

מאמצים

$$\sigma = \left. \begin{aligned} \sigma_{nn} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right) \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \end{aligned} \right\}$$

$$\tau = \left. \begin{aligned} \sigma_{ns} &= -\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right) \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \end{aligned} \right\}$$

$$\tan(2\theta) \Big|_{\sigma_{\min}^{\max}} = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{1/2}$$

$$\tan(2\theta) \Big|_{\tau_{\max}^{\min}} = -\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} \right)$$

$$\sigma \Big|_{\theta_{\tau_{\max}^{\min}}} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{1/2}$$

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \\ \tau_{\min} &= -\tau_{\max} \end{aligned} \right\}$$

$$\tan(2\theta) \Big|_{\sigma_{\min}^{\max}} \cdot \tan(2\theta) \Big|_{\tau_{\max}^{\min}} = -1$$

$$A_{ir} = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_r = \cos(x'_i ; x_r)$$

$$\sigma'_{ij} = (\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_r) \sigma_{rs} A_{js} = A_{ir} \sigma_{rs} A_{js} = A_{ir} \sigma_{rs} A_{sj}^T$$

$$\sigma'_{11} \equiv \sigma(\theta) = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right) \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta$$

$$\sigma'_{12} \equiv \tau(\theta) = -\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right) \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta$$

$$\sigma'_{22} \equiv \sigma\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right) \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

עיבורים

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$d\underline{A}^{(\omega)} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \omega_{32} & \omega_{13} & \omega_{21} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\varepsilon_{ij} \text{ סימטרי}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\omega_{ij} \text{ אנטי-סימטרי}}$$

$$d\underline{\phi} = \omega_{32} \underline{e}_1 + \omega_{13} \underline{e}_2 + \omega_{21} \underline{e}_3$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

$$\frac{V' - V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$\varepsilon'_{11} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \left(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \right) \cos 2\theta + \varepsilon_{12} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon'_{22} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} - \left(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \right) \cos 2\theta - \varepsilon_{12} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon'_{12} = -\left(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \right) \sin 2\theta + \varepsilon_{12} \cos 2\theta$$

שושנת עיבורים

$$\sigma_{11} = E \frac{\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}}{1 - \nu^2}$$

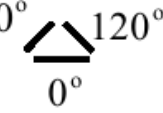
$$\sigma_{22} = E \frac{\epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11}}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_{12} = \epsilon_{12} \frac{E}{1 + \nu}$$

$$\epsilon_{33} = 0$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{0^\circ}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{2(\epsilon_{60^\circ} + \epsilon_{120^\circ}) - \epsilon_{0^\circ}}{3}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{\epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ}}{\sqrt{3}}$$


$$\epsilon_{11} = \epsilon_{0^\circ}$$

$$90^\circ$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{90^\circ}$$

$$45^\circ$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{45^\circ} - \frac{\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ}}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu \frac{\sigma_{33}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \epsilon_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu \frac{\sigma_{33}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \epsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E} - \nu \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu \frac{\sigma_{22}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \end{aligned} \right\}$$

קשרי מאמץ-עיבור

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} \quad ; \quad \epsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \quad ; \quad \epsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G}$$

$$\epsilon'_{12} = -\left(\frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2}\right) \sin 2\theta + \epsilon_{12} \cos 2\theta$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\sigma'_{12} = -\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right) \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{E}{1 + \nu}\right) \left[\epsilon_{ij} + \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu}\right) \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right]$$

$$\epsilon'_{12} = -\frac{1 + \nu}{E} \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right) \sin 2\theta + \frac{1}{2G} \sigma_{12} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{ij} = 2G \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}$$

קריטריוני כשל

מאמץ גזירה מכסימאלי (Tresca)

מאמץ נורמאלי מכסימאלי (Rankine)

$$\left. \begin{aligned} \pm(\sigma_1 - \sigma_2) &= \sigma_y \\ \pm(\sigma_2 - \sigma_3) &= \sigma_y \\ \pm(\sigma_3 - \sigma_1) &= \sigma_y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\right]^2 + \sigma_{12}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\right]^2 + \sigma_{12}^2} \end{aligned} \right\}$$

אנרגיית שינוי צורה (von Mises)

$$\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = \sigma_{eq}^2$$

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \sigma_{eq}^2$$

קריטריון וון מיזס

$$p_y = 1.155 \frac{t}{R} \sigma_y$$

כפיפה וגזירה

על פי טרסקה, על פי וון-מיזס,

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

גזירה טהורה
על פי טרסקה: $\tau_y = \frac{\sigma_y}{2}$

על פי וון-מיזס: $\tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$

גליל
 $\sigma_1 = \frac{pD}{4t} + \frac{Q}{\pi Dt}$

מאמצים בדפנות מיכל כדורי ומיכל גלילי
מיכל כדורי מיכל גלילי

$$\sigma_\theta = \frac{pD}{2t} \quad \sigma_r = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{pR}{2t} \quad \sigma_2 = \frac{pR}{t}$$

באיזור הגלילי הלחץ שיגרום כשל יהיה באיזור הכיפות

$$p_y = \frac{2t}{R} \sigma_y$$

$$p_y = \frac{t}{R} \sigma_y$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu \sigma_1]$$

$$I_{ij} = \int x_i x_j dA$$

מערכת צירים ראשית

מאמצים נורמאליים בכפיפה

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{A} + \frac{M_2}{I_{33}} x_3 - \frac{M_3}{I_{22}} x_2$$

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{A} + \frac{(M_2 I_{22} + M_3 I_{23}) x_3 - (M_3 I_{33} + M_2 I_{23}) x_2}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2}$$

$$Q_i = \int x_i dA$$

$$V_3 = M_{2,1} \quad V_2 = -M_{3,1}$$

מאמצי גזירה בכפיפת קורות

$$\tau = -\frac{1}{t} \frac{(I_{22} V_3 - I_{23} V_2) Q_3 - (I_{23} V_3 - I_{33} V_2) Q_2}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$$

פילוג גזירה בחתך טבעתי דק דופן

$$I_{22} = \int_0^{2\pi} (R \cdot d\varphi \cdot t) (R \cos \varphi)^2 = \pi R^3 t \quad Q_{\pm\theta} = \int_{-\theta}^{\theta} (R \cdot d\varphi \cdot t) (-R \cos \varphi) = -2R^2 t \sin \theta$$

$$\tau(\theta) = \frac{-VQ}{I_{22}(2t)} = \frac{V}{\pi R t} \sin \theta$$

מומנטי אינרציה של החתך

טרנספורמצית העתקה (שטיינר)

$$I_{22} = I'_{22} + \tilde{x}_2^2 A$$

$$I_{33} = I'_{33} + \tilde{x}_3^2 A$$

$$I_{23} = I'_{23} + \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 A$$

$$I'_{22} = \frac{I_{22} + I_{33}}{2} + \left(\frac{I_{22} - I_{33}}{2} \right) \cos 2\theta + I_{23} \sin 2\theta$$

$$I'_{33} = \frac{I_{22} + I_{33}}{2} - \left(\frac{I_{22} - I_{33}}{2} \right) \cos 2\theta - I_{23} \sin 2\theta$$

$$I'_{23} = -\left(\frac{I_{22} - I_{33}}{2} \right) \sin 2\theta + I_{23} \cos 2\theta$$

אנרגיה במוט עמוס בכוח צירי

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{P^2}{EA} dx$$

$$U = \frac{\kappa_3}{2} \int_0^\ell \frac{V_3^2}{GA} dx$$

שיטות אנרגיה לחישוב דפורמציות

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = q_i$$

מקדם צורת החתך

$$\kappa_2 = \frac{A}{I_{22}^2} \int \left(\frac{Q_2}{t} \right)^2 dA$$

דפורמציות במסבכים

$$q_j = \frac{\partial U}{\partial Q_j} = \sum_i \frac{P_i l_i}{E_i A_i} \frac{\partial P_i}{\partial Q_j}$$

אנרגיה אלסטית במקרה כללי

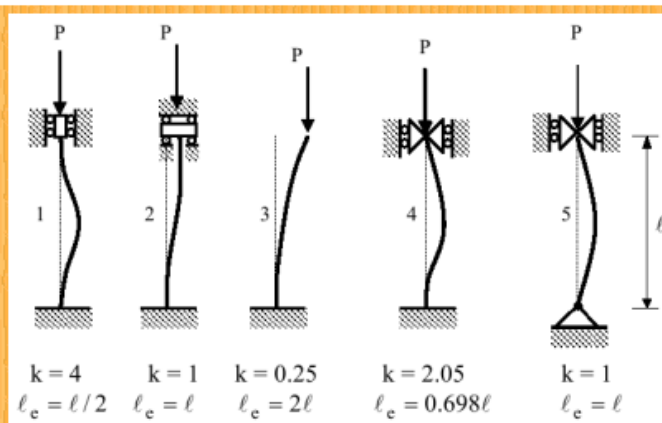
$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{P^2}{EA} dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_2^2}{EI_{33}} dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_3^2}{EI_{22}} dx_1$$

קריסת עמודי אוילר

$$P_{cr} = k \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} \quad k = \left(\frac{l}{l_e}\right)^2$$

l_e / r : (slenderness ratio) "תמירות"

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(l_e / r)^2} \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$



מקרה	משוואות
	$v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI}$ $\theta(0) = -\theta(L) = \frac{ql^3}{24EI}$
	$v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{48EI}$ $\theta(0) = -\theta(L) = \frac{PL^2}{16EI}$
	$v(0) = v\left(\frac{L}{2}\right) = v(L) = 0$ $\theta(0) = \theta(L) = \frac{ML}{24EI}$
	$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{ML^2}{16EI}$ $\theta(0) = \frac{-ML}{6EI}$ $\theta(L) = \frac{ML}{3EI}$ $v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{ML^2}{\sqrt{3} \cdot 9EI}$ $\theta\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{-ML}{24EI}$
	$v(0) = \frac{ML^2}{2EI}$ $\theta(0) = -\frac{ML}{EI}$
	$v(0) = \frac{ql^4}{8EI}$ $\theta(0) = -\frac{ql^3}{6EI}$
	$v(0) = \frac{PL^3}{3EI}$ $\theta(0) = -\frac{PL^2}{2EI}$ $\theta(L) = \frac{Pab}{6EI} \left(1 + \frac{b}{L}\right)$ $\theta(L) = -\frac{Pab}{6EI} \left(1 + \frac{a}{L}\right)$ $v(x) = \frac{Pb}{6EIL} \left[(L^2 - b^2)x - x^3 \right]$ $0 \leq x \leq a$
	$\theta(0) = \frac{M}{6EIL} (L^2 - 3a^2)$ $\theta(L) = \frac{M}{6EIL} (L^2 - 3a^2)$
	$\theta(0) = \frac{q(d^2 - c^2)}{12EIL} \left(L^2 - \frac{c^2 + d^2}{2} \right)$ $\theta(L) = -\frac{q(b^2 - a^2)}{12EIL} \left(L^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right)$