שיטת תומס למטריצות תלת אלכסוניות

עבור השורה הראשונה: $b_1' = b_1 / d_1 \qquad c_1' = c_1 / d_1$

עבור שורה i : $b_i' = \dfrac{b_i - a_i b_{i-1}'}{d_i - a_i c_{i-1}'} \qquad c_i' = \dfrac{c_i}{d_i - a_i c_{i-1}'}$

עבור שורה n : $b_n' = \dfrac{b_n - a_n b_{n-1}'}{d_n - a_n c_{n-1}'}$

שלב החילוץ לאחור:

$$x_n = b_n'$$
$$x_i = b_i' - c_i' x_{i+1} \qquad i = (n-1),\ldots,1$$

פירוק LU

$Ax = b$

$A = LU$

$Ly = b$

$Ux = y$

שיטת קרוט

For k=1 to n

$u_{kk} = 1$

For i = k to n

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk}$$

End

For j = k+1 to n

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj}}{l_{kk}}$$

End

End

שיטת דוליטל

For k=1 to n

$l_{kk} = 1$

For j = k to n

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj}$$

End

For i = k+1 to n

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk}}{u_{kk}}$$

End

End

נורמות של מטריצות:

נורמה של מטריצה מקיימת

$\|\mathbf{A}\| \ge 0 \quad ; \quad \|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$

$\|k\mathbf{A}\| = |k|\|\mathbf{A}\|$

$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$

$\|\mathbf{AB}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} \qquad , \quad \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^T\mathbf{A}) = 0$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

נורמות של וקטורים:

נורמה של וקטור מקיימת:

$\|\mathbf{x}\| \ge 0 \quad ; \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\|k\mathbf{x}\| = |k|\|\mathbf{x}\|$

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_i|) \qquad 1 \le i \le n$$

חסמי שגיאות:

$$cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$$
$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$$
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{A}$$
$$\frac{1}{cond(\mathbf{A})}\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \le \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le cond(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$
$$\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} \le cond(\mathbf{A})\frac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

רדיוס ספקטרלי

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda_i|, \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0\}$$
$$\rho(\mathbf{A}) \le \|\mathbf{A}\|$$

שיטות איטרטיביות

כתיב מטריציוני של שיטות איטרטיביות

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{Gx}^{(i)} + \mathbf{C}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C_L} - \mathbf{C_U}$$

שיטת יעקבי

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$
$$\mathbf{G} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{C_L} + \mathbf{C_U})$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

שיטת גאוס-זיידל

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right)$$
$$m = \begin{cases} k+1 & j < i \\ k & j \ge i \end{cases}$$
$$\mathbf{G} = (\mathbf{D} - \mathbf{C_L})^{-1}\mathbf{C_U}$$
$$\mathbf{C} = (\mathbf{D} - \mathbf{C_L})^{-1}\mathbf{b}$$

שיטת SOR

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right)$$
$$m = \begin{cases} k+1 & j < i \\ k & j \ge i \end{cases}$$
$$\mathbf{G} = (\mathbf{D} - \omega\mathbf{C_L})^{-1}[\omega\mathbf{C_U} + (1-\omega)\mathbf{D}]$$
$$\mathbf{C} = \omega(\mathbf{D} - \omega\mathbf{C_L})^{-1}\mathbf{b}$$

התכנסות שיטות איטרטיביות

תנאי הכרחי ומספיק: $\rho(G) < 1$.

תנאי מספיק להתכנסות:

$$\|G\| < 1$$

קצב התכנסות:

$$\frac{\|\mathbf{e}^{(i)}\|}{\|\mathbf{e}^{(i+1)}\|} = \frac{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}\|} \approx \frac{1}{\rho(\mathbf{G})}$$

מערכות משוואות לא לינאריות

שיטת ניוטון רפסון למשוואה בודדת:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n \ge 0$$

שיטת ניוטון רפסון למערכת משוואות:

$$\mathbf{J}^{(k)}\mathbf{h}^{(k)} = -\mathbf{F}^{(k)}$$
$$\mathbf{h}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$$
$$\mathbf{J}^{(k)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^{(k)} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,n \\ j = 1,2,\dots,n \end{array}$$

פולינום האינטרפולציה לפי לגרנז'

$$f(x) = L_n(x) + E_n(x)$$

$$\boldsymbol{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)}$$

$$\boldsymbol{l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

השגיאה התיאורטית

$$E_n(x) = \prod_{j=0}^{n} \left(x - x_j\right) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad \xi \in (x_0, x_n)$$

אינטגרציה לפי שיטת ניוטון-קוטס:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f_i + E; \qquad A_i = \int_a^b L_i(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = Ah\sum_{i=0}^{n} w_i f_i + Bh^{k+1} f^{(k)}(\xi); \quad a<\xi<b$$

עבור n זוגי $k=n+2$

עבור n אי זוגי $k=n+1$

	n	A	w_0	w_1	w_2	w_3	B
טרפז	1	1/2	1	1			$-\frac{1}{12}$
סימפסון 1/3	2	1/3	1	4	1		$-\frac{1}{90}$
סימפסון 3/8	3	3/8	1	3	3	1	$-\frac{3}{80}$

אקסטרפולציה של ריצרדסון

$$I \approx \frac{h_1^r I_2 - h_2^r I_1}{h_1^r - h_2^r}$$

r –סדר השגיאה

שיטת הטרפז המוכללת

$$h = \frac{b-a}{m}; \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f_a + f_b + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_i\right) - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi); \quad a<\xi<b$$

שיטת סימפסון 1/3 המוכללת

$$h = \frac{b-a}{2m}; \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_a + f_b + 4\sum_{i=0}^{m-1} f_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i}\right) - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi); \quad a<\xi<b$$

אינטגרציה לפי גאוס-לג'נדר

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + E$$

$$E = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi); \quad -1<\xi<1$$

$$A_k = \frac{2(1-x_k{}^2)}{n^2\left[P_{n-1}(x_k)\right]^2}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n (n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]; \quad P_0(x) = 1$$

עבור $n=2$: $A_1 = A_2 = 1 \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

עבור $n=3$: $A_2 = \frac{8}{9} \quad A_1 = A_3 = \frac{5}{9} \quad x_2 = 0 \quad x_{1,3} = \pm\frac{\sqrt{15}}{5}$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + (b+a)}{2}\right)dt$$

מיש' דיפ' רגילות – שיטות אויילר ו-RK

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

שיטת אויילר

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2)$$

שיטת RK-2 (אויילר המתוקנת modified)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}k_0 + \frac{1}{2}k_1 + O(h^3)$$

$$k_0 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_1 = hf(x_i + h, y_i + k_0)$$

שיטת RK-2 (אויילר המשופרת improved)

$$y_{i+1} = y_i + k_1 + O(h^3)$$

$$k_0 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_1 = hf(x_i + h/2, y_i + k_0/2)$$

שיטת RK-2 (מקרה כללי)

$$y_{i+1} = y_i + \alpha_0 k_0 + \alpha_1 k_1 + E$$

$$k_0 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_1 = hf(x_i + \mu h, y_i + \lambda k_0)$$

$$\alpha_0 = 1 - c; \quad \alpha_1 = c; \quad \mu = \frac{1}{2c}; \quad \lambda = \frac{1}{2c}$$

איבר השגיאה

$$E = -\frac{h^3}{24c}\left[(3-4c)y_i''' - 3f_y y_i''\right] + O(h^4)$$

הערכת שגיאה לפי אקסטרפולצית ריצ'רדסון

$$E \equiv ch^{k+1} = (y_i^{(h)} - y_i^{(h/2)}) / (1 - 2^{-k})$$

משוואה דיפרנציאלית מסדר גבוה

$$y^{(m)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(m-1)}\right)$$

נתון: $y(0), y'(0), \ldots, y^{(m-1)}(0)$

מוגדר $[y_1 \equiv y]$

מערכת המשוואות

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m' = f(x, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}) \end{cases}$$

שיטת RK-4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3\right) + O(h^5)$$

$$k_0 = hf\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_1 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_0\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + h, y_i + k_2\right)$$

מערכת m משוואות מסדר ראשון

$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$ תנאי התחלה: $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0$

כאשר:

$$\mathbf{Y}' = (y_1', y_2', \ldots y_m')$$

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots y_m)$$

פתרון לפי RK-4:

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \frac{1}{6}\left(\mathbf{k_0} + 2\mathbf{k_1} + 2\mathbf{k_2} + \mathbf{k_3}\right) + O(h^5)$$

$$\mathbf{k_0} = h\mathbf{F}\left(x_i, \mathbf{Y}_i\right)$$

$$\mathbf{k_1} = h\mathbf{F}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k_0}\right)$$

$$\mathbf{k_2} = h\mathbf{F}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k_1}\right)$$

$$\mathbf{k_3} = h\mathbf{F}\left(x_i + h, \mathbf{Y}_i + \mathbf{k_2}\right)$$

בעית תנאי שפה לינארית מסדר שני

$$y'' = u(x) + v(x)y + w(x)y'$$

תנאי שפה: $y(a) = \alpha; \quad y(b) = \beta$

$$y(x) = \lambda y_1(x) + (1-\lambda) y_2(x)$$

$$\lambda = \frac{\beta - y_2(b)}{y_1(b) - y_2(b)}$$

y_1 - פתרון עבור תנאי התחלה: $\begin{cases} y_1(a) = \alpha \\ y_1'(a) = z_1 \end{cases}$

y_2 - פתרון עבור תנאי התחלה: $\begin{cases} y_2(a) = \alpha \\ \ldots \end{cases}$

הפרשים סופיים

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h)$$

$$y_i' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h)$$

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$y_i' = \frac{4y_{i+1} - 3y_i - y_{i+2}}{2h} + O(h^2)$$

$$y_i' = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + O(h^2)$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

שיטת הירי לבעית תנאי שפה מסדר שני

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(a) = \alpha$$

$$y(b) = \beta$$

פונקצית התיקון $\phi(z) = \beta - y_z(b)$

כאשר $y_z(b)$ פתרון המתקבל ב- b

לפי $y'(a) = z$

המטרה: $\phi(z) = 0$

פתרון בעיה לינארית מסדר שני

$y'' = u(x) + v(x)y + w(x)y'$, עם תנאי שפה מסוג דיריכלה $y_a = \alpha;\ \ y_b = \beta$

משוואת הפרשים מרכזיים עם דיוק מסדר שני:

$$y_0 = \alpha$$

$$1 \le i \le n; \quad \left(1 + \frac{1}{2}hw_i\right) y_{i-1} + \left(-2 - h^2 v_i\right) y_i + \left(1 - \frac{1}{2}hw_i\right) y_{i+1} = h^2 u_i$$

$$y_{n+1} = \beta$$