חקר מערכות ליניאריות, התמרת פוריה, תורת המעגלים ומה שבינהם

סיכום והשלמות לחסרי ידע מוקדם בפוריה

מוטיבציה

מערכות ליניאריות מופיעות בתחומים רבים הן במדעי בטבע והן במדעי החברה. פשטותן היחסית מאפשרת בניית תורה מתמטית אבסטרקטית הנותנת כלי התמודדות חזקים המאפשרים לחקור כל מערכת המצייתת למספר אקסיומות בסיסיות (שעיקרן סגירות לחיבור ולכפל בקבוע). ענף **האלגברה הליניארית** מהווה הבסיס עליו נשענת תורה זו.

בתורת המעגלים החשמליים ניתן למצוא דוגמאות רבות למערכות ליניאריות. כל מעגל חשמלי המורכב מרכיבים ליניאריים יתפקד באופן ליניארי עבור אותות כניסה ויציאה שניתן להגדיר. לדוגמא, ניקח את המעגל הפשוט ביותר, נגד ליניארי בעל התנגדות R המחובר למקור מתח אידיאלי. נבחר את אות הכניסה להיות אות המתח שמוציא המקור, v_s. אות היציאה יהיה דווקא הזרם על הנגד, i_R (כל זרם או מתח בענף כלשהו יכול לשמש כאות כניסה או יציאה). כעת נבדוק מהו אות היציאה בתלות באות הכניסה. קשר זה יהיה $v_s = i_R R$. כלומר בידינו קשר ליניארי בין אות הכניסה לאות היציאה – מערכת ליניארית.

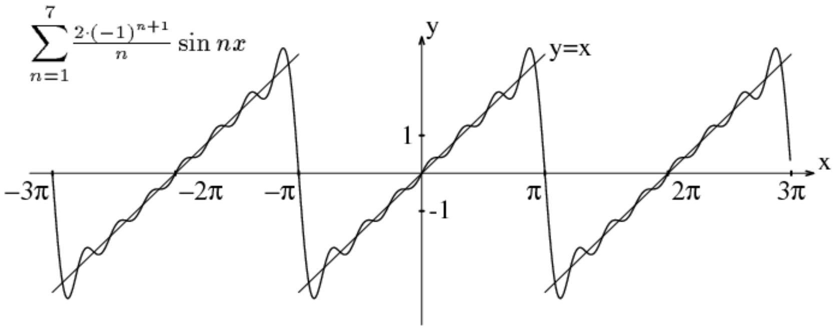
כזכור מאלגברה ליניארית, **מרחב ליניארי** הוא אוסף סופי או אינסופי של וקטורים מעל שדה. התכונות הבסיסיות ביותר של מרחב ליניארי הן סגירות לחיבור של וקטורים וסגירות לכפל של וקטור בסקלר. כל מרחב ליניארי ניתן לתאר ע"י מספר מצומצם של וקטורים נציגים, כאשר כל וקטור במרחב מהווה צירוף ליניארי שלהם. קבוצת וקטורים זו נקראת **בסיס** (קבוצה בלתי תלויה של וקטורים הפורשת את המרחב כולו). מספר הוקטורים בבסיס מהווה את **מימד** המרחב. על מנת להגדיר תכונות נוספות של הוקטורים במרחב (כמו אורך או ניצבות) נוח להגדיר פעולה הקרויה **מכפלה פנימית** בין וקטורים במרחב. תכונה זו מאפשרת להגדיר בסיס מיוחד של וקטורים, אשר כולם ניצבים זה לזה ובעלי אורך (נורמה) של יחידה. בסיס זה קרוי **בסיס אורתונורמלי**. לבסיס אורתונורמלי יתרונות רבים, ובראשם הקלות בה ניתן לחשב את מקדמי הפירוק של כל וקטור במרחב לפיו.

אחד המרחבים הליניאריים השימושיים ביותר הוא מרחב הפונקציות. סכום של פונקציות (נקודתי) מהווה פונקציה, ומכפלה של פונקציה בסקלר מהווה פונקציה. בניגוד למרבית המרחבים הנלמדים באלגברה ליניארית, למרחב זה מימד אינסופי (אין בסיס סופי הפורש אותו). מציאת בסיס אורתונורמלי אינסופי למרחב זה מקנה כוח רב בטיפול בפונקציות. **מערכת פוריה** מהווה בסיס כזה, המתבסס על הפונקציות הממשיות ההרמוניות $\sin(nx)$ $\cos(nx)$ או על הפונקציה המדומה e^{jnx}. האיברים השונים בבסיס מהווים פונקציות הרמוניות עם תדרים (ערכי n) שונים.

המסקנה מכך היא שכמעט כל פונקציה שימושית (למשל כל הפונקציות הרציפות למקוטעין) ניתנת לפירוק לפי הבסיס הנ"ל. כלומר, קיים טור (לרוב אינסופי) אשר אבריו השונים הם פונקציות הרמוניות בתדרים שונים, המתכנס נקודתית לאותה הפונקציה (עם מעט הגבלות שלא ניכנס אליהן כאן). ייצוג פונקציות באמצעות טורים של פונקציות פשוטות יותר הוא נושא מוכר, לדוגמא טור טיילור המפרק פונקציות לטור שאבריו חזקות שלמות של x. הכוח בפירוק נעוץ בכך שכדי לחקור פעולה כלשהי, בעיקר פעולה ליניארית, אין צורך לחקור את תוצאת הפעולה על הפונקציה המקורית, אלא על כל אחד מאברי הבסיס. מכיוון שאברי הבסיס הם לרוב פונקציות פשוטות מאוד (כמו הפונקציות ההרמוניות), חקר זה יחסית קל לביצוע. לאחר שביצענו את החקר המקורי, תכונת הליניאריות תאפשר להשליך את התוצאות על כל פונקציה שניתנת לפירוק. בשפה וקטורית: $L\left[\vec{v}\right] = L\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \vec{e}_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i L\left[\vec{e}_i\right]$

טורי פוריה

טורי פוריה מאפשרים לפתח פונקציה לטור בפונקציות הרמוניות בקטע חסום. לדוגמא, ניקח את הפונקציה $f(x)=x$ ונפתח אותה לטור ממשי בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$. אם נשרטט את הגרף של הטור (פונקצית הגבול של הטור) נגלה שהוא מתכנס נקודתית לפונקציה בכל הקטע הנתון (מלבד הקצוות). מכיוון שפונקציות הבסיס מחזוריות, מחוץ לקטע $\left[-\pi,\pi\right]$ פונקצית הגבול של הטור מתנהגת באופן מחזורי (המשכות מחזוריות של הקטע המקורי). בשרטוט לדוגמא מופיע סכומם של 7 האיברים הראשונים בטור של $f(x)=x$:



נצרף את הנוסחאות הבסיסיות לפיתוח טור פוריה לפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$. נציין שלרוב נהוג לפתח פונקציות בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$ ולכן לרוב נתון מקרה פרטי של נוסחאות אילו:

מקדמי הטור הממשי	**טור פוריה ממשי**
$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx$ $b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$
מקדמי הטור המרוכב	**טור פוריה מרוכב**
$c_n=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)e^{-j\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)}dx$	$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{j\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)}$

כאשר נרצה לפתח פונקציה בקטע אינסופי, כמו $(-\infty,\infty)$, נצטרך להכליל את טורי פוריה ונגדיר את **התמרת פוריה**. ניתן לראות את התמרת פוריה כגרסה רציפה של טורי פוריה (במקום אינסוף איברים בדידים בטור, נקבל אינסוף איברים רציפים בטור). כעת לא יהיו רק תדרי $n\in N$ (מספרים שלמים), אלא מגוון תדרי $\omega\in R$. לכל איבר בבסיס היה מקדם בפיתוח, לדוגמא a_n או c_n בנוסחאות לעיל, אך עכשיו נוח להגדיר דווקא פונקציה לשם כך. נסמן את הפונקציה $F(\omega)$ המתאימה לכל תדר ω את המקדם שלו בפיתוח. לפונקציה $F(\omega)$ נקרא **התמרת פוריה של** $f(x)$. לעיתים אף מסמנים $F(\omega)=\Im\left[f(x)\right]$ כאשר האופרטור $\Im$ מסמן **התמרת פוריה של**.

התמרת פוריה

התמרת פוריה של הפונקציה $f(x)$ המסומנת $F(\omega)=\Im\left[f(x)\right]$ מתאימה לכל תדר ממשי ω את המקדם המתאים של הפונקציה ההרמונית בעלת תדר זה. מכיוון שהמקדמים יכולים להיות מרוכבים, $F(\omega):R\rightarrow C$ (פונקציה מהשדה הממשי אל השדה המרוכב). במידה וניקח במקום המשתנה x משתנה זמן כמו t, נוכל לומר שהפונקציה $f(t)$ מתארת פונקציה (או אות כלשהו) בציר הזמן, ואילו הפונקציה $F(\omega)$ מתארת את אותו אות, אך בציר התדר. לאחר שראינו בפירוק לטורי פוריה שכל אות זמני (למשל הקלטת דיבור של אדם) ניתן לייצוג כסכום של פונקציות הרמוניות נפרדות (תדרים נפרדים), נראה את הגרף $F(\omega)$ כשרטוט העוצמות היחסיות של כל תדר ותדר בפירוק.

התמרת פוריה
$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$
התמרת פוריה הפוכה
$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}d\omega$

נצרף את הנוסחאות הבסיסיות לחישוב התמרת פוריה של פונקציה כלשהי. נעיר שבהתאם לקונבנציות, ניתן לפגוש נוסחאות דומות השונות בקבועים (בד"כ מכפלות או חלוקות ב- 2π):

באנלוגיה לטורי פוריה, בהינתן טור, ניתן לחשב מהי הפונקציה המקורית אשר פותחה לטור זה. הפונקציה היא פשוט פונקצית הגבול של הטור (יש לסכום את אברי הטור ולמצוא לאיזו פונקציה הם מתכנסים). בהתמרת פוריה ניתן לעשות פעולה זו באמצעות **התמרת פוריה הפוכה**, פעולה הדומה מאוד להתמרה רגילה (מבחינת חישוב). נשים לב שאם נחליף את האינטגרל בהתמרת פוריה ההפוכה בסימן של סכום, ובמקום ω נחזור לערכי n בדידים, נקבל חישוב שמזכיר מאוד את טור פוריה המרוכב.

ראוי להזכיר מספר תכונות יפות הנובעות מההגדרה המתמטית של התמרת פוריה. הראשונה, והרלוונטית ביותר לדיוננו היא **תכונת הליניאריות**. מכיוון שפעולת האינטגרל היא פעולה ליניארית (אינטגרל של סכום הוא סכום האינטגרלים, ואינטגרל של פונקציה מוכפלת בקבוע, הוא אינטגרל על הפונקציה המוכפל בקבוע), התמרה של סכום פונקציות היא סכום ההתמרות.

תכונות שימושיות נוספות נוגעות **להתמרה של נגזרת ואינטגרל** של פונקציה. ניתן להוכיח מתוך תכונות האקספוננט שאם במקום לבצע התמרה על $f(t)$ נבצע התמרה על $f'(t)$, נקבל את התוצאה $j\omega F(\omega)$ כאשר $F(\omega)$ היא התמרת פוריה של $f(t)$. תכונה זו מאפשרת לנו להפוך פעולת גזירה לפעולת כפל במקדם. משוואות דיפרנציאליות, באותה הרוח, יהפכו למשוואות אלגבריות אשר קלות יותר לפתרון. אחרי שנפתור את המשוואה האלגברית הפשוטה תוך עבודה עם ההתמרות (במקום עם הפונקציות המקוריות), נוכל לחזור חזרה למישור הזמן בעזרת התמרת פוריה הפוכה לפתרון.

התמרת פוריה של נגזרת
$\Im\left[f(t)\right]=F(\omega)$ $\Im\left[f'(t)\right]=j\omega F(\omega)$
התמרת פוריה של אינטגרל
$\Im\left[f(t)\right]=F(\omega)$ $\Im\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{j\omega}F(\omega)$

מסיבות אילו, במידה ולא נרצה לפתור משוואות דיפרנציאליות בעת פתרון מעגל בתורת המעגלים, ננסה לפתור את המעגל בעזרת שימוש בהתמרות פוריה של כל האותות המעורבים. ניתוח זה קרוי ניתוח במישור התדר, ונרחיב עליו את הדיבור בהמשך. דוגמא לניתוח בתחום התדר היא עבודה עם פאזורים במשטר סינוסי מתמיד. אכן, כאשר עובדים בעזרת פאזורים עם קבלים וסלילים, המשוואות הדיפרנציאליות המתארות את התנהגותם הופכות למשוואות אלגבריות, וניתן לטפל ברכיבים אילו בדיוק באותו אופן שבו מטפלים בנגדים פשוטים.

פונקציות מיוחדות והתמרותיהן

בעיסוק בהתמרות פוריה עולה צורך לדון במספר פונקציות מיוחדות, וההתמרות הרלוונטיות עבורן. נזכיר בפרק זה שתיים מבין הפונקציות החשובות: **פונקצית heavy-side** (פונקצית מדרגה), ו-**פונקצית ה-delta של דיראק** (פונקצית ההלם). פונקציות אילו משמשות ככלי חשוב לניתוח מערכות ליניאריות.

פונקצית heavy-side היא פונקצית מדרגה פשוטה. אם נסמנה $u_c(t)$ נאמר שערכה הוא 0 בערכים קטנים ממש מ-c, וערכה 1 בערכים גדולים או שווים c. פונקציה זו מאפשרת לתאר באופן עקרוני **אותות סיבתיים**. לדוגמא, מעגל טעינת קבל בעל מפסק. עד הזמן $t=c$ המפסק מנותק, ואילו ברגע $t=c$ המפסק נסגר והקבל מתחיל להיטען. הכפלה בפונקצית המדרגה, במקרה זה, תתאר כל פונקציה של אות אשר תלוי במפסק. העיסוק באותות סיבתיים מעניין מכיוון שפונקציות הבסיס שלנו (במערכת פוריה) הן פונקציות הרמוניות. כידוע, פונקציות הרמוניות אינן סיבתיות, וכוללות השתנות הרמונית כבר מ- $t\to-\infty$. משום כך מעניין כיצד ניתן לייצג אות סיבתי באמצעות סכום של אותות שאינם סיבתיים. מתורת פוריה נובע שהתמרת פונקציה חסומה בזמן (כמו האות הסיבתי שלנו) אינה חסומה בתדר. כלומר, כדי לתאר אות סיבתי, נצטרך להשתמש בכמות אינסופית ובלתי חסומה של תדרים.

ניתן לראות את פונקצית ה-delta בתור הנגזרת של פונקצית ה-heavy-side. נאלץ להגמיש מעט את הגדרת הפונקציות שלנו, מכיוון שברור שפונקצית ה-heavy-side אינה גזירה במובן הרגיל. כלומר, בכל נקודה שונה מ- c ערך הפונקציה יהיה 0 (פונקצית ה-heavy-side קבועה), אך בדיוק בנקודה c, ערך הפונקציה יהיה ∞ (פונקצית ה-heavy-side משנה את ערכה באופן מיידי). כל זאת באופן שהאינטגרל של הפונקציה ייתן את פונקצית ה-heavy-side, כלומר השטח הכלוא מתחת אותה נקודה בודדת בעלת גובה ∞ הוא בדיוק 1. בכלים מתמטיים סטנדרטים נוכל לתאר סדרה של פונקציות המתקרבות לפונקצית ה-delta. ניקח לשם כך סדרת פונקציות השוות 0 בכל נקודה, מלבד סביב הנקודה c. בנקודה זו, בקטע שאורכו $1/n$ ערך הפונקציה יהיה n. כלומר בידינו סדרה של מלבנים אשר הולכים והופכים צרים וגבוהים יותר (אך שטחם נשאר 1). בהקשר לעיסוקנו בתורת המעגלים, פונקצית ה-delta תייצג הלם. כלומר, אות שרק לרגע אחד קצר אינו 0.

התמרת פוריה של פונקצית heavy-side	**פונקצית** heavy-side
$\Im\left[u_c(t)\right]=\dfrac{e^{-j\omega c}}{j\omega}$	$u_c(t)=\begin{cases}1, & t\ge c\\ 0, & t<c\end{cases}$
התמרת פוריה של פונקצית delta	**פונקצית** delta
$\Im\left[\delta_c(t)\right]=e^{-j\omega c}$	$\delta_c(t)=u_c{}'(t)$

בנוגע לשתי הפונקציות, לעיתים נתון הסימון $u(t)$ או $\delta(t)$ ללא האות c. במקרה זה הכוונה שערך c הוא אפס (הצורה הקנונית של שתי הפונקציות). נשים לב גם שמתקיים $\delta_c(t)=\delta(t-c)$, צורת סימון שתשמש אותנו בהמשך. כאשר נביט בהתמרת פוריה של $\delta(t)$ נראה שערכה הוא 1 לכל ω (הרי $c=0$). לתוצאה זו משמעות רבה. כדי לתאר את אותו אות הלם במישור התדר, אנו נזקקים לכל התדרים הקיימים, ועוצמת כל התדרים שווה 1. כלומר הזנה למערכת ליניארית קלט הלם, תגרום לפעולת המערכת על כל $\omega\in R$. תכונה זו גם תשמש אותנו בהמשך לחקר מערכות ליניאריות. כשם שאמרנו קודם, התמרה של פונקציה חסומה בזמן אינה חסומה בתדר, ואכן, פונקצית ה-delta היא דוגמא טובה לעקרון זה.

הקונבולוציה

קונבולוציה הנה פעולה המוגדרת על שתי פונקציות, בדומה לפעולות מוכרות אחרות כמו חיבור או כפל. פעולה זו, בדומה לחיבור או כפל פונקציות, מקבלת שתי פונקציות ומחזירה פונקציה. נגדיר את פעולת הקונבולוציה על זוג הפונקציות $f(t)$ ו-$g(t)$ באופן הבא:

הגדרת קונבולוציה
$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
משפט הקונבולוציה
$\Im\left[f*g\right]=F(\omega)G(\omega)$

נדון מעט בהגדרת הקונבולוציה ותכונותיה הבסיסיות. מכיוון ש-τ הוא משתנה האינטגרציה, קל לראות שהקונבולוציה תלויה בפרמטר t. כלומר ראוי היה לסמן $(f*g)(t)$ הואיל ופעולה זו היא פונקציה של t. פעולת הקונבולוציה היא קומוטטיבית, כלומר מתקיים $f*g=g*f$. אחת הסיבות לחשיבות הקונבולוציה היא **משפט הקונבולוציה**. משפט זה טוען שהתמרת פוריה של קונבולוציה היא מכפלת ההתמרות של הפונקציות עליהן הפעלנו את הקונבולוציה.

מלבד ההגדרה המתמטית, ננסה להבין כיצד מתנהגת הפעולה באופן אינטואיטיבי. לשם כך, כדאי להביט על הפונקציה g כמעין חלון שניתן להזיז בתלות ב-t (פרמטר הקונבולוציה). כאשר נשנה את ערכי t ונחשב את ערך האינטגרל לכל ערך, השינוי יתבטא בהזזה של הפונקציה g (מכיוון שבתוך האינטגרל היא תלויה בערך $t-\tau$). ננסה להתייחס אל הפונקציה g כאל פונקצית משקל (כדאי לחשוב על פונקציה חסומה, כמו למשל פונקצית מלבן שערכה 1 בקטע $[-0.5,0.5]$ ומחוצה לו ערכה 0). אל הפונקציה f נתייחס כאל פונקצית המקור אותה אנחנו מנסים לשקלל. נניח למשל שאנו רוצים לבצע את השקלול על פונקצית המדרגה (heavy-side קנונית בעלת $c=0$). תוצאת הקונבולוציה תהיה גרף התלוי ב-t, מיקום החלון, כאשר ערך התוצאה בכל t יהיה הממוצע המשוקלל של f בעזרת פונקצית המשקל g המוזזת ב-t (כלומר האפס של g מוזז לנקודה t). הסבר זה הוא אינטואיטיבי בלבד, אינו קשור דווקא להתמרת פוריה ואינו בהכרח מסביר את משפט הקונבולוציה. מטרתו היא הבנה של צורת התנהגות אופרטור זה בלבד.

נחשב לדוגמא ידנית את הקונבולוציה בנקודה $t=-10$ עבור הפונקציות לעיל (מלבן ו-heavy-side). נזיז את הפונקציה g כחלון כך שנקודת האפס שלה תהיה ממוקמת בנק' -10. עכשיו נבצע את האינטגרל, כלומר נסכם לכל τ מ-$-\infty$ ועד ∞ את מכפלת f עם g. תוצאת הסכום תהיה הממוצע המשוקלל. מכיוון שפונקצית המשקל שלנו חסומה, יש טעם להכפיל רק בתחום $[-10.5,-9.5]$ בו ערכה הוא 1 (מחוץ לקטע זה g המוזזת שווה 0). מכיוון שבכל הקטע הנ"ל ערך f הוא 0 (פונקצית heavy-side קנונית), מובן שתוצאת האינטגרל תהיה 0. כלומר כאשר שקללנו ביחד את כל ערכי f בקטע $[-10.5,-9.5]$ כאשר לכל ערך משקל אחיד (g קבועה), קיבלנו 0 כצפוי. אם נבצע את אותה הפעולה עבור $t=10$, באותו אופן נקבל דווקא שהממוצע המשוקלל של f שם הוא 1, מכיוון ש-f קבועה בקטע $[9.5,10.5]$ וערכה שם 1. מקרה מעניין יותר הוא דווקא בתחום בו f אינה קבועה. ניקח למשל את הנקודה $t=0$. נציב את פונקצית המשקל g בנקודה אפס, ונשים לב שבחלון $[-0.5,0.5]$ f משתנה. בחצי השמאלי של החלון ערכה הוא 0 ובחצי הימני ערכה 1. נבצע ממוצע משוקלל על ערכים אילו (במשקל שווה לכל נקודה כי g קבועה כאמור) ונקבל את הערך 0.5 (כי חצי מהזמן 1 וחצי 0). בנקודה $t=-0.25$ למשל, כלומר עבור חלון g הממוקם ב-$[-0.75,0.25]$, ערך f הוא 1 רק רבע מהתחום, ולכן הממוצע המשוקלל יהיה דווקא 0.25. מניסיונות אילו ניתן להבין שגרף הקונבולוציה לסיכומו של עניין ייראה כך: 0 עד -0.5, משם יעלה ליניארית עד הערך 1 בנקודה 0.5, וישמור על הערך 1 משם הלאה. קל לדמיין פעולה זו במלואה ע"י הזזה דמיונית של g כחלון ומחשבה אילו ערכי f נצפים מבעד לאותו חלון.

באופן זה, ניתן להבין את התכונה הבאה של פונקצית ה-delta. לכל פונקציה f, מתקיים $(f*\delta)(t)=f(t)$. ואכן, אם נזיז את פונקצית המשקל δ לנקודה t, כל המשקל יהיה מרוכז בנקודה זו והממוצע המשוקלל ישלוף רק את ערך f בנקודה זו ויתעלם מכל השאר (לאור הגדרת פונקצית ה-delta).

חקר מערכת ליניארית

בידינו הכלים הבסיסיים על מנת לחקור מערכת ליניארית באופן יעיל. מערכת זו למשל יכולה להיות מעגל חשמלי ליניארי אותו אנו רוצים לנתח (אות יציאה כפונקציה של אות כניסה כלשהו). נסמן באופן פורמלי את הקשר הליניארי בין אות הכניסה לאות היציאה באופן הבא: $L\left[x(t)\right]=y(t)$, כאשר אות הכניסה יהיה $x(t)$, אות המוצא יהיה $y(t)$, והאופרטור הליניארי יהיה L.

ניתוח יעיל של המערכת יאפשר לנו לחזות את פלט המערכת עבור כל אות כניסה $x(t)$, תוך ביצוע מספר מינימלי של בדיקות בעזרת הזנת אותות דוגמא למערכת. מובן שנשאף שאותות הדוגמא יהיו גם פשוטים ככל האפשר, וזאת בעיקר משום שעבור כל אחד נצטרך לחשב ידנית את תגובת המעגל (או למדוד את תגובתו במידה וזהו ניסוי מעשי).

קלט מתאים למערכת יהיה למשל **פונקצית ההלם**, $\delta(t)$. ראינו בסעיפים קודמים שפונקציה זו כוללת בחובה את כל התדרים הקיימים, כלומר בפעולה זו, נבדוק את פעולת המערכת על כל תדר אפשרי. יתרון נוסף הוא שהזנת הלם היא יחסית פשוטה (במובן של יצירת האות). לאחר שבחרנו את הקלט המתאים, יש לבחור האם אנו רוצים לבצע את כל החישובים במישור הזמן (עבודה עם אותות התלויים בזמן) או עבודה במישור התדר (עבודה עם ההתמרות שלהם). בכל גישה בה נבחר, נדגים כיצד חישוב בגישה זו יכול להיראות, וכיצד ניתן לחזות את תגובת המעגל בעזרת הממצאים שנחשב, לכל אות אחר.

חשוב להדגיש ששתי הגישות שקולות, ואינן מוסיפות מידע זו על זו. במידה ונבחר בגישה האחת, נוכל להסיק בקלות את כל המידע שהיינו מסיקים מהגישה השנייה בעזרת התוצאות שקיבלנו. לדוגמא, אם בחרנו בניתוח במישור הזמן, נוכל לחזות את מוצא המערכת (במישור הזמן) עבור אות כניסה כלשהו. אם נראה לקבל את אות המוצא במישור התדר, נבצע עליו התמרת פוריה. בהתאם, אם בחרנו דווקא בניתוח במישור התדר, נוכל לחזות את אות המוצא דווקא במישור התדר. כדי לקבל את התחזית במישור הזמן, נוכל לבצע התמרת פוריה הפוכה.

בחירת הגישה המתאימה תתבצע לרוב מטעמי נוחות חישובית. בדיון בהתמרת פוריה ראינו מספר סיבות חישוביות שמצדיקות חישוב במישור התדר במידה ואיננו רוצים לפתור משוואות דיפרנציאליות במישור הזמן. מסיבה זו, כאשר במעגל הנתון אוסף גדול של רכיבים בעלי תלות דיפרנציאלית במתח או בזרם (כמו קבלים או סלילים), יהיה פשוט מאוד לבחור דווקא לעבוד עם התמרות פוריה. דוגמא לכך ניתן לראות במשטר סינוסי מתמיד, המפשט עבודה עם סלילים וקבלים לכדי משוואות אלגבריות (בדיוק כמו עבודה עם נגדים).

במישור הזמן, כל העבודה עם המערכת תתבצע באמצעות האותות הזמניים (תלויים בפרמטר t). ניתוח זה מזכיר את הניתוח שנלמד בקורסים תיכוניים או בפיסיקה 2 מ'. האותות הזמניים הם האותות הממשיים הפיסיקליים שאנו מקליטים בעת עבודה מעשית עם המעגל.

כאמור לעיל, נרצה להזין למעגל את קלט ההלם, כלומר נזין את האות $\delta(t)$ למערכת ונחשב את אות היציאה. נסמן את תוצאת החישוב בתור $h(t)=L\left[\delta(t)\right]$. דוגמא לתהליך זה יכולה להיות ביצוע ניסוי אמיתי בו נזין הלם למעגל ונקליט את תגובתו (למשל סגירה של מפסק לזמן קצר מאוד). כעת, נניח שברצוננו לחזות את תגובת המערכת לקלט כלשהו נתון, $x(t)$ (מבלי להזינו פיסית למעגל כמובן). ראשית נשתמש בזהות עבור פונקצית ה-delta:

$$(1) \quad (x*\delta)(t)=x(t) \;\Rightarrow x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

וכעת נציב שוויון זה בתוך האופרטור הליניארי L ונסתמך על תכונת ליניאריות:

$$(2) \quad L\left[x(t)\right]=L\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)L\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x*h$$

כלומר, כל אשר יש לבצע כדי לחזור את הפלט עבור $x(t)$ הוא לחשב את הקונבולוציה $x*h$. ובכך השגנו את מבוקשנו, בידינו כלי כללי המאפשר לחשב תגובה לכל קלט באמצעות חישוב חד פעמי של $h(t)$.

במישור התדר, במקום לעבוד עם אותות זמניים, נעבוד עם התמרות פוריה של כל האותות המעורבים. כדי להזין את ההלם $\delta(t)$, ניזכר בכך שהתמרת פוריה של $\delta(t)$ היא הפונקציה הקבועה 1 לכל תדר ω. כלומר עלינו להזין למערכת כל אחד מהתדרים בצורתם ההרמונית e^{jwt}. במידה ואנו מחשבים ידנית את התגובה לאות הרמוני מסוים, נשמור את ω כפרמטר (כלומר התוצאה תהה תלויה ב-ω) ובכך נחשב את התגובה בעצם לכל ω (צורת העבודה במשטר סינוסי מתמיד). מבחינת התגובה, במקום למדוד את $h(t)$ נמדוד הפעם את $H(\omega)$ שהיא התמרת פוריה של התגובה להלם. נשים לב שלפי הגדרת התמרת פוריה עבור $H(\omega)$ מתקיים:

$$(3) \quad H(\omega) \overset{\Im}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

נוכיח שהזנת הקלט e^{jwt} למערכת, תחזיר אכן את $H(\omega)$ כמצופה:

$$(4) \quad L\left[e^{j\omega t}\right]\overset{(2)}{=}e^{j\omega t}*h=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau=e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\overset{(3)}{=}e^{j\omega t}H(\omega)$$

נשים לב שהתגובה $e^{j\omega t}H(\omega)$ מורכבת גם היא על אותו תדר כמו התדר שהזנו. הערך $H(\omega)$ בשפת תורת המעגלים הוא פאזור התוצאה, ומכיוון שנמדד ביחס לאות כניסה בעל פאזור השווה 1, זוהי גם **פונקצית התמסורת**.

כעת, ננסה לחזות את תגובת המערכת לקלט נתון $x(t)$, אשר נסמן בתור $y(t)=L\left[x(t)\right]$. מכיוון שאנו עובדים עם התמרות פוריה, ננסה לחשב את $Y(\omega)$ בהסתמך על $X(\omega)$ (התמרת פוריה של $x(t)$) ועל $H(\omega)$ שמדדנו חד-פעמית. בעזרת (2) ומשפט הקונבולוציה נסיק כי מתקיים:

$$(5) \quad y(t)=x*h \quad \Rightarrow \quad Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

כלומר כל שיש לעשות כדי לחשב את התמרת פוריה של הפלט הוא להכפיל את פונקצית התמסורת בהתמרת פוריה של הקלט. כדי לחזור ל-$y(t)$, נוכל כאמור לבצע התמרת פוריה הפוכה.