דף נוסחאות – מכניקת מוצקים 1 – עמ' 1

בסיס:

חוק הסינוסים: $\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$

חוק הקוסינוסים: $C^2=A^2+B^2-2AB\cos\gamma$

היטל של וקטור F בכיוון וקטור n: $F_n = F\cdot n\cdot\cos\theta$

מומנט: $M = F\cdot d = \mathbf{F}\times\mathbf{r}$ (הנוסחה הראשונה) –

במידה והמרחק ניצב לכח).

כיוון המומנט- לפי כלל יד ימין!

*צמד כוחות -

שקול הכוחות הוא אפס אך קיים מומנט והוא שווה בכל נקודה בגוף.

רכיב מומנט בכיוון U: $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$$M\cdot U = (\mathbf{F}\times\mathbf{r})\cdot U = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

*מומנט ביחס לציר:

1) מגדירים ציר שסביבו מחשבים – כל כח שחוצה אותו לא נחשב.

2) לכל כח שלא חוצה את הציר נבחר:

א.המרחק r מהכח לנק' על הציר.

ב.וקטור היחידה בכיוון הכח

ג.הכפלה וקטורית של r והכח בכיוון וקטור היחידה

3) נחבר את כל מומנטי הכוחות שקיבלנו ביחס לאותה נקודה על הציר

4) נחבר את כל מומנטי הכוחות שקיבלנו ביחס לאותה נקודה על הציר (לא לשכוח כיוון)

5) נכפיל את הביטוי שקיבלנו למומנט בוקטור היחידה בכיוון הציר.

6) נשווה ל-0:

*מומנט על פלטה אופקית:

נסתכל על הפלטה במבט על ולמעשה הפכנו אותה לבעיית שני מימדים ואז כרגיל: $\Sigma F_x=0;\ \Sigma F_y=0$

-ו $\Sigma M=0$. אם החוטים נפגשים בנק' אחת:

1) נבטא את וקטור הכיוון של כל כח כוקטורי יחידה (כל רכיב יחולק באורך הכבל)

2) נכפיל את הכח בוקטור היחידה הזה (סקלרית)

3) נכפיל וקטורית את מה שקיבלנו בוקטור המרחק בין נק' חיבור הציר והפלטה לבין נק' מרכז הכובד על הפלטה.

4) למעשה סכום כל הביטויים שקיבלנו הוא המומנט הכללי של המערכת ביחס למרכז כובד. לכן נוכל לקחת כל רכיב בנפרד, להשוות ל-0 ולקבל מע' משוואות

5) בדוק האם מס' הנעלמים = למס' המשוואות.

6) פתור ובדוק תשובותיך.

שיווי משקל:

*אלגוריתם:

1) הזהה בבירור את הגדלים הידועים והבלתי ידועים

2) קבע בבירור את הגוף שיש לבודד וצייר דג"ח

3) בחר מע' צירים נוחה (xy ימניה).

4) כתוב את משוואות שיווי משקל (קודם אותיות ורק אח"כ מספרים)

5) בדוק האם מס' הנעלמים = למס' המשוואות.

6) פתור ובדוק תשובותיך.

*אלגוריתם למציאת מרכז כובד:

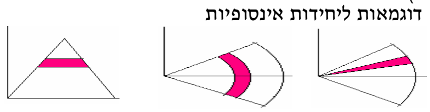
1) נבחר יחידה אינסופית (dx, dy, dz) ונבטא בעזרתה את dv, da, dr (בהתאם לצרכי השאלה)

2) נגדיר את התחום עליו נעשה אינטגרל.

התחום הוא של כל הצורה!!!

3) נציב באינטגרל המתאים

דוגמאות ליחידות אינסופיות



$x = (b/h)(h-y)$ (משולשים דומים) $dv = xdy$ | $dv = r\,(2\alpha)dr$ $A = \pi r^2(\alpha/\pi)=r^2\alpha$ | $x = r\cos\alpha$ $dv = rd\theta$ $l = r2\alpha$

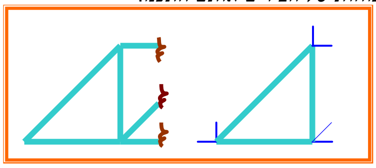
מסבכים:

שיטת הצמתים: בכל צומת נצייר דג"ח של אותה צומת ונפעיל בה שיווי משקל: $\Sigma F_x=0;\ \Sigma F_y=0$; $\Sigma M=0$. כל צומת – לשני נעלמים לכל היותר!

אם בצומת מסויימת קיים כח רק בכיוון אחד ואין שום דבר שיאזן אותו – זהו מוט אפס

ע"מ לקבוע באופן החלטי ומהיר מוטות 0 — פשוט נתחיל מהמוטות הלא-מאוזנים ונראה אילו מוטות לא מאוזנים חדשים נוצרו לנו..

שיטת החיתוך: מותר להתחך בכל קו שאינו עובר דרך צומת. בשיטה זו לא נתחשב בכוחות פנימיים אלא אך ורק בכוחות של הצירים אותם חתכנו:



כאשר מפרקים מסגרת לשני חלקים – הכיוונים של הכוחות בנקודה – גם x וגם y מתהפכים!!!

ריאקציות בסמכים -ע"י דג"ח חיצוני

מסגרות ומכונות:

אלגוריתם

1) מציירים דג"ח חיצוני. (יש לשים לב מהם הכוחות החיצוניים ומהם הפנימיים).

2) מפרידים כל רכיב, עושים עליו דג"ח ומפעילים ש"מ.

3) מבטאים כל רכיב בעזרת הנתונים את חלק (2) נעשה כאשר אנו מפרידים בנקודה בה נצטרך לחשב מהלכי כוחות

מרכזי כובד וכח פרוש:

מרכז כובד משטח: $X = \frac{\int x_c dA}{A}$

מרכז כובד נפחי: $X = \frac{\int x_c dV}{V}$

שים לב! מדובר כאן באיטגרלים כפולים ומשולשים

בקואורדינטות קרטזיות: $dA = dXdY$

בקואורדינטות גליליות: $dA = rdrd\theta$

(כאשר מדובר בקשת מעגלית)

לא לשכוח – היקף קשת = $r\theta$. (כאשר θ ברדיאנים)

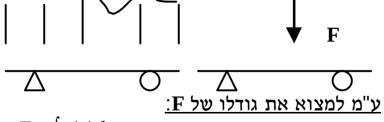
שיטת הסופרפוזיציה:

ניתן לחלק את הגוף למס' גופים פשוטים ולחשב את מרכז הכובד שלו ע"י: $X = \frac{\Sigma Ax_c}{\Sigma A}$

במידה וקיים חור בגוף – נגדיר את השטח של החור שלילי

מרכז כובד של משולש = $^1/_3$ מבסיס

עומס מפורש



ע"מ למצוא את גודלו של F:

$F = \int q(x)dx$

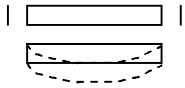
ע"מ למצוא את מיקומו של F:

$F = \frac{\int xq(x)dx}{\int q(x)dx}$

כוחות גזירה ומומנטי כפיפה:

גזירה חיובית:

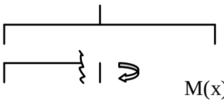
כפיפה חיובית:



אלגוריתם למציאת מומנט כפיפה וכוחות גזירה:

1) דג"ח חיצוני:

2) חיתוך:



חותכים ומסמנים M(x) ו- V(x).

3) את כח הגזירה נמצא ע"י $\Sigma F_y=0$

את מומנט הכפיפה נמצא ע"י $M(x)-x(v(x))=0$

עם x שכן $V(x) = \frac{dM}{dx}$

4) באופן זה נחלק את הקורה ונמצא מומנטי כפיפה ועומסי גזירה בכל חלק.

בבעיות מסוג זה לרוב רצוי להשתמש ברדיוסים המבוטאים בעזרת: $e_1+e_2+e_3$.

חשוב מאוד:

$w(x)dx = -dV$ – העומס משנה את הגזירה

$V(x)dx = -dM$ – הגזירה גורמת לתוספת מומנט כפיפה

*במקרה של עומס מפורש:

$F = \int w(x)dx$

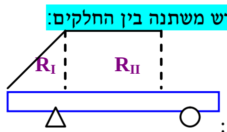
ואז: $V(0) - \int w(x)dx = 0$

כאשר $v(x)$ נמצא ע"י $\int_{v(0)}^{v(x)} dv = -\int_0^x w(x)dx$

והמומנט $M(0) - \int xw(x)dx = 0$

כאשר $m(x)$ נמצא ע"י $\int_{m(0)}^{m(x)} dm = \int_0^x v(x)dx$

*אם הכח המפורש משתנה בין החלקים:



נפעל באופן הבא:

1) נחשב את R_I ואת R_{II} לפי אינטגרל על $w(x)$

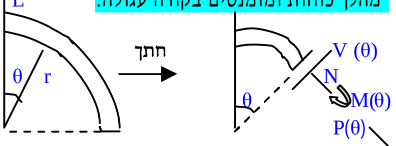
2) דג"ח חיצוני.

3) מומנט ביחס לקצה השמאלי.

4) מ(1) ו-(3) נקבל את הכוחות בסמכים.

5) נחלק כל קטע ונפעל לפי האלגוריתם שלעיל

*מהלך כוחות ומומנטים בקורה עגולה:



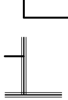
הכח L גורם להיווצרות כח משיק P. נוכל לקבל ביטוי עבורו ע"י שרטוט מע' צירים XY והפעלת ש"מ.

יש לזכור תמיד בחיתוך – נסמן את רכיב הכח הניצב לחתך – כ-N ואת הרכיב המקביל כ- V.

*דגשים לעומס מפורש:

1) האינטגרל הוא השטח התחום ע"י אורך וכח!

2) במקרה של מוטות מחוברים: ע"מ לעשות דג"ח על אחד המוטות נבדוק מהלכי כוחות ומומנטים פנימיים במוט שאותו מסירים ע"מ לשרטט אותם על המוט שעליו עושים דג"ח.

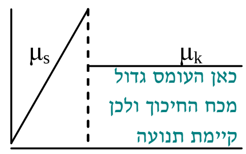


3) כל עוד אנו בתוך התחום המפורש, הכח יהיה שווה לאינטגרל של הכח המפורש כאשר אם המפורש קבוע הכח יהיה פשוט השטח כפול המפורש.

4) בדג"ח החיצוני נתייחס למומנט של העומס ככח מוכפל באורך (בשטח) – אם הכח לינארי ואינו קבוע) מוכפל בנק' מרכז הכובד.

דף נוסחאות – מכניקת מוצקים 1 – עמ' 2

חיכוך:



בבעיות חיכוך:

1)נרשום את כל הכוחות הפועלים על הגוף — דג"ח.

2)נרשום את התנאי אותו אני רוצה לקיים בעזרת הכוחות הנתונים ובעזרת כח החיכוך:

$$f_s = \mu_s N$$

3)במידת הצורך נבטא גם את המומנטים הרצויים.

חשוב גם-כן לשים לב למה שמבקשים, אם רוצים לדעת מהו הכח המקסימלי שהגוף לא יחליק, נבדוק מתי הכח הפועל בכיוון מנוגד לכח החיכוך משתווה לו ואז כל כח גדול ממנו יגרום לגוף להחליק.

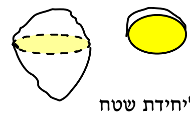
חשוב לשים לב שהנורמל יפעל תמיד בניצב לכח החיכוך

אם נפריד גוף המחליק על קורה ונעשה דג"ח על הקורה אז כח החיכוך יהיה בכיוון התנועה!!!

מאמצים ושיטת החיתוך:

שיטת החיתוך עוזרת לנו לחשב כוחות ומאמצים פנימיים (גזירה, כפיפה).

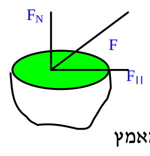
כאשר מבצעים חיתוך על גוף הוא מגיב ביצירת כוחות פנימיים. את הכוחות האלו נגלה על הדופן שאותה חתכנו:



השדה הצהוב הוא הכוחות הפועלים על המשטח.

מאמץ מוגדר ככח ליחידת שטח

ניתן לתאר אותו ע"י רכיב ניצב למשטח ורכיב מקביל למשטח:



$\sigma_\perp$ -מאמץ ניצב

σ_{ij} -מאמץ גזירה

i - מצביע על הדופן

j – מצביע על כיוון המאמץ

מאמצי עיבור, פואסון והוק:

בהעמסה חד-צירית:

עיבור מוגדר כ: $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L_0}$

מאמץ מוגדר כ: $\sigma = \dfrac{P}{A}$ A – שטח החתך

חוק הוק:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

יחס פואסון:

היחס שבין העיבור הצדדי לעיבור הציר?

לפני: אחרי:

$\upsilon = \dfrac{|\text{עיבור צדדי}|}{|\text{עיבור צירי}|}$ יחס זה הוא תכונה של החומר.

חשוב מאוד לזכור את חוק הוק בנוסח הבא:

$$\Delta L = L_0 \cdot \varepsilon = L_0 \cdot (\sigma / E) = PL_0 / AE$$

כלומר:

$$\boxed{\Delta L = \frac{PL}{AE}}$$

עקרון הסופרפוזיציה עובד גם כאן. כלומר ניתן להפריד את הגוף לתת-גופים ולחשב את התארכותו

*אלגוריתם לפתירת בעיות מאמץ בלתי מסויימות:

1)נבדוק אילו חלקים מועמסים ע"י דג"ח חיצוני ולאחר חתך של המערכת

2)ניקח בחשבון כיצד התארכות/התקצרות של חלק אחד במערכת משפיעה על החלקים האחרים. נזכור כי:

א. $P = P_A + P_B$ - ההעמסה הכללית על המערכת שווה לסכום העומסים שמרגיש כל חלק!

ב. שימוש נכון במשוואה שבמסגרת יכול לפתור את הבעיה.

3)שתי המשוואות שב- (2) יעזרו לנו למצוא את P_A ו- P_B ובכך נוכל להגיע ל- σ ע"י נוסחת מאמץ.

*בעיות עם התפשטות תרמית:

התפשטות תרמית מוגדרת כ:

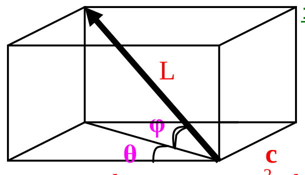
$$\Delta th = \alpha \cdot \delta t \cdot L$$

α - מקדם התפשטות תרמי

δt – שינוי בטמפ'

L - אורך התחלתי

רכיבים תלת מימדיים:



$L = a^2 + b^2 + c^2$

$a = L\sin(\varphi)$

$b = L\cos(\theta)\cos(\varphi)$

$c = L\cos(\varphi)\sin(\theta)$

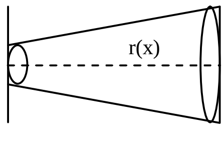
בבעיות מסוג זה חשוב לזכור: ישנם שני סוגי התארכויות והתקצרויות:

מכניות: $\dfrac{PL}{AE}$ ותרמיות: $\alpha \cdot \delta t \cdot L$

ברוב נצטרך לחבר אותן ע"מ לקבל את ס"כ השינוי באורך.

קיימות מס' דרכים לפתור בעיות אלו להלן שתיים:

דרך I:



ע"מ למצוא את המאמץ הפנימי המירבי הנגרם כתוצאה מההתקררות:

1)נרצה שההתארכות המכנית תהיה שווה להתארכות התרמית ולכן נמצא את ההתארכות התרמית, נשווה למכנית ונמצא את הכח הדרוש לכך.

כלומר בשלב ראשון: $\Delta th = \alpha \cdot \delta t \cdot L$

2)נשים לב כי שטח החתך A הוא פונקציה של x, ולכן: $A(x) = \pi r^2(x)$

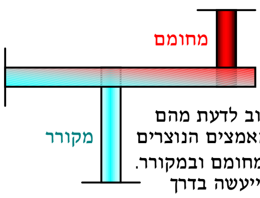
3)נחתוך פרוסה אינפיניטסמלית ונקבל עבור

$$d\Delta = \frac{P}{A(x)E}\,dx \longrightarrow \Delta = \int_0^L d\Delta = \int_0^L \frac{P}{A(x)E}\,dx$$

חישוב האינטגרל מביא אותנו למציאת L

4)כעת נוכל למצוא את P ואז σ.

דרך II:



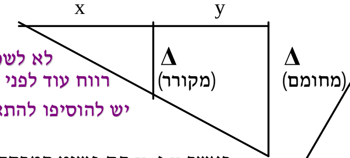
נרצה שוב לדעת מהם מהם המאמצים הנוצרים במוט המחומם ובמקורר.

הפתרון ייעשה בדרך הבאה:

1)דג"ח על המוט המרכזי ושימוש במשוואת מומנט ובכך נגיע למשוואה ראשונה שתתאר את היחס בין שני המוטות.

2)נחשב התארכויות תרמיות ומכניות לכל חומר.

3)נשתמש בגיאומטריה (דמיון משולשים):



לא לשכוח: אם קיים רווח עוד לפני שמתחיל התהליך יש להוסיפו להתארכות!!!

כאשר x ו- y הם פשוט המרחקים בין הנקודות ובסיסי המשולשים כמתואר בציור הם ההתארכויות שחישבנו בסעיף הקודם

4)משלושת סעיפים אלו נקבל שלוש משוואות עם שלושה נעלמים

מוט במתיחה כאשר הכוחות הפועלים עליו לוחצים אותו

→ מתיחה ←

יש לשים לב האם שואלים אם המאמץ הוא מאמץ מתיחה/לחיצה או שהמוט נמצא במתיחה/לחיצה. התשובה לשתי השאלות היא הפוכה!!!