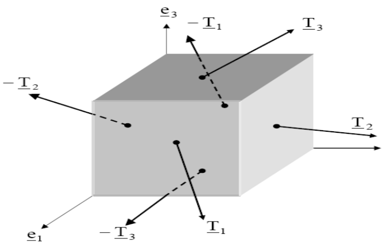
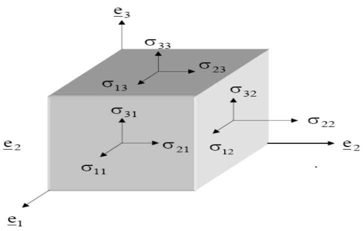
מאמצים





$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}}_{\text{טנזור המאמצים}} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

מצב המאמצים בנקודה $\underline{t} = \underline{T}_1 n_1 + \underline{T}_2 n_2 + \underline{T}_3 n_3 = \underline{T}_j n_j$ טנזור המאמץ- סימטרי $\sigma_{ij} - \sigma_{ji}$.

הגדרה– מאמץ ראשי, זהו מאמץ מתיחה או לחיצה, כיוון רכיביו יהיה ניצב לכיוון המישורים הראשיים.- $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

-מאמצים נורמלים על המישור – $\sigma_{\bar{n}\bar{n}} = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta$

-מאמצי גזירה על המישור – $\sigma_{ns} = -\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta$

-מאמץ נורמלי מקסימלי - $\sigma_{\substack{max\\min}} = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} \pm \left[\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2\right]^{1/2}$ (במשוואה זו לא יודעים את הכיוון עליו פועל מקסימום ומינימום, ומאמצי הגזירה מתאפסים.

-זווית המישור עליו פועל המאמץ המקסימלי - $\tan(2\theta)\big|_{\sigma_{\substack{max\\min}}} = \dfrac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}$

-מאמץ גזירה מקסימלי $\tau_{\substack{max\\min}} = \pm\left[\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2\right]^{1/2}$ - זוית גזירה מקסימלית $\tan(2\theta)\big|_{\tau_{\substack{max\\min}}} = -\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2\sigma_{12}}\right)$

טרנספורמציית מאמצים

$$\sigma'_{11} \equiv \sigma(\theta) = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\cos 2\theta + \sigma_{12}\sin 2\theta$$

$$\sigma'_{12} \equiv \tau(\theta) = -\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta$$

$$\sigma'_{22} \equiv \sigma\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)\cos 2\theta - \sigma_{12}\sin 2\theta$$

$\tan(2\theta)\big|_{\sigma_{\substack{max\\min}}} \cdot \tan(2\theta)\big|_{\tau_{\substack{max\\min}}} = -1$ $\quad$ $\theta_{\sigma_{min}} = \theta_{\sigma_{max}} \pm \dfrac{\pi}{2}$

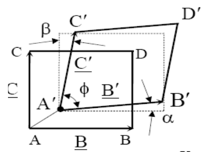
מאמץ גזירה מקסימלי במרחב

עיבורים

עיבור צירי $\varepsilon = \dfrac{\Delta u}{\Delta X}$, מאמץ $\sigma = E\varepsilon$, גרדיאנט הזזות

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\varepsilon_{ij}\ \text{סימטרי}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\omega_{ij}\ \text{אנטי–סימטרי}}$$

ε_{11} התארכות סיב חומר שהקביל לציר 1 לפני העמסה וערך שלילי משמעו התקצרות יחסית של אותו סיב .



$\varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$ במקרה זה נניח כי לא קיים סיבוב גוף קשיח כלומר - $\omega_{ij} = 0$.

-שינוי נפח יחסי $\dfrac{V'-V}{V} = \dfrac{V(1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}-1)}{V} = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$

<u>הערה</u>: בהרבה ספרים הנדסיים נהוג לקרוא למכפלה $2\varepsilon_{12}$ בשם "עיבור גזירה הנדסי" או בקיצור "עיבור הגזירה", ולסמנה ב- γ_{12} . יש להקפיד ולרשום בנוסחאות הטרנספורמציה (2-28) את רכיב הגזירה ε_{12} **ולא** את γ_{12} . החלפת ε_{12} ב- γ_{12} ב-(2-28) מובילה לטעות!.

במהלך הקורס המושג "עיבור גזירה" (במישור 1-2) משמעותו ε_{12}.

<u>משוואות טרנספורמציה לעיבורים</u> – (משוואות הטרנספורמציה במאמצים ובעיבורים –זהות.)

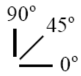
$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{13} & \varepsilon'_{23} & \varepsilon'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon'_{11} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} + \left(\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\right)\cos 2\theta + \varepsilon_{12}\sin 2\theta$$

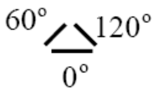
$$\varepsilon'_{22} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} - \left(\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\right)\cos 2\theta - \varepsilon_{12}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon'_{12} = -\left(\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\right)\sin 2\theta + \varepsilon_{12}\cos 2\theta$$

שושנת עיבורים – אמצעי טכנולוגי המשמש למדידה מעשית של עיבור נקודת חומר במשטח ,לשם כך נדביק 3 מדי עיבור בכיוונים שונים כשכל מדיד יבדוק התארכות בציר אחר .



$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{0^0}$$
$$\varepsilon_{22}=\varepsilon_{90^0}$$
$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{45^0}-\frac{\varepsilon_{0^0}+\varepsilon_{90^0}}{2}$$



$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{0^0}$$
$$\varepsilon_{22}=\frac{2(\varepsilon_{60^0}+\varepsilon_{120^0})-\varepsilon_{0^0}}{3}$$
$$\varepsilon_{12}=\frac{\varepsilon_{60^0}-\varepsilon_{120^0}}{\sqrt{3}}$$

עיבור ראשי – יהיה עיבור חיובי או שלילי (התארכות או התכווצות) כיוון רכיביו יהיה ניצב לכיוון המישורים הראשיים.

הקשר בין מאמצים לעיבורים (חוק הוק)

חומר איזוטרופי –תכונות החומר אינן תלויות בכיוון החומר.

חוק הוק הוא למעשה סופרפוזיציה של עיבורים בשלושת הצירים התלויים בחומר

$$\varepsilon_{11}=\frac{\sigma_{11}}{E}-\nu\frac{\sigma_{22}}{E}-\nu\frac{\sigma_{33}}{E}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})]$$
$$\varepsilon_{22}=\frac{\sigma_{22}}{E}-\nu\frac{\sigma_{11}}{E}-\nu\frac{\sigma_{33}}{E}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{33})]$$
$$\varepsilon_{33}=\frac{\sigma_{33}}{E}-\nu\frac{\sigma_{11}}{E}-\nu\frac{\sigma_{22}}{E}=\frac{1}{E}[\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})]$$
$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

עיבור גזירה ים $\varepsilon_{31}=\frac{\sigma_{31}}{2G}$; $\varepsilon_{23}=\frac{\sigma_{23}}{2G}$; $\varepsilon_{12}=\frac{\sigma_{12}}{2G}$ עיבורים :

מאמצים

$$\sigma_{11}=E\frac{\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}}{1-\nu^2}$$
$$\sigma_{22}=E\frac{\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}}{1-\nu^2}$$
$$\sigma_{12}=\varepsilon_{12}\frac{E}{1+\nu}$$

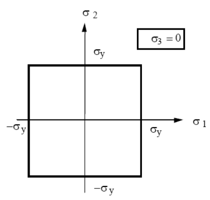
עיקרון – מאמץ נורמלי בכיוון אחד גורם למאמץ נורמלי בכיוון אחר ,אך מאמץ גזירה בכיוון אחד לא משפיע על מאמץ גזירה בכיוון אחר.

המקדם החדש λ הוא אחד משני מקדמי Lamé (המקדם השני הוא מודול הגזירה G (המסומן בספרי אלסטיות ע"י האות μ) והקשר בין λ למודול יאנג ויחס פואסון נתון ע"י :

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

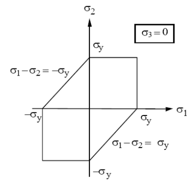
קריטריוני כשל :

קריטריון מאמץ נורמלי מקסימלי (רנקין) -קריטריון השימושי בעיקר לחומרים פריכים –על פיו ,חומר נכשל כאשר המאמץ הנורמלי על חתך כלשהו בנקודה הנדונה , מגיע לערך קריטי . σ_y



$$\sigma_1=\frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22})+\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})\right]^2+\sigma_{12}^2}$$
$$\sigma_2=\frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22})-\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})\right]^2+\sigma_{12}^2}$$

מאמץ גזירה מקסימלי (טרסקה)-קריטריון יעיל לחומרים משיכים –מתבסס על ההנחה כי העמסה הידרוסטטית לא גורמת לכשל פלסטי.



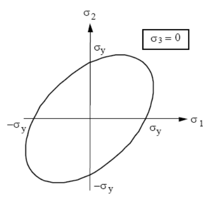
$$\pm(\sigma_1-\sigma_2)=\sigma_y$$
$$\pm(\sigma_2-\sigma_3)=\sigma_y$$
$$\pm(\sigma_3-\sigma_1)=\sigma_y$$

אם $\sigma_{eq}<\sigma_y$, אפשר להגדיל את העומס על הגוף.

אם $\sigma_{eq}=\sigma_y$, הגוף נמצא במצב של התחלת כניעה.

אם $\sigma_{eq}>\sigma_y$, העומס על הגוף גדול מהמותר ויש להקטינו.

קריטריון וון מיזס – גם כן ,מתאים לחומרים משיכים –מתבסס על ההנחה כי העמסה הידרוסטטית לא גורמת לכשל פלסטי



$$\frac{1}{2}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2]+3(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)=\sigma_{eq}^2$$
$$\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]=\sigma_{eq}^2$$

מקדם ביטחון : $n=\frac{\sigma_y}{\sigma_{eq}}$

גזירה טהורה: על פי טרסקה $\tau_y = \frac{\sigma_y}{2}$ על פי וון-מיזס: $\tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$

מאמצים בדפנות של מיכל כדורי ומיכל גלילי : -- מיכל גלילי: $\sigma_2 = \frac{pR}{t}$ יכל כדורי: $\sigma_1 = \frac{pR}{2t}$

מאמצים בגליל: $\sigma_1 = \frac{pD}{4t} + \frac{Q}{\pi D t}$, $\sigma_\theta = \frac{pD}{2t}$ $\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu\sigma_1]$

בגליל-הלחץ שיגרום כשל באיזור הכיפות : $p_y = \frac{2t}{R}\sigma_y$ ולכשל בדפנות - $p_y = \frac{t}{R}\sigma_y$

מאמצים נורמלים בכפיפה :

הנחות יסוד:אורך הקורה גדול בהרבה מחתך הקורה . \ הנחת אוילר ברנולי – חתך הרוחב ניצב לציר הקורה גם לאחר הכפיפה .

ציר ניטראלי –ציר בחתך הקורה , אשר לאורכו מאמץ המתיחה שווה לאפס.

ניתן למצוא שיפוע ציר ניטראלי ע"י הצבת σ_{11} שווה לאפס, ולפתור את המשוואה הליניארית.

מרכז שטח (מרכז כובד): $\bar{x}_2 = \frac{1}{A}\int_A x_2 dA \quad ; \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{A}\int_A x_3 dA$

מומנט אינרציה : $I_{22} = \int_A x_2^2 dA \quad ; \quad I_{33} = \int_A x_3^2 dA \quad ; \quad I_{23} = \int_A x_2 x_3 dA$

טרנספורמציית מומנטי אינרציה :

$$I'_{22} = \frac{I_{22}+I_{33}}{2} + \left(\frac{I_{22}-I_{33}}{2}\right)\cos 2\theta + I_{23}\sin 2\theta$$
$$I'_{33} = \frac{I_{22}+I_{33}}{2} - \left(\frac{I_{22}-I_{33}}{2}\right)\cos 2\theta - I_{23}\sin 2\theta$$
$$I'_{23} = -\left(\frac{I_{22}-I_{33}}{2}\right)\sin 2\theta + I_{23}\cos 2\theta$$

טרנספורמציית העתקות (שטיינר):

$$I_{22} = I'_{22} + \tilde{x}_2^2 A$$
$$I_{33} = I'_{33} + \tilde{x}_3^2 A$$
$$I_{23} = I'_{23} + \tilde{x}_2\tilde{x}_3 A$$

$$\varepsilon_{11} = a_0 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \qquad \sigma_{11} = E(a_0 + a_2 x_2 + a_3 x_3)$$

$$a_0 = \frac{N_1}{EA} \quad a_2 = \frac{1}{E}\frac{M_2 I_{23} + M_3 I_{33}}{I_{23}^2 - I_{22}I_{33}} \quad ; \quad a_3 = -\frac{1}{E}\frac{M_3 I_{23} + M_2 I_{22}}{I_{23}^2 - I_{22}I_{33}}$$

ולכן :

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{A} + \frac{(M_2 I_{22} + M_3 I_{23})x_3 - (M_3 I_{33} + M_2 I_{23})x_2}{I_{22}I_{33} - I_{23}^2}$$

מערכת צירים ראשית:

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{A} + \frac{M_2}{I_{33}}x_3 - \frac{M_3}{I_{22}}x_2$$

שים לב:יש לחתוך חתך חיובי של החלק הנידון.
ולמצוא עליו את שני רכיבי המומנט וכוח נורמאלי, לפי מה שלמדנו במוצקים 1.

מאמצי גזירה בכפיפת קורות:

מומנט סטט : $Q_3 = \int_A x_3 dA \quad ; \quad Q_2 = \int_A x_2 dA$

ביטוי כללי למאמץ גזירה :

$$\tau = -\frac{1}{t}\frac{(I_{22}V_3 - I_{23}V_2)Q_3 - (I_{23}V_3 - I_{33}V_2)Q_2}{I_{22}I_{33} - I_{23}^2}$$

במסגרות פשוט נחשב את שטח המסגרת עד לנק אותה אנו מעוניינים לחשב,ונכפול במרחק ממרכז המסה אל מרכזקטע המסגרת.

ובמערכת ראשית:

$$\tau = -\frac{1}{t}\left[\frac{V_2 Q_2}{I_{22}} + \frac{V_3 Q_3}{I_{33}}\right]$$

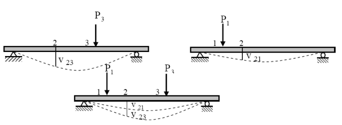
דפורמציות אלסטיות בכפיפה:

שיטת האינטגרציה :

$$M_3 = EI_{22}v'' \qquad V_2 = -EI_{22}v''' \qquad q = EI_{22}v^{IV}$$

(7-4.1) סופרפוזיציה של עומסים

במערכת אלסטית ליניארית, אם כוח P_1 הפועל בנקודה 1 (כאשר הוא פועל לבדו על המבנה!) גורם בנקודה 2 דפורמציה v_{21} ; וכוח P_3 הפועל בנקודה 3 (כאשר הוא פועל לבדו על המבנה!) גורם בנקודה 2 דפורמציה v_{23} ; כאשר יפעלו שני הכוחות ביחד (כל אחד במקום פעולתו המקורי), תהיה הדפורמציה הכללית בנקודה 2 שווה לסכום הדפורמציות החלקיות : $v_2=v_{21}+v_{23}$.



שיטות אנרגיה לחישוב הזזות:

נגדיר את העומסים כ-**כוחות מוכללים** ונסמנם ב- Q_i .

נגדיר את הדפורמציות כ-**הזזות מוכללות** ונסמנן ב- q_i .

q_i היא הדפורמציה בנקודה **i** (נקודת פעולתו של הכוח Q_i) **בכוון הכוח** Q_i .

$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i q_i$ עבודה הכללית שווה לסכום העבודות החלקיות. עיקרון ההדדיות של מקסוול: $f_{ij} = f_{ji}$

משפט קסטליינו השני : $\frac{\partial U}{\partial Q_i} = q_i$,נוכל דרכו לקבל את המקדמים : $\frac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_j} = f_{ij} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} = k_{ij}$

אנרגיה במוט פיתול (חתך מעגלי): $U = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{M_1^2}{GI_p}dx$. אנרגיית כפיפה של קורה: $U = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{M_3^2}{EI_{22}}dx$

אנרגית גזירה של קורה:

$$U=\frac{1}{2GI_{22}^2}\int_A\left(\frac{Q_2}{t}\right)^2 dA\int_0^{\ell}V_2^2dx$$

אנרגיה אלסטית באופן כללי (בקורה):

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{P^2}{EA}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{M_2^2}{EI_{33}}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{M_3^2}{EI_{22}}dx+\frac{\kappa_2}{2GA}\int_0^{\ell}V_2^2dx+\frac{\kappa_3}{2GA}\int_0^{\ell}V_3^2dx$$

דפורמציות במסבכים :

$$q_j=\frac{\partial U}{\partial Q_j}=\sum_i\frac{P_i\ell_i}{E_iA_i}\frac{\partial P_i}{\partial Q_j}$$

קריסת עמודי אוילר

כח הקריטי הנמוך ביותר לקריסה

$$k=\left(\frac{\ell}{\ell_e}\right)^2\qquad P_{cr}=k\frac{\pi^2EI}{\ell^2}$$

משוואת הקו האלסטי של עמוד בקריסה:

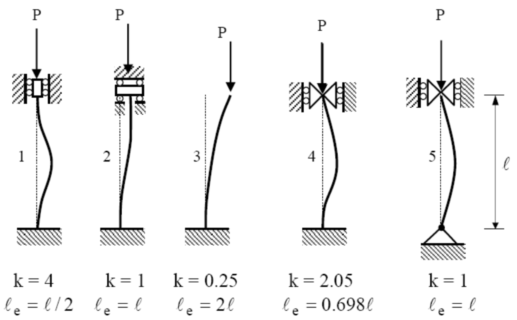
$$v=\frac{M_A}{P}\left[\frac{1}{\lambda_{cr}\ell}\sin(\lambda_{cr}x)-\cos(\lambda_{cr}x)+1-\frac{x}{\ell}\right]$$

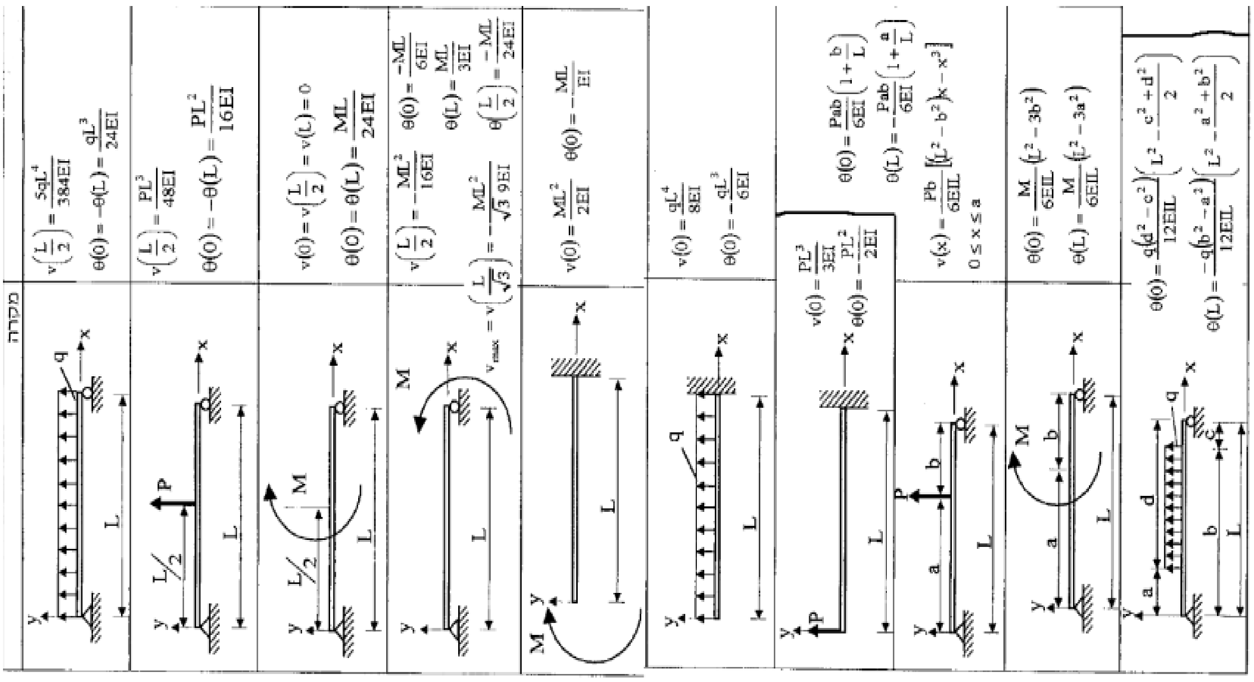
תמירות:

$$r=\sqrt{\frac{I}{A}}\qquad \sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2EI}{\ell_e^2A}=\frac{\pi^2E}{(\ell_e/r)^2}$$

משוואת אוילר רלוונטית לתחום האלסטי בלבד ולכן צריך להתקיים

$$\left(\frac{\ell_e}{r}\right)\geq\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}\cong 100$$





מקרה	
	$v\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{5qL^4}{384EI}$; $\theta(0)=-\theta(L)=\frac{qL^3}{24EI}$
	$v\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{PL^3}{48EI}$; $\theta(0)=-\theta(L)=\frac{PL^2}{16EI}$
	$v(0)=v\left(\frac{L}{2}\right)=v(L)=0$; $\theta(0)=\theta(L)=\frac{ML}{24EI}$
	$v\left(\frac{L}{2}\right)=-\frac{ML^2}{16EI}$; $\theta(0)=\frac{-ML}{6EI}$; $\theta(L)=\frac{ML}{3EI}$; $\theta\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{-ML}{24EI}$; $v_{max}=v\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{ML^2}{\sqrt{3}\,9EI}$
	$v(0)=\frac{ML^2}{2EI}$; $\theta(0)=-\frac{ML}{EI}$
	$v(0)=\frac{qL^4}{8EI}$; $\theta(0)=-\frac{qL^3}{6EI}$
	$v(0)=\frac{PL^3}{3EI}$; $\theta(0)=-\frac{PL^2}{2EI}$
	$\theta(0)=\frac{Pab}{6EI}\left(1+\frac{b}{L}\right)$; $\theta(L)=-\frac{Pab}{6EI}\left(1+\frac{a}{L}\right)$; $v(x)=\frac{Pb}{6EIL}\left[(L^2-b^2)x-x^3\right]$, $0\leq x\leq a$
	$\theta(0)=\frac{M}{6EIL}(L^2-3b^2)$; $\theta(L)=\frac{M}{6EIL}(L^2-3a^2)$
	$\theta(0)=\frac{q(d^2-c^2)}{12EIL}\left(L^2-\frac{c^2+d^2}{2}\right)$; $\theta(L)=\frac{-q(b^2-a^2)}{12EIL}\left(L^2-\frac{a^2+b^2}{2}\right)$