

תורת המעגלים החשמליים

044105

תרגיל מחשב 1

מגישים:

040517708	אבי בנדל
060634078	תומר גפנר
036275287	יונתן מלכימן

חלק 2 – מצב מתמידסעיף ב – תרגיל הכנה – להגשה חלקית

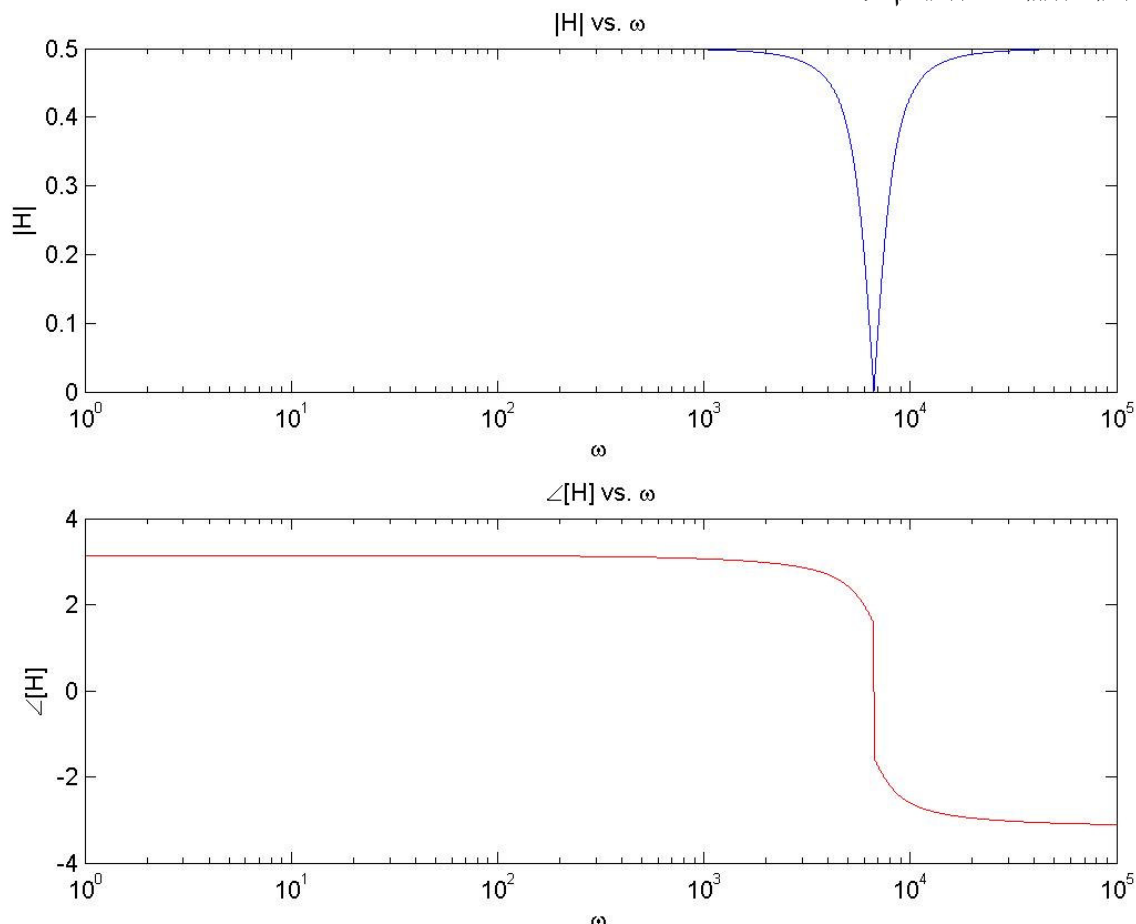
1. פתרון אנליטי:

$$H(\omega) = \frac{V_{rs}}{V_s} = \frac{I \cdot Z_{rs}}{I \cdot Z_{in}} = \frac{R_s}{R_s + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2}}$$

$$|H(\omega)| = \left| \frac{R_s}{R_s + R_2 + \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2}} \right| = \frac{R_s}{\sqrt{(R_s + R_2)^2 + \left(\frac{\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2} \right)^2}}$$

$$\arg(H(\omega)) = -\frac{\omega L_2}{(1 - \omega^2 L_2 C_2)(R_s + R_2)}$$

2. פתרון נומרי והגרפים המתקבלים:



4. מהגרף אנו למדים שפונקציית התמסורת הזו יכולה להנחית/ "להעלים" תחום צר של תדרים סביב תדר התהודה. את תדר התהודה מצאנו בעזרת Matlab וקיבלנו $\omega_0 = 7648 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$. ההגדרה שבה השתמשנו היא ערכי מקסימום ומינימום עבור גודל פונקציית התמסורת.
- תאור התנהגות המעגל עבור DC, יתקבל מהניתוח במצב הגבולי:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg(H) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} H(\omega) = \frac{R_s}{R_s + R_2} = \frac{1}{2}$$

- תאור התנהגות המעגל עבור תדרים גבוהים מאוד יתקבל מהניתוח במצב הגבולי :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = \frac{R_s}{R_s + R_2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} H(\omega) = \frac{R_s}{R_s + R_2}$$

אנו רואים שהגרף שקיבלנו תואם לניתוחים האלו.

סעיף ג

1. נחשב את $H(\omega) = \frac{V_{zs}}{V_s}$ עבור המעגל .

נגדיר את הגדלים הבאים :

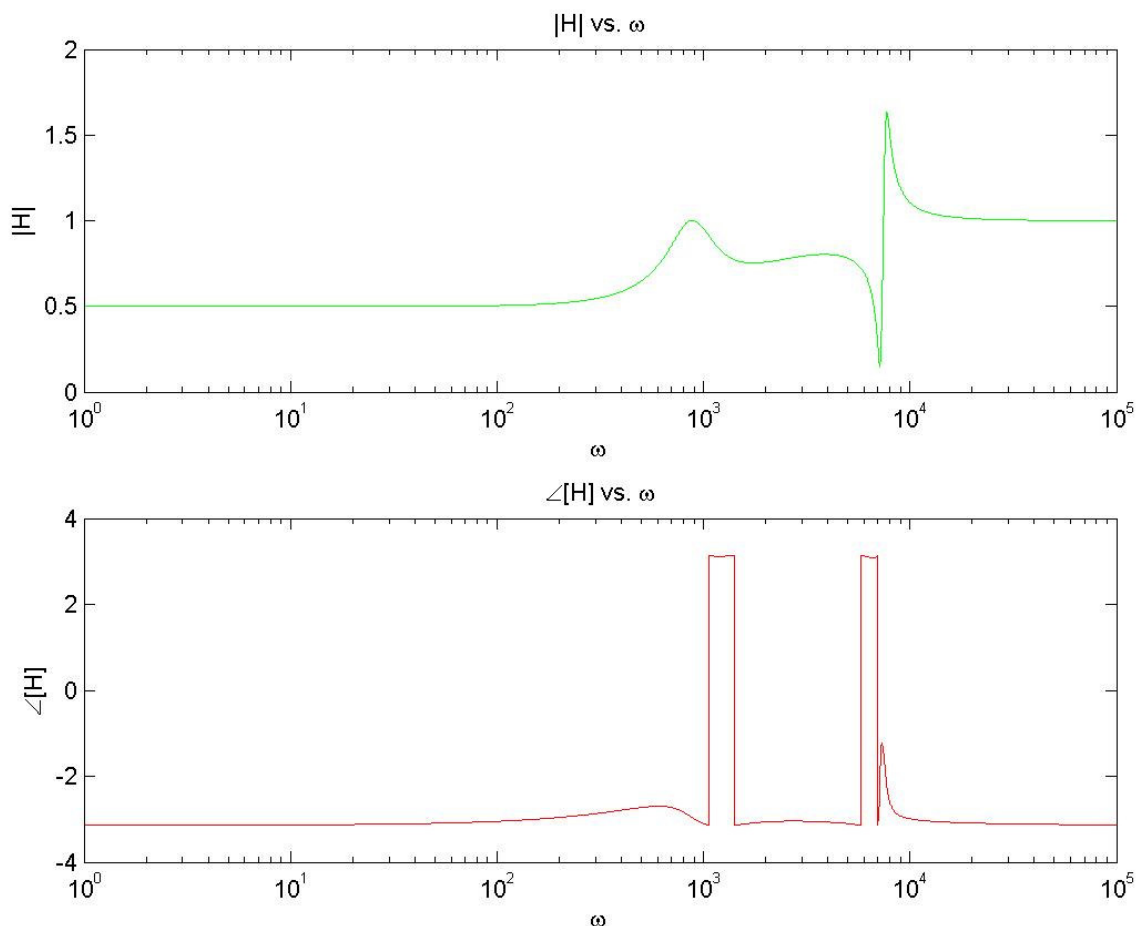
$$Z_1 = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + R_1$$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}} = R_2 + \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 C_2 L_2}$$

$$Z_s = R_s + j\omega L_s$$

ונחשב את פונקציית התמסורת :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{Z_s}{\frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} + Z_s} = \frac{R_s + j\omega L_s}{\frac{1}{\frac{1}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 C_2 L_2}}} + R_s + j\omega L_s} \\ &= \frac{R_s + j\omega L_s}{\frac{1}{\frac{j\omega C_1}{-\omega^2 C_1 L_1 + 1 + j\omega C_1 R_1} + \frac{1 - \omega^2 C_2 L_2}{R_2(1 - \omega^2 C_2 L_2) + j\omega L_2}} + R_s + j\omega L_s} \end{aligned}$$



- עבור תדרים גבוהים מאוד נצפה ל-

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(\omega)| = 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg(H(\omega)) = 0 \end{cases}$$

- עבור תדרים נמוכים מאוד נקבל מעגל DC, עם $V_s = 1[V]$, ולכן $V_{zs} = \frac{V_s}{R_s + R_2} R_s$, כלומר

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(\omega) = \frac{V_{zs}}{V_s} = \frac{\frac{V_s}{R_s + R_2} R_s}{V_s} = \frac{R_s}{R_s + R_2} = \frac{1}{2}$$

- על סמך הגרפים אנו מזהים את תדרי התהודה הבאים :

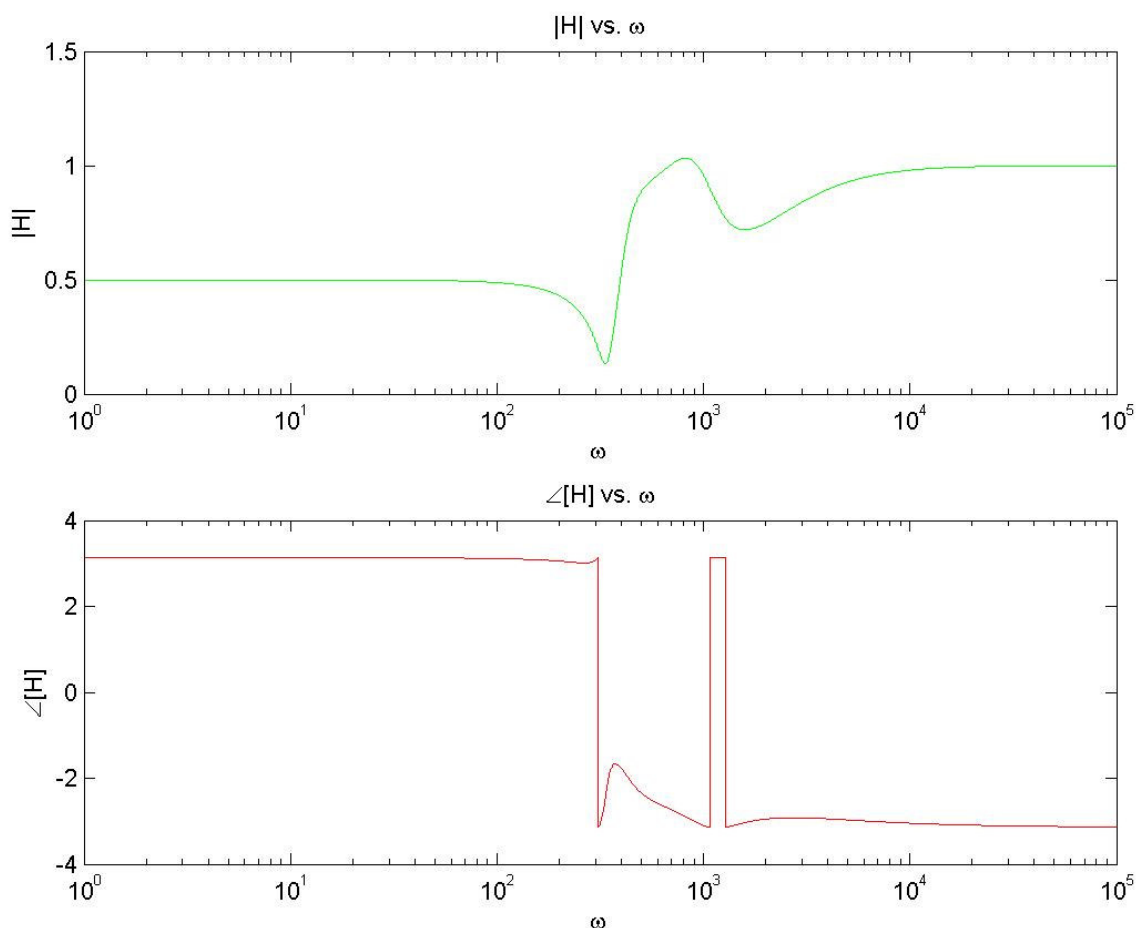
$$\omega_{0,1} \sim 891.25 [Hz]$$

$$\omega_{0,2} \sim 7138.38 [Hz]$$

$$\omega_{0,3} \sim 7725.02 [Hz]$$

ההגדרה שבה השתמשנו היא ערכי מקסימום ומינימום עבור גודל פונקציית התמסורת. אנו רואים את ההשפעה של המעגל שהוספנו בהשוואה לסעיף הקודם – תוספת של תדר תהודה $\omega_{0,1}$ בתדרים נמוכים יותר.

3. להלן הגרפים שקיבלנו עבור הערכים החדשים של הרכיבים :



עבור תדרים גבוהים מאוד ונמוכים מאוד נצפה להתנהגות זוהה להתנהגות הפונקציה מהסעיף הקודם :

- על סמך הגרפים אנו מזהים את תדרי התהודה הבאים :

$$\omega_{1,1} \sim 334.96 [Hz]$$

$$\omega_{1,2} \sim 831.76 [Hz]$$

$$\omega_{1,3} \sim 1548.81 [Hz]$$

ההגדרה שבה השתמשנו היא ערכי מקסימום ומינימום עבור גודל פונקציית התמסורת.

ערכי R_1, C_1, L_1 לא השתנו בסעיף זה, ולכן קיבלנו תדר תהודה דומה לזה שבסעיף הקודם - $\omega_{0,2}$.

שינוי הערכים של שאר הרכיבים שינה את תדרי התהודה של החלק הימני של המעגל.

בנוסף, שינוי הערך של R_2 שינה בעקיפין ($R_s = R_2$) את פונקציית התמסורת, מה שמסביר את התזוזה בתדר של

$$\omega_{0,1} \sim 891.25 [Hz] \quad \omega_{1,2} \sim 831.76 [Hz] \quad \text{לעומת תדר התהודה של החלק השמאלי של המעגל בסעיף הקודם -}$$

4. בכדי לחשב את האנרגיה החשמלית הממוצעת ואת האנרגיה המגנטית הממוצעת נשתמש בביטויים הבאים :

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}} = R_2 + \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 C_2 L_2}, \quad Z_1 = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + R_1, \quad Z_s = R_s + j\omega L_s$$

מתקיים לכן :

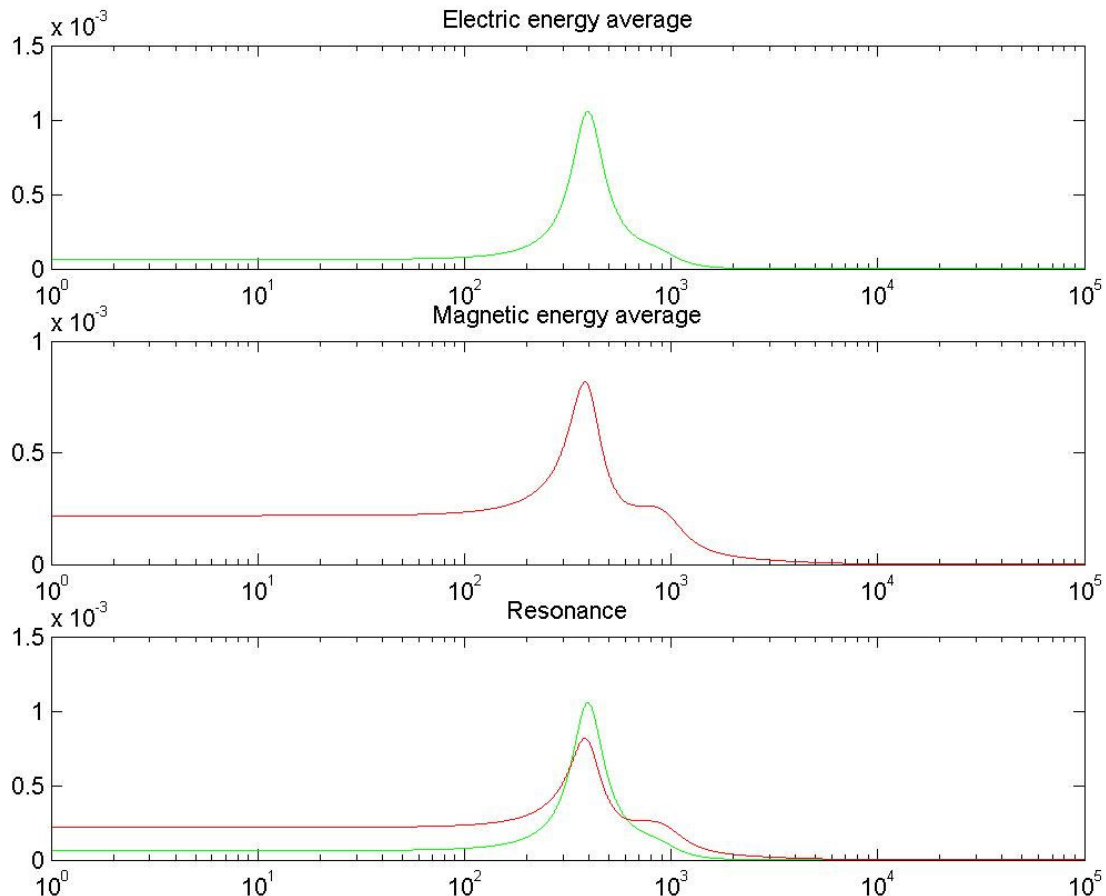
$$I_s = \frac{V_s}{Z_s + \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)}, \quad V_{AB} = V_s - I_s Z_s, \quad V_{C_1} = \frac{V_{AB}}{Z_1} \cdot \frac{1}{j\omega C_1}, \quad I_{L_1} = \frac{V_{AB}}{Z_1}$$

$$V_{L_2} = V_{C_2} = V_{AB} - \frac{V_{AB}}{Z_2} R_2 \Rightarrow I_{L_2} = \frac{V_{L_2}}{j\omega L_2}$$

$$\langle W_E \rangle = \frac{1}{4} C_1 |V_{C_1}|^2 + \frac{1}{4} C_2 |V_{C_2}|^2$$

$$\langle W_M \rangle = \frac{1}{4} L_1 |I_{L_1}|^2 + \frac{1}{4} L_2 |I_{L_2}|^2$$

והגרפים שקיבלנו הם :



תדרי התהודה שמתקבלים עבור ההגדרה שמתיחסת לשיוויון בין האנרגיה הממוצעת החשמלית לבין האנרגיה הממוצעת המגנטית הם :

$$\omega_{2,1} \sim 325.296 [Hz]$$

$$\omega_{2,2} \sim 609.166 [Hz]$$

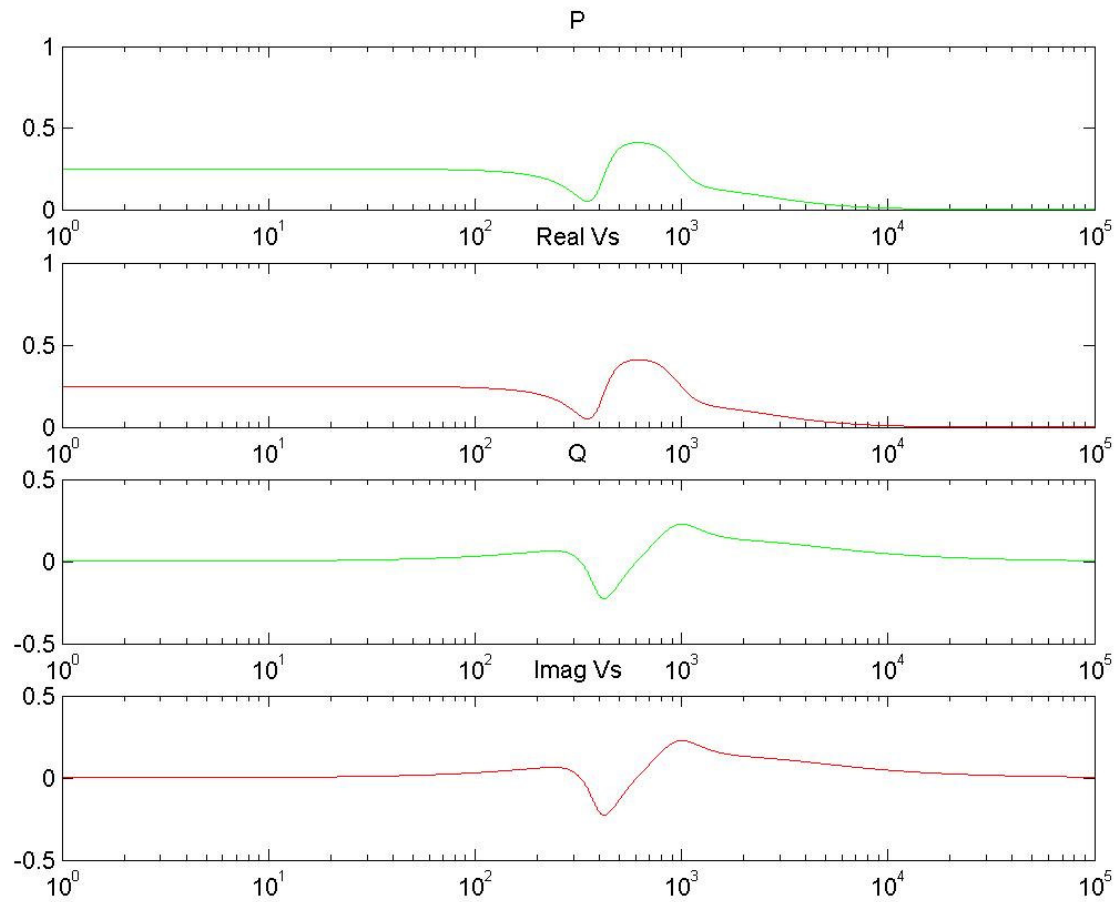
אנו רואים דמיון בין התדרים $\omega_{2,1}$ לתדר $\omega_{1,1}$ שקיבלנו בסעיף הקודם, כלומר יש חפיפה בין ההגדרות של תדר התהודה, בתדר זה.

5. נחשב את ההספק הממשי והמדומה במעגל :

$$S_{V_s} = \frac{1}{2} \tilde{V}_s \tilde{I}_s^* \Rightarrow P = \frac{1}{2} |\tilde{I}_s|^2 \operatorname{Re}(Z_{eff}), \quad Q = \frac{1}{2} |\tilde{I}_s|^2 \operatorname{Im}(Z_{eff})$$

ונרצה להראות שמתקיים :

$$\operatorname{Re}(S_{V_s}) = P, \quad \operatorname{Im}(S_{V_s}) = Q$$



ואכן, על פי הגרף אנו רואים שמתקיים חוק שימור האנרגיה.

חלק 3 - תופעות מעבר

1. נמצא את המשוואה הדיפרנציאלית עבור מתח הקבל ומזרם הסליל :

$$\begin{cases} V_C + V_{R_1} + V_{L_1} = V_S & (KVL) \\ V_{L_2} + V_{R_2} + V_{R_1} + V_{L_1} = V_S & (KVL) \\ I_{L_2} = I_S - \dot{V}_C C & (KCL) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_C + R_1 I_{L_1} + L_1 \dot{I}_{L_1} = V_S \\ L_2 \dot{I}_{L_2} + R_2 I_{L_2} + R_1 I_{L_1} + L_1 \dot{I}_{L_1} = V_S \\ I_{L_1} - I_{L_2} - \dot{V}_C C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_C + R_1 I_{L_1} + L_1 \dot{I}_{L_1} = V_S \\ L_2 \dot{I}_{L_2} + R_2 I_{L_2} + R_1 I_{L_1} + L_1 \dot{I}_{L_1} = V_S \\ I_{L_1} - I_{L_2} - \dot{V}_C C = 0 \end{cases}$$

1. נמצא את תגובת המעגל לכניסת מדרגה ($V_S = u(t)$) :

$$\begin{cases} V_C + R_1 I_{L_1} + L_1 \dot{I}_{L_1} = V_S \\ L_2 \dot{I}_{L_2} + R_2 I_{L_2} + R_1 I_{L_1} + L_1 \dot{I}_{L_1} = V_S \\ I_{L_1} = I_{L_2} + \dot{V}_C C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_{L_1} = \frac{V_S - V_C - R_1 I_{L_1}}{L_1} \\ \dot{I}_{L_2} = \frac{V_C - R_2 I_{L_2}}{L_2} \\ \dot{V}_C = \frac{I_{L_1} - I_{L_2}}{C} \end{cases}$$

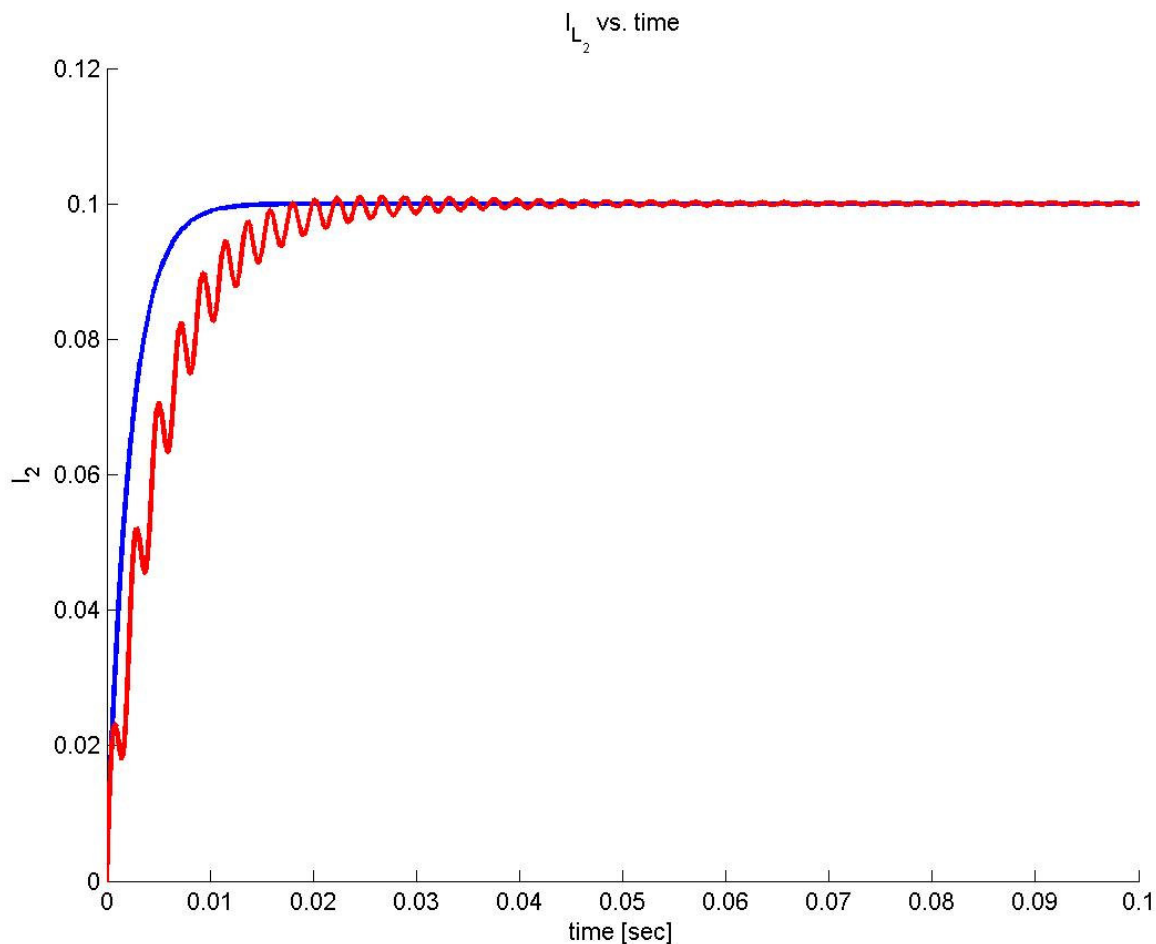
כאשר נגדיר:

$$y(1) \triangleq I_{L_1}, \quad y(2) \triangleq I_{L_2}, \quad y(3) \triangleq V_C$$

נקבל :

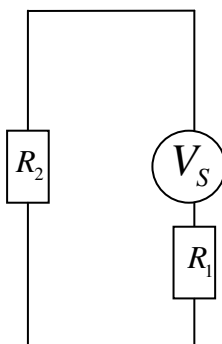
$$\begin{cases} \dot{y}(1) = \frac{V_S - y(3) - R_1 y(1)}{L_1} \\ \dot{y}(2) = \frac{y(3) - R_2 y(2)}{L_2} \\ \dot{y}(3) = \frac{y(1) - y(2)}{C} \end{cases}$$

הגרף המתקבל הוא :



הגרף האדום הוא עבור $L_2 = 30[mH]$ ומצב של ריסון חסר, והגרף הכחול הוא עבור $L_2 = 3[mH]$ ומצב של ריסון יתר.

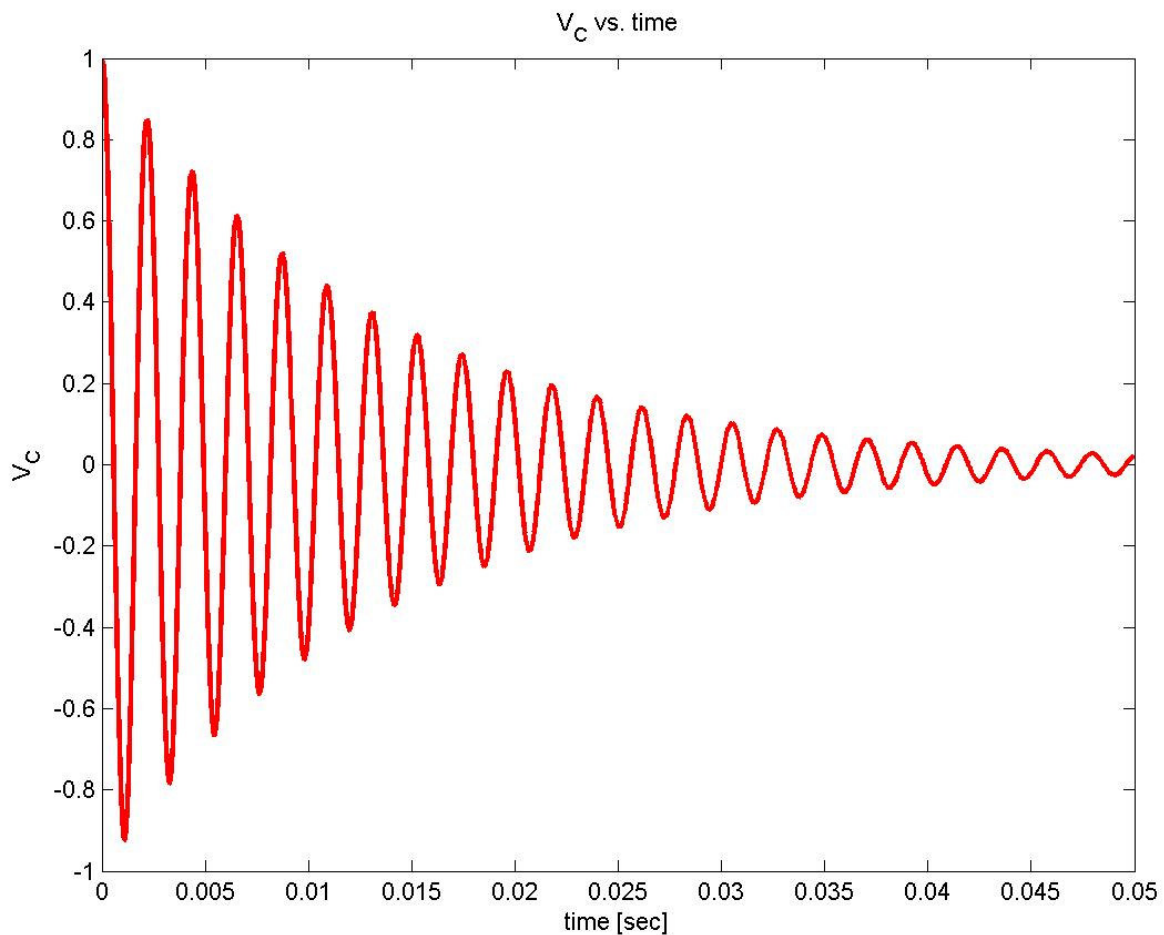
2.2) נמצא את הזרם במצב מתמיד. במצב זה הקבל יהיה לנתק והסלילים יהיו קצר :



כלומר הזרם בסליל L_2 הוא

$$I_{L_2} = \frac{V_s}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1+9} = 0.1[A]$$

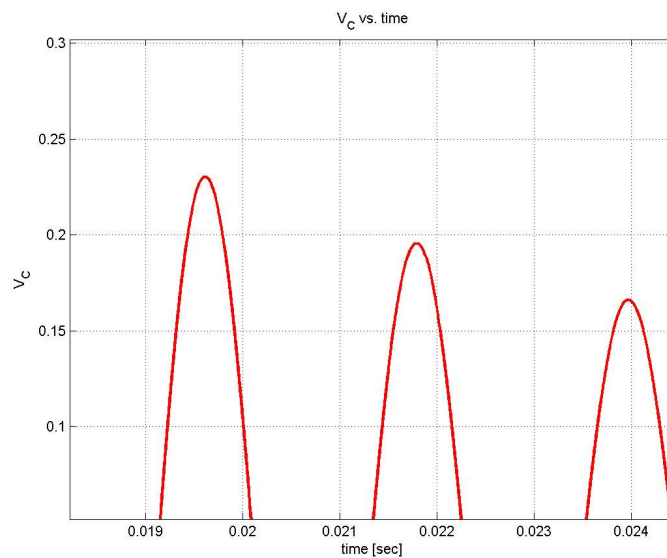
וזו תוצאה דומה לזו שמקבלים בגרף, בזמנים גדולים.



נחשב את תדר התהודה מהקשר $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, כאשר את T ניתן לחשב מהגרף. מקבלים

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{(0.0458 - 0.0436)} = 2855.99 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

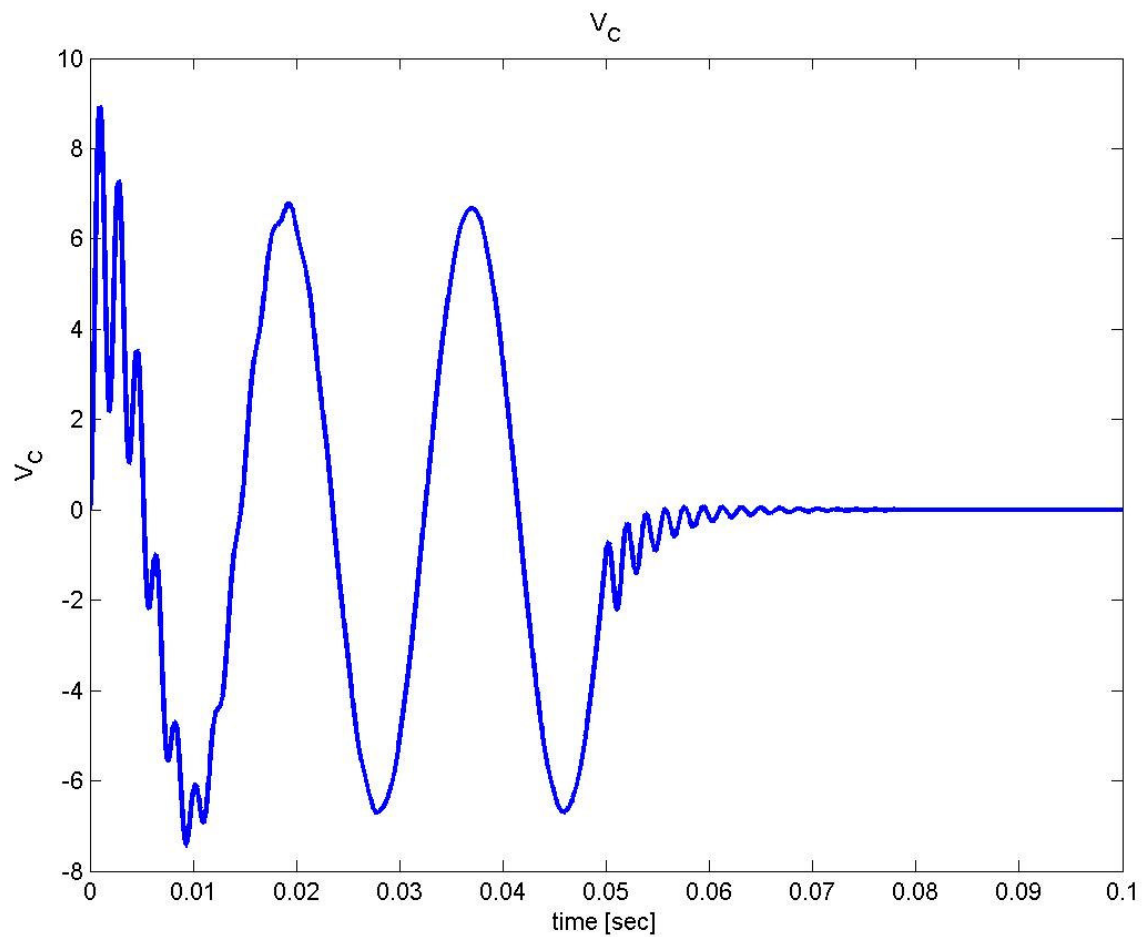
כאשר נעזרנו בתקריב :



תדר תהודה זה נובע מההגדרה של איפוס דטרמיננטת מטריצת המעגל, מכיוון שמשוואת המעגל היא

$$\underline{\underline{Z}} \vec{I} = \vec{V}$$

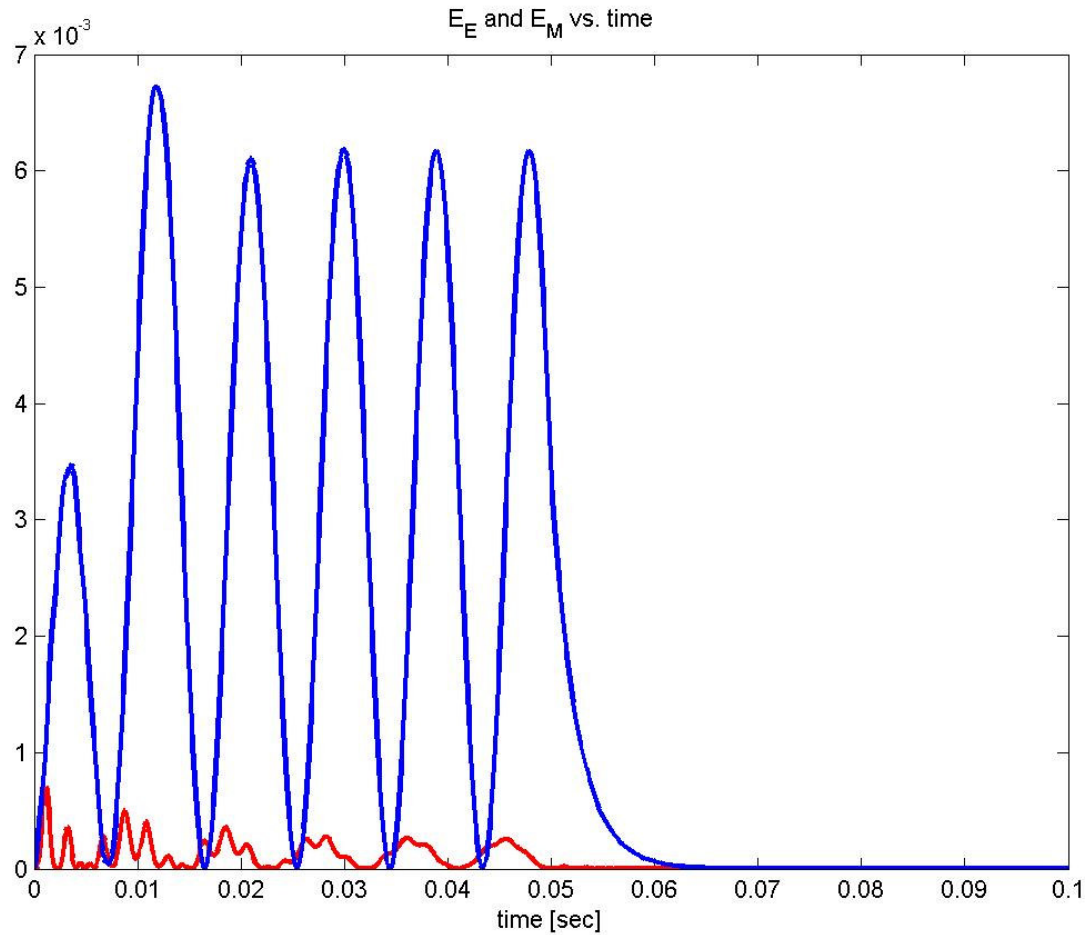
ואנו במצב שבו $\vec{V} = \vec{0}$, ולכן חייב להתקיים $|\underline{\underline{Z}}| = 0$ ומדרישה זו מקבלים את תדר התהודה. ולפי הגדרה זו, קיבלנו תדר תהודה יחיד.



נבחין בשלוש תחומים :

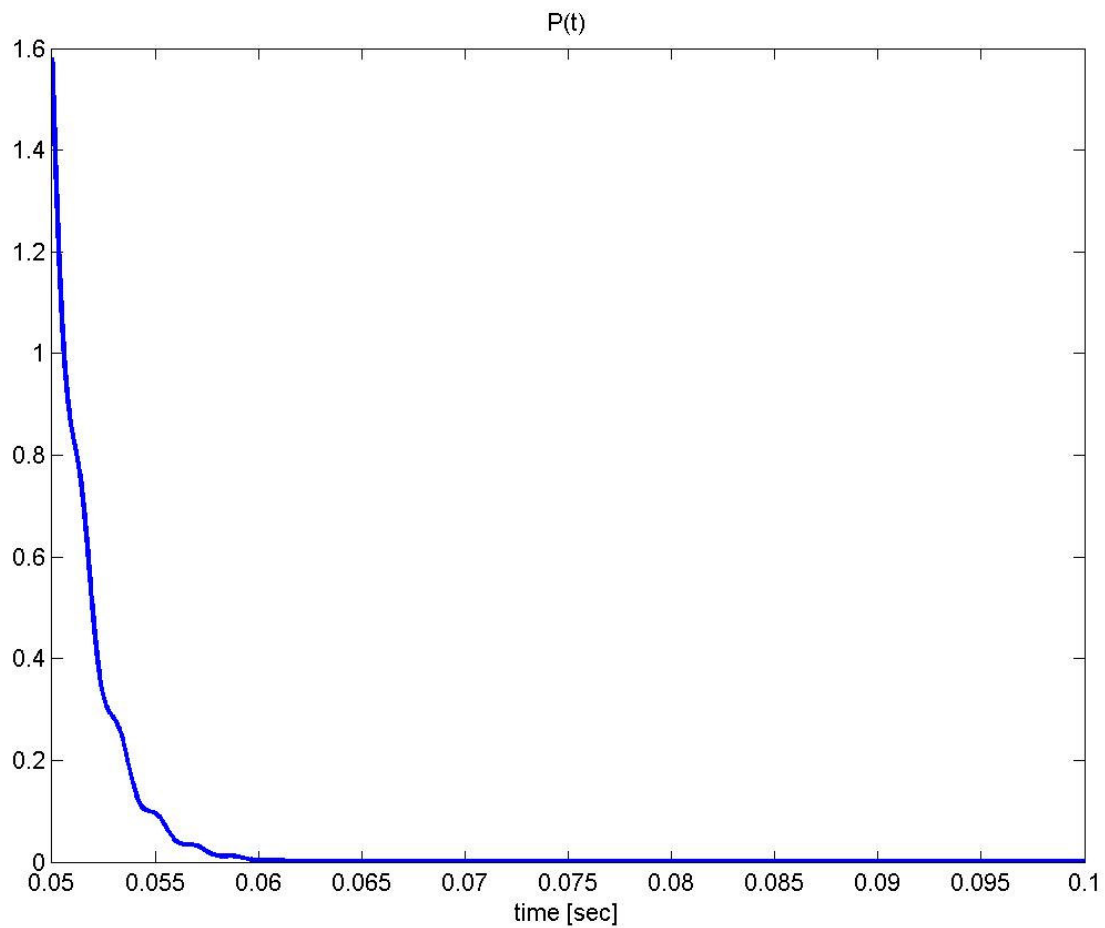
1. תופעת מעבר עד התייצבות על אות סינוסואידלי.
2. מצב מתמיד בו המתח על הקבל מתנהג באופן סינוסואידלי.
3. תופעת מעבר מהמצב המתמיד הסינוסואידלי למתח 0.

4.2 גרף האנרגיה המגנטית (כחול) והחשמלית (אדום) כפונקציה של הזמן

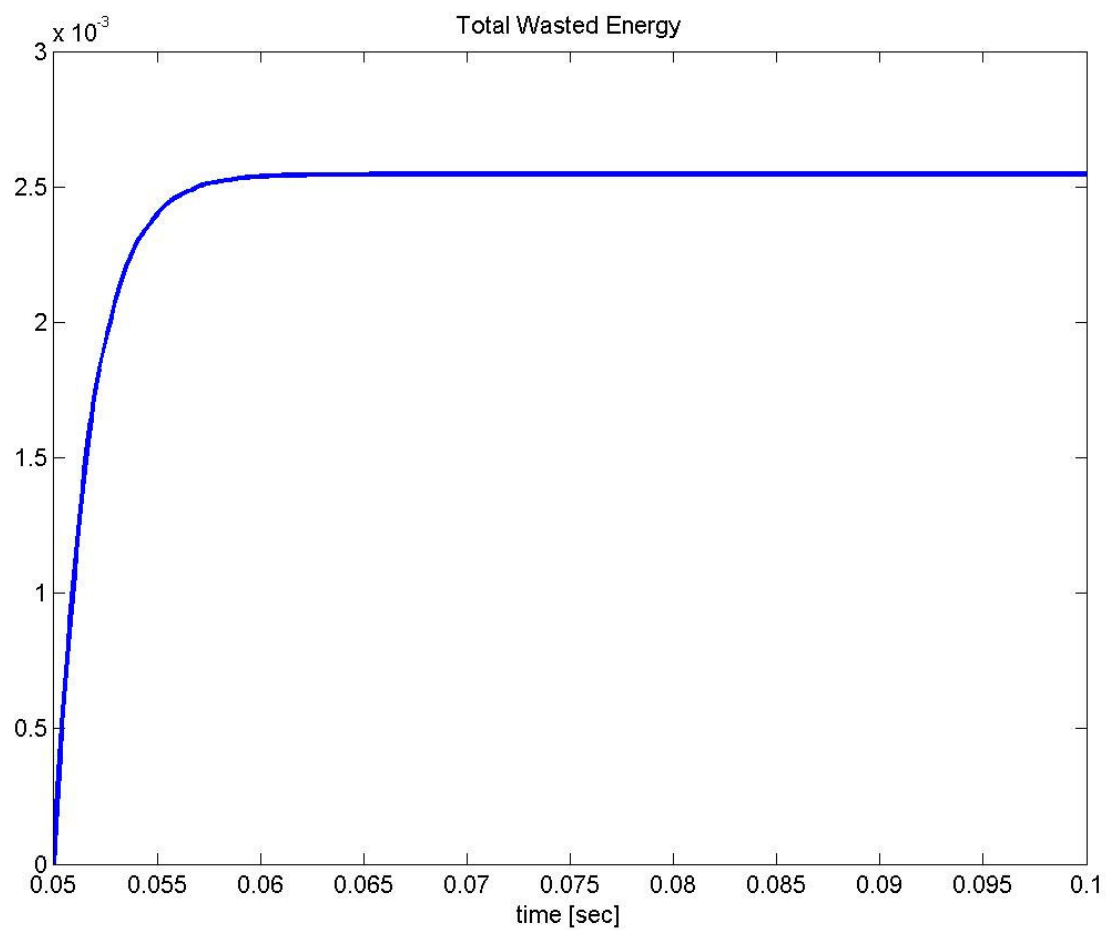


האנרגיה הכוללת ברגע $t_0 = 0.05$ [sec] היא: ~ 2.6 [mJ]

גם כאן אנו רואים את תופעות מעבר עד התייצבות סינusoידלית ואז תופעות מעבר נוספת, בזמן t_0 עד בזבוז כל האנרגיה שנאגרה.



ברגע המדובר, $t_0 = 0.05$ [sec], האנרגיה במערכת רק מתבזבזת מכיוון שמקור המתח אופס. כצפוי, הזרם והמתח על הנגדים ידעכו כי כל האנרגיה שהיתה אגורה במעגל מתבזבזת עליהם.



אנו רואים שלאחר הסיכום (אינטגרציה) של ההספק בזמן, נקבל אנרגיה כוללת מתזבזבת של $\sim 0.026 [J]$.

זו בהתאמה לסעיף 4.2, שבו ראינו שהאנרגיה האגורה במעגל היתה $\sim 0.026 [J]$.