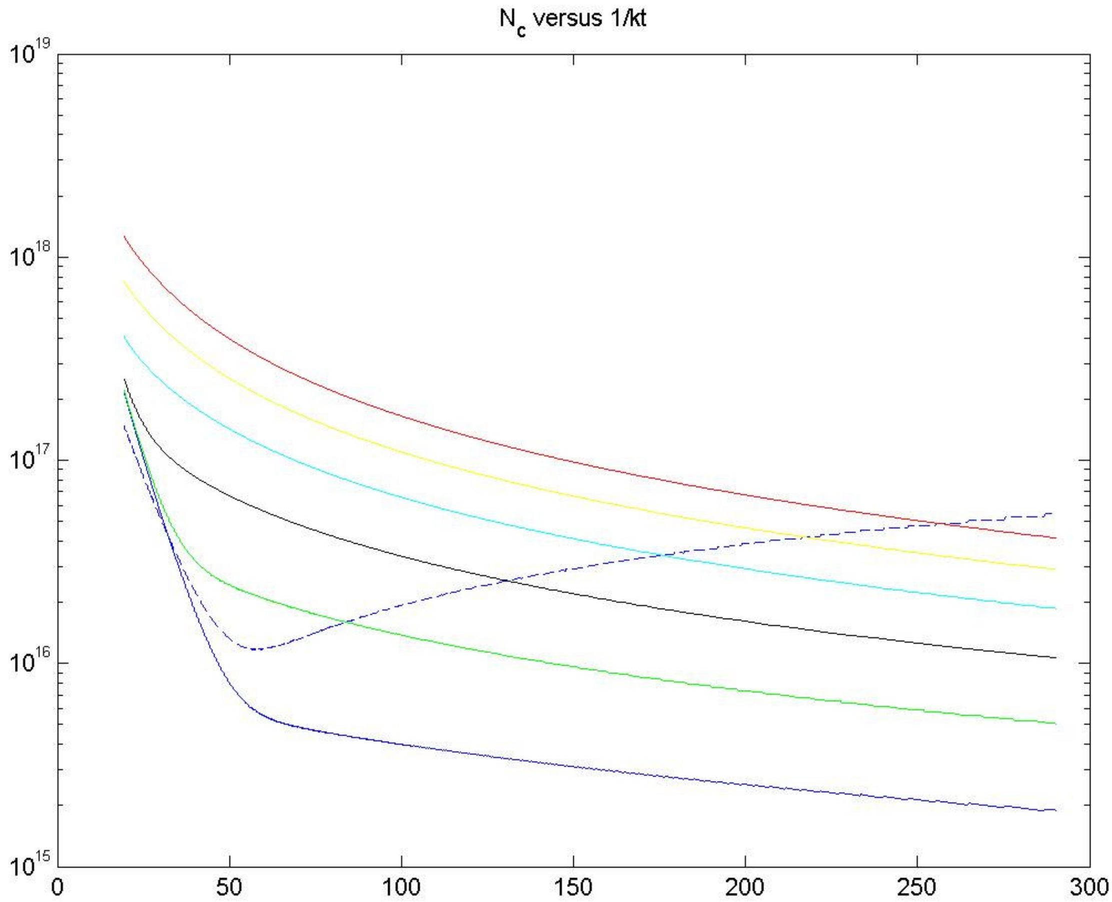
הגרפים הרלוונטיים:



2. הביטוי עבור מספר האלקטרונים/חורים בפס ההולכה/הערכיות הוא

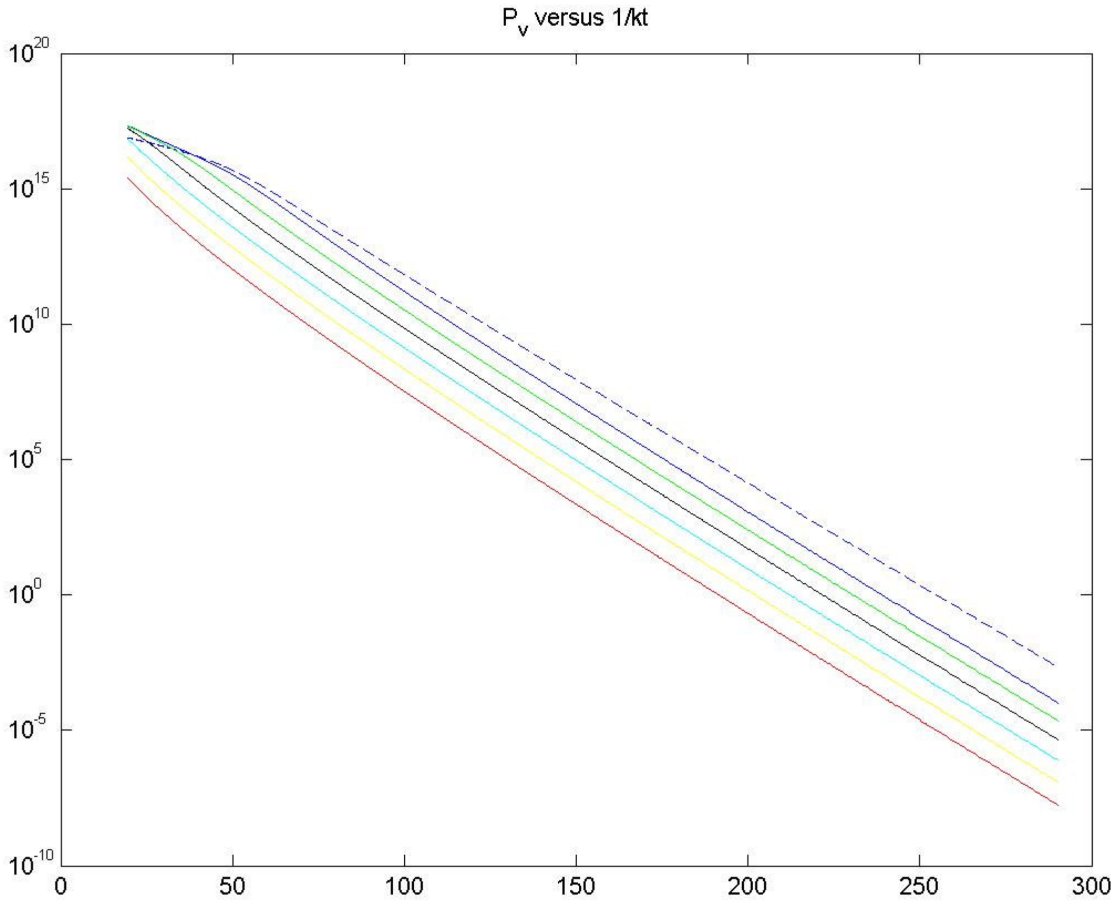
$$n_c = N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\eta_c\right) = 8\cdot 10^{12} T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\frac{E_F - E_c}{kT}\right)$$

$$p_v = N_v \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\eta_v\right) = 1.4\cdot 10^{15} T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\frac{E_v - E_F}{kT}\right)$$



עבור רמת סיגים של $N_D = 8\cdot 10^{15}$, שרטטנו גם את הקירוב ל n_c מתוך הנוסחא (כחול מקוקו)

$$n = N_C e^{\frac{E_F - E_C}{kT}} = 4.2\cdot 10^{16} e^{\frac{E_F - E_C}{kT}}$$



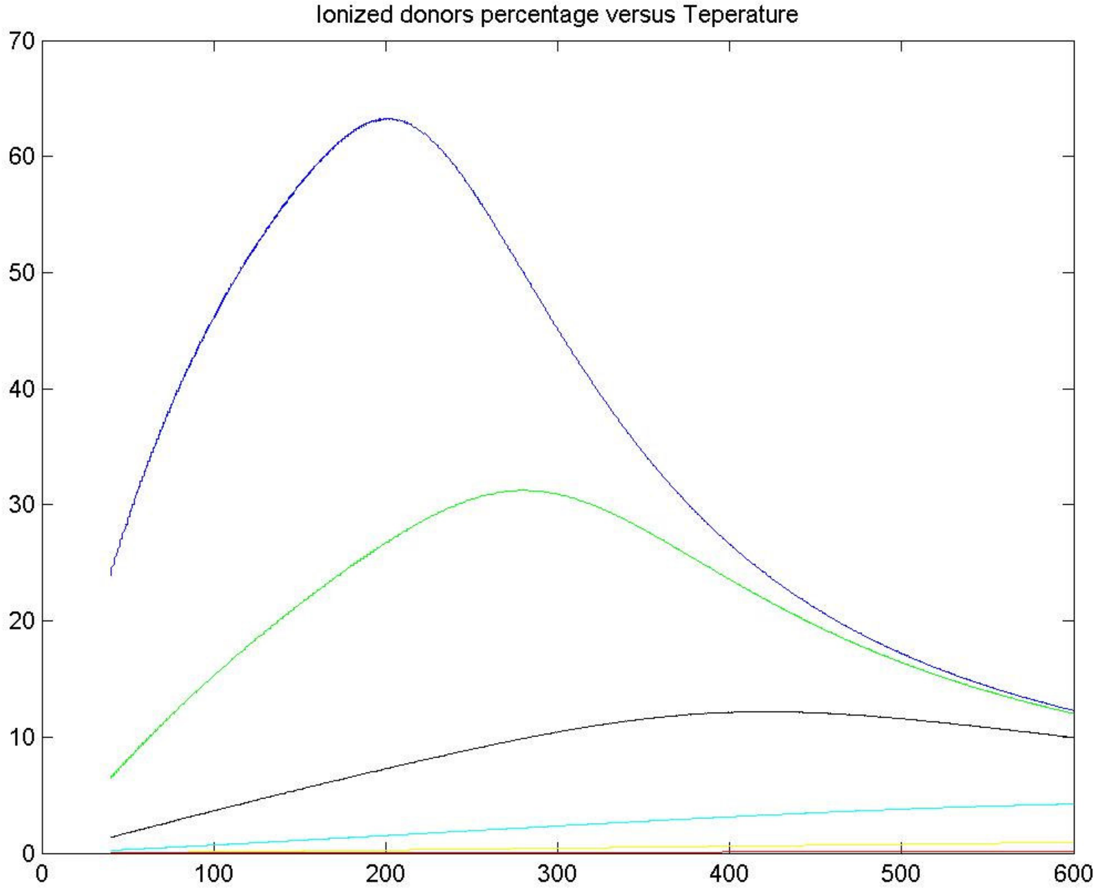
עבור רמת סיגים של $N_D = 8 \cdot 10^{15}$, שרטטנו גם את הקירוב ל p_v מתוך הנוסחא (כחול מקוקו)

$$p = N_V e^{\frac{E_V - E_F}{kT}} = 7.3 \cdot 10^{18} e^{\frac{E_V - E_F}{kT}}$$

3. אחוז הסיגים המיוננים כפונקציה של הטמפרטורה.
תחילה נחשב בצורה אנליטית:

$$percentage = \frac{N_D^{\ +}}{N_D} 100\% = \frac{\dfrac{N_D}{1+g_D e^{\frac{E_F-E_D}{kT}}}}{N_D} 100\% = \frac{100\%}{1+g_D e^{\frac{E_F-E_D}{kT}}}$$

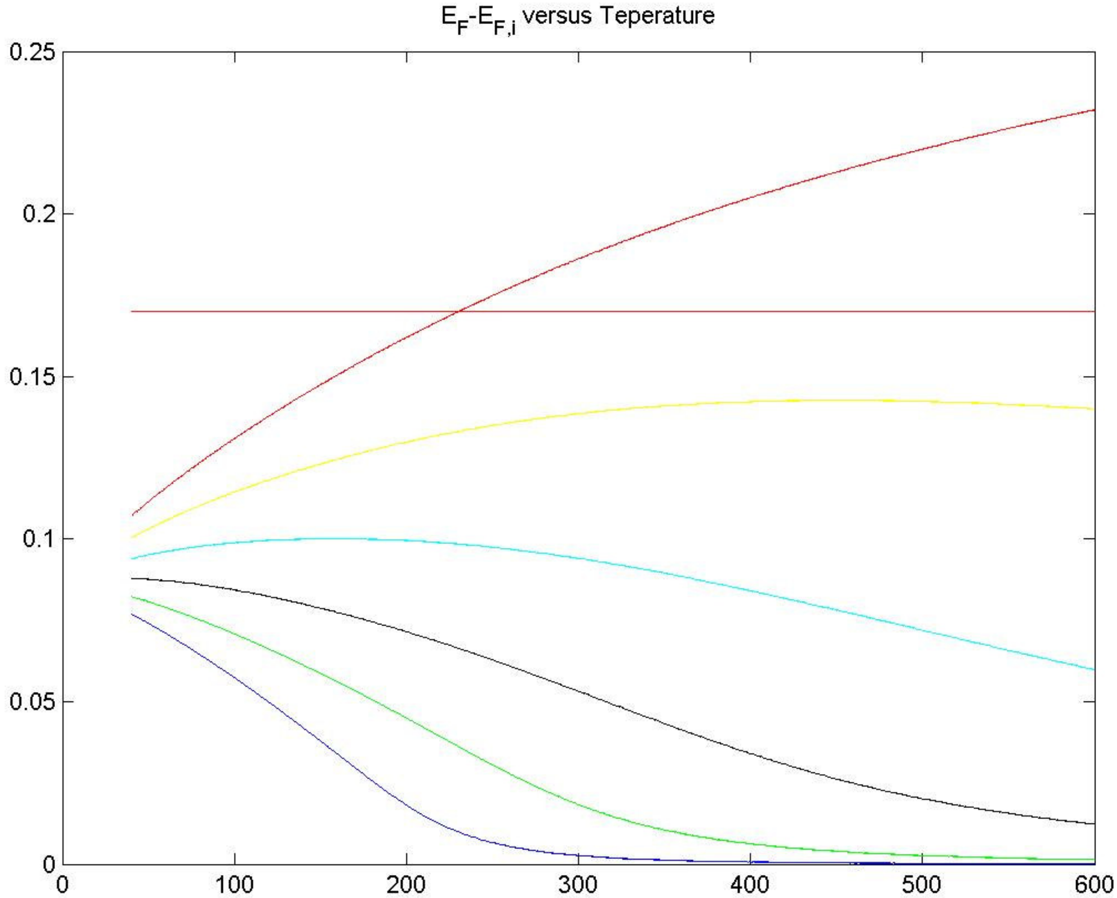
והתוצאות בצורה גראפית:



מגרף אחוז הסיגים המיוננים, נראה כי הטמפרטורה בה חצי מהסיגים מיוננים משתנה, ובעצם עבור סימומים שקטנים מ $N_D = 8 \cdot 10^{16}$, רוב הסיגים לא מתיננים כלל. לכן נשאר עם התחום המומלץ $[40K, 1000K]$.

סעיף ב

1. אנו רואים שבסימום $N_D = 8\cdot 10^{16}\left[cm^{-3}\right]$, בטמפרטורת החדר, מתחיל להיווצר ניוון.
2. לגבי n_c , אנו רואים סטייה גדולה של הביטויים המקורבים. רק בטמפרטורות גבוהות, כאשר $\frac{1}{kT} < 50$, הקירוב מתאר את מספר האלקטרונים, עבור סימום של $N_D = 8\cdot 10^{15}$.
   לגבי p_v , יש תאימות יותר טובה לאורך כל הטמפרטורות, עבור סימום של $N_D = 8\cdot 10^{15}$.
3. רמת פרמי תלויה בטמפרטורה ובמידת הסימום. כלומר כאשר אנו מחסרים את רמת פרמי האינטרינסית מרמת פרמי המתקבלת כתוצאה מסימום מסוים, אנו בעצם מסתכלים על השפעת הסיגים בלבד ו"מנטרלים" את השפעת הטמפרטורה. הגרף הבא מראה את התוצאה שמקבים בדפי העזר, לאחר הפחתת רמת פרמי האינטרינסית $E_{F,i}$.



שאלה 6

סעיף א

המשוואה שיש לפתור :

$$N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_c) + \frac{N_A}{1+g_A e^{\eta_a}} = N_v \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_v) + \frac{N_D}{1+g_D e^{\eta_d}}$$

$$8\cdot 10^{12}\cdot T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\eta_c}} d\eta + \frac{N_A}{1+4e^{\frac{E_A-E_F}{KT}}} = 1.4\cdot 10^{15} T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\eta_v}} d\eta + \frac{N_D}{1+2e^{\frac{E_F-E_d}{KT}}}$$

עבור הערכים הבאים :

$$N_D \in \left[8\cdot 10^{15}, 8\cdot 10^{16}, 8\cdot 10^{17}, 8\cdot 10^{18}, 8\cdot 10^{19}, 8\cdot 10^{20}\right]$$

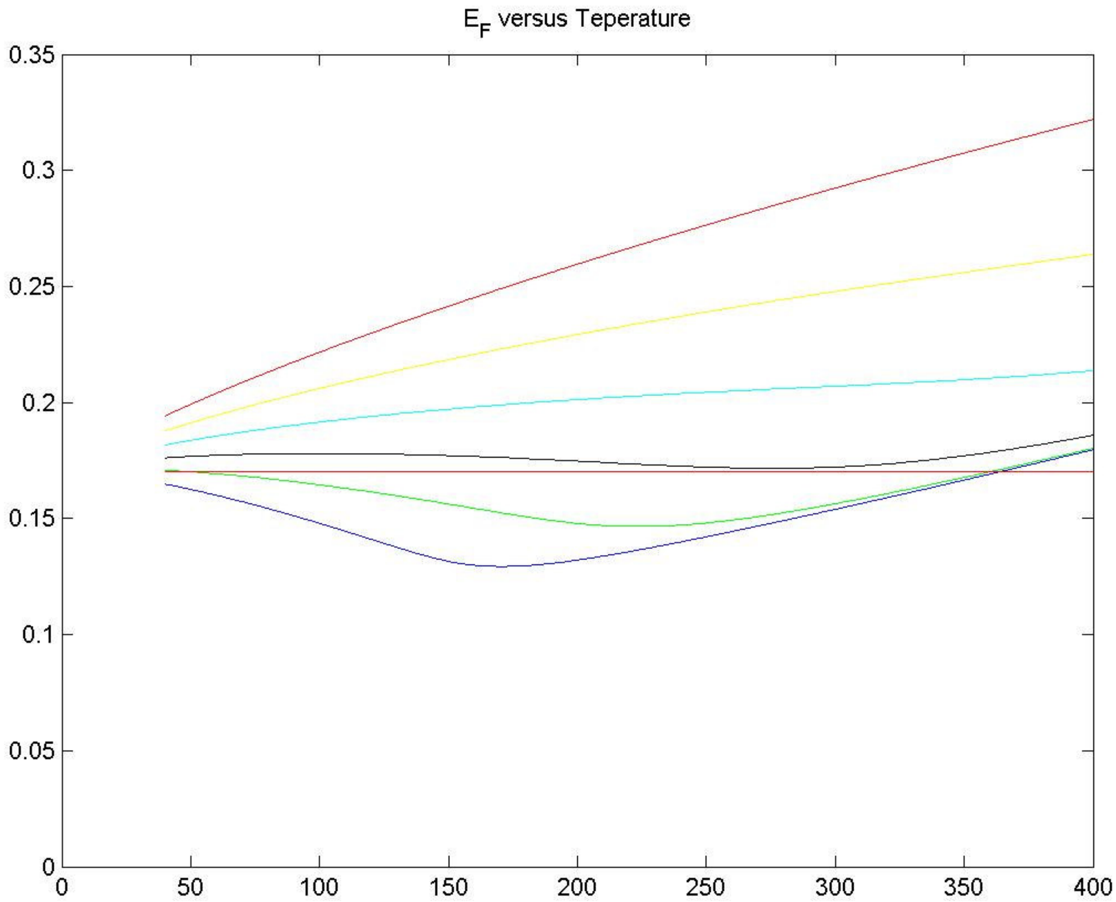
$$N_A = 8\cdot 10^{14}$$

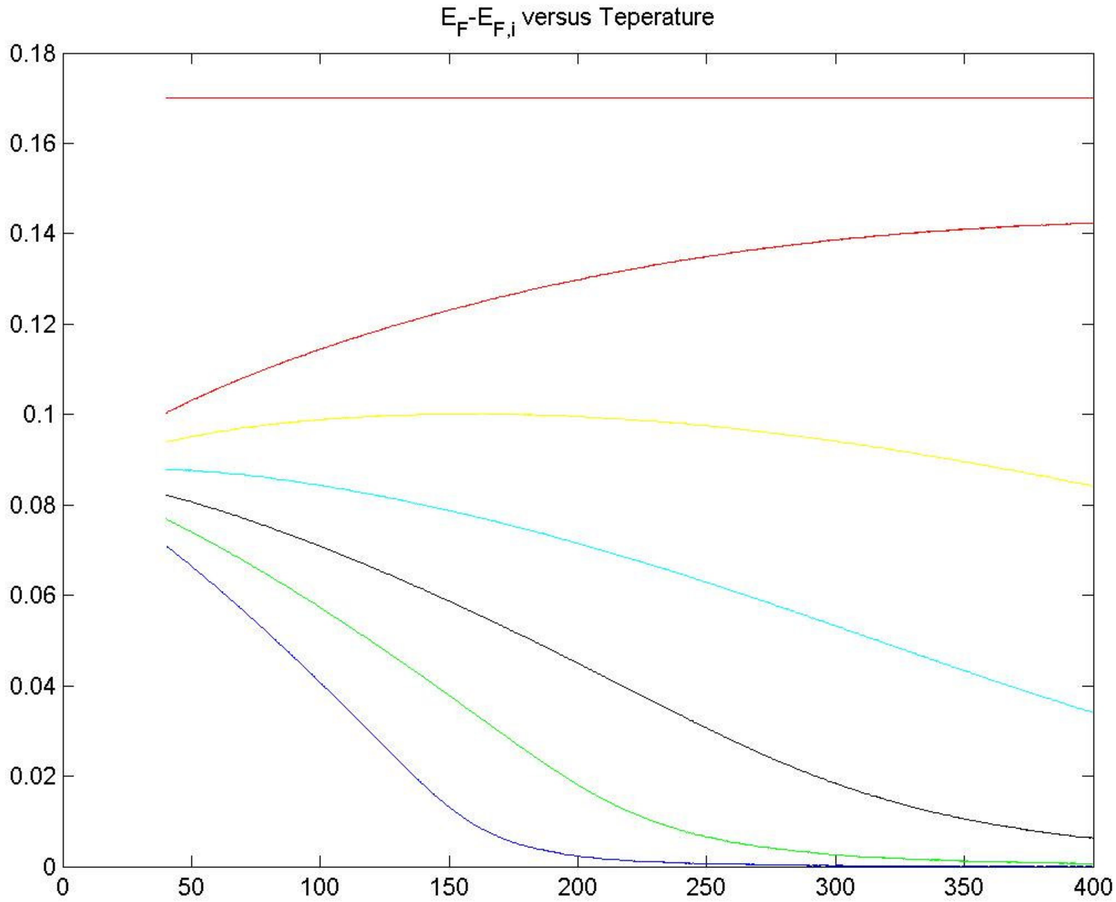
עבור החישוב הנומרי שנעשה נגדיר את הפונקציות :

$$f_1(E_F) = 8\cdot 10^{12}\cdot T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\frac{E_F-E_C}{kT}}} d\eta + \frac{N_A}{1+4e^{\frac{E_A-E_F}{KT}}}$$

$$f_2(E_F) = 1.4\cdot 10^{15} T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\eta}}{1+e^{\eta-\left(\frac{-E_F}{kT}\right)}} d\eta + \frac{N_D}{1+2e^{\frac{E_F-E_d}{kT}}}$$

הגרפים שהתקבלו :

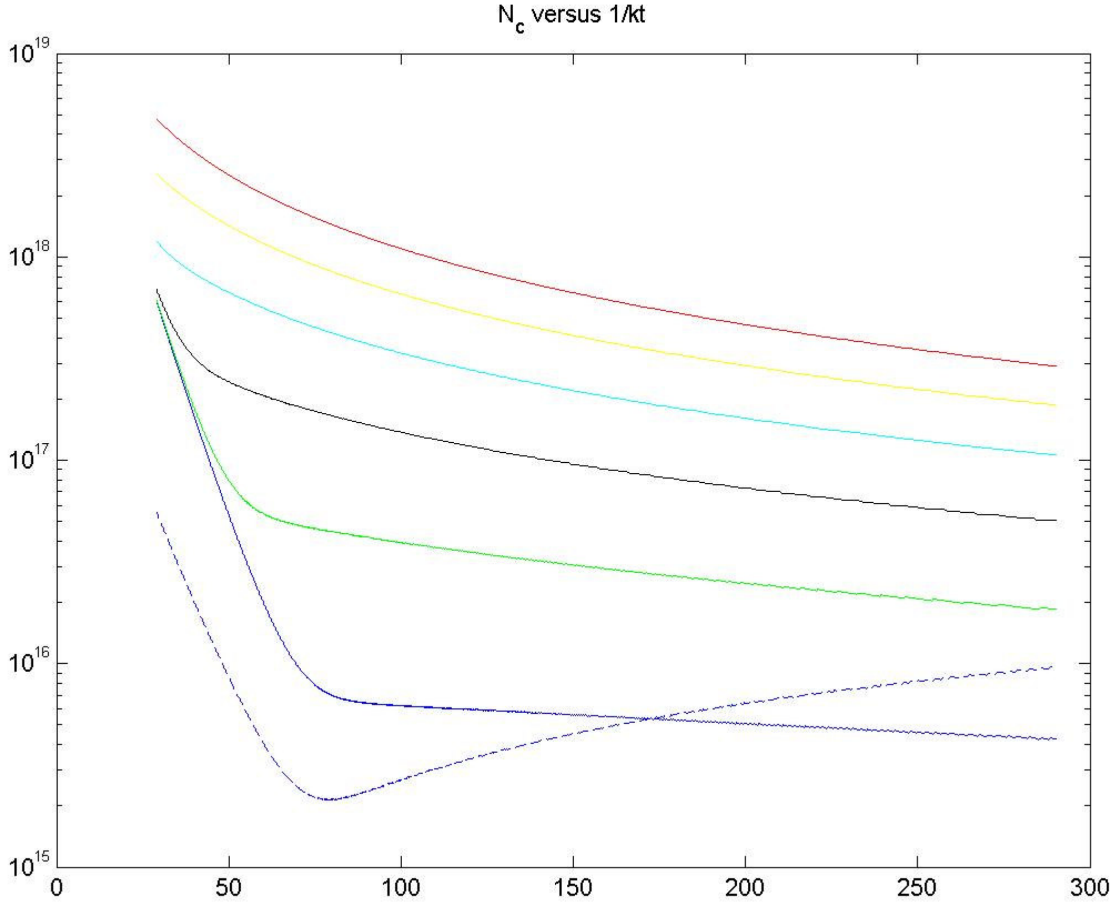



$E_F-E_{F,i}$ versus Teperature
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400

את $\ln(n_c),\ln(p_v)$ נמצא ע״י הנוסחאות הבאות :

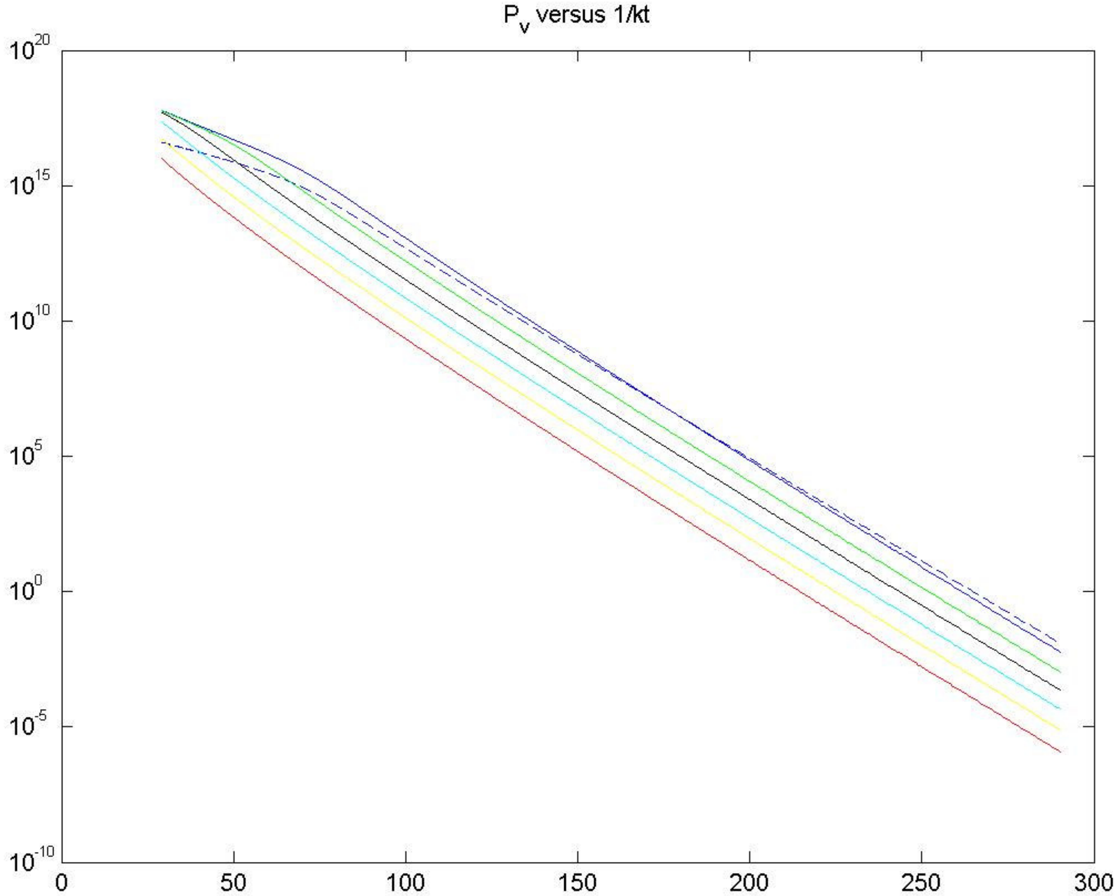
$$n_c = N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_c) = 8\cdot 10^{12} T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\frac{E_F - E_c}{kT}\right)$$

$$p_v = N_v \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}(\eta_v) = 1.4\cdot 10^{15} T^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_{1/2}\left(\frac{E_v - E_F}{kT}\right)$$



גם כאן, עבור רמת סיגים של $N_D = 8\cdot 10^{15}$, שרטטנו את הקירוב ל n_c מתוך הנוסחא (כחול מקוקו)

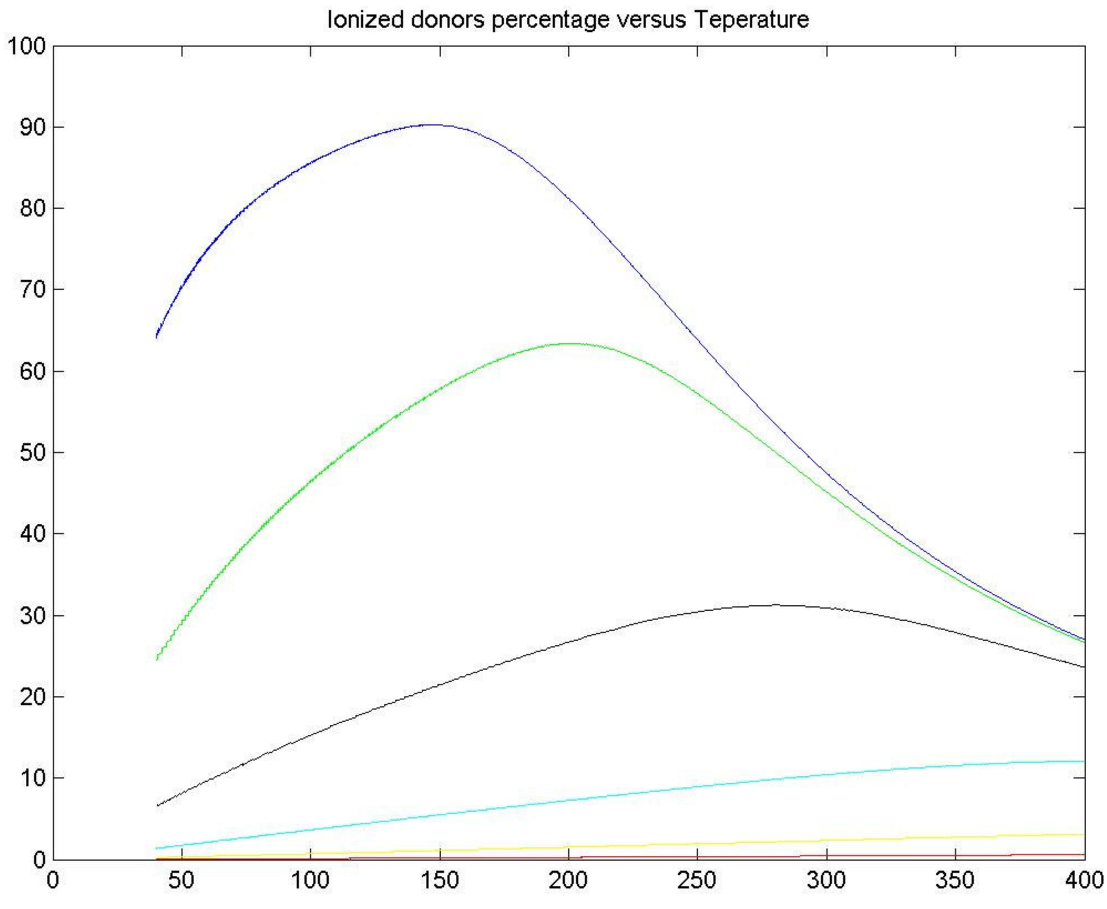
$$n = N_C e^{\frac{E_F - E_C}{kT}} = 4.2\cdot 10^{16} e^{\frac{E_F - E_C}{kT}}$$



עבור רמת סיגים של $N_D = 8 \cdot 10^{15}$, שרטטנו את הקירוב ל p_v מתוך הנוסחא (כחול מקוקו)

$$p = N_V e^{\frac{E_V - E_F}{kT}} = 7.3 \cdot 10^{18} e^{\frac{E_V - E_F}{kT}}$$

אחוז הסיגים המיוננים כפונקציה של הטמפרטורה :



סעיף ב

הגרפים השתנו :

1. אנו רואים שבטמפרטורה של $300K$, ריכוז סיגים תורמים (גדול יותר מאשר בשאלה 5) של $N_D = 8 \cdot 10^{17}$ דרוש כדי לנוון את החומר.
2. עוד אנו רואים שבגרף $E_F - E_{F,i}$, רמות פרמי "מדוכאות" מהר יותר לכיוון רמת פרמי האינטרינסית.
3. מכל זה נסיק שהחומר במצב זה של קומפנסציה יותר נוח לעבודה, אם ברצוננו לשמור על תכונותיו בתור מוליך למחצה בטמפרטורות לא נמוכות יחסית.

שאלה 7

סעיף א

1. ככל שרמת סימום התורמים גדלה, אנו רואים מהגרפים שטמפרטורת העבודה, כלומר הטמפרטורה שבה החומר עדיין לא מנוון, יורדת. כלומר היחס הוא יחס הפוך.
2. ראינו שסימום של סיגים נוטלים בתוספת לסימום בתורמים עוזר לנו בהגדלת תחום העבודה המעשי.

סעיף ב

הגרף בדפי העזר עבור מל"מ סוג P הוא בעצם שיקוף הגרף של סוג N ביחס לרמת פרמי האינטרינסית, כלומר נקבל התנהגות דומה של ריכוז החורים להתנהגות האלקטרונים שראינו במל"מ סוג N. כפי שרמת פרמי התרחקה מרמת E_D, נקבל במל"מ סוג P התרחקות של רמת פרמי מרמת E_A.

כמובן ששיקוף זה לא יהיה מדויק, משום שהוא תלוי בעוד פרמטרים. פרמטר אחד שאנו מכירים, לדוגמא, הוא g_A שתלוי בספין של החלקיקים.