עידו שמיר אביב 2010

דף נוסחאות לקורס אלגוריתמים 1 – 234247 – מבחן

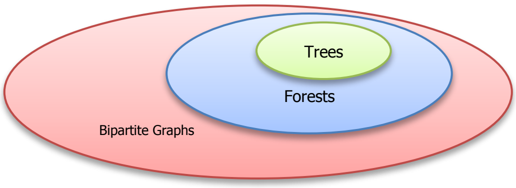
- גרף מכוון וחסר מעגלים נקרא $\boldsymbol{DAG}$ $(Directed\ Acyclic\ Graph)$
- **מיון טופולוגי** של $G=(V,E)$ הוא פונקציה $L:V\to[|V|]$ חח"ע כך שלכל קשת uv מתקיים $L[u]<L[v]$. (סידור לינארי של V כך שאם $uv\in E$ אז u נמצא לפני v בסידור).
- בכל DAG כאשר $V\neq\phi$ יש מקור.
- אם יש לנו מספר x בקלט, הסיבוכיות צריכה להיות פולינומיאלית ב $\log x$, כלומר $O((\log x)^c)$ עבור c קבוע. אחרת האלגוריתם הוא **פסאודו-פולינומאלי.**
- אלגוריתם ל**מיון טופולוגי** ב $\boldsymbol{O(V+E)}$.

- אלגוריתם $(Breadth-first\ search)$ $\boldsymbol{BFS}$ המקבל $G=(V,E)$ וצומת $s\in V$ מחשב עץ BFS ששורשו s וצמתיו הם הצמתים הישיגם מ s ב G. המסלול (היחיד) בעץ זה מ s לכל צומת הוא מסלול קצר ביותר ב G מ s לצומת. בפרט BFS מחשב את אורך המסלול הקצר ביותר מ s ל v בגרף G. יסומן $d_s(v)$ ואם v לא ישיג מ s אז $d_s(v)=\infty$. סיבוכיות $\boldsymbol{O(V+E)}$.
- * BFS מגלה את כל הצמתים במרחק i **לפני** כל הצמתים במרחק $i+1$.
- נסמן ב $\delta(s,v)$ את המרחק הקצר ביותר (בקשתות) מ s ל v. אם אין מסלול אז $\delta(s,v)=\infty$.
- לכל קשת $uv\in E$ מתקיים $\delta(s,v)\leq\delta(s,u)+1$.
- בסיום האלגוריתם, הערך $d_s(v)$ מקיים $d_s(v)\geq\delta(s,v)$ לכל $v\in V$.
- נניח שבמהלך ביצוע BFS התור Q מכיל את הצמתים $\{v_1,v_2,\dots,v_r\}$ אז:

$$d_s(v_r)\leq d_s(v_1)+1$$
$$d_s(v_i)\leq d_s(v_{i+1})$$

מסקנה: נניח ש v_i נכנס ל Q לפני v_j, אזי בזמן ש v_j נכנס לתור: $d_s(v_i)\leq d_s(v_j)$.

- גרף לא מכוון $G=(V,E)$ יקרא **גרף דו-צדדי** $(Bipartite\ Graph)$ אם קיימת חלוקה של צמתי הגרף לקבוצות L,R כך ש $G[L]$ ו $G[R]$ הם גרפים חסרי קשתות.



- יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר, ויהא $s\in V$. אזי G הוא גרף דו-צדדי אם"ם:

$$uv\in E\to d_s(u)\not\equiv_2 d_s(v)$$

- יהא $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי עם צדדים L,R. יהא p מסלול בין u,v אזי אורך המסלול p הוא זוגי אם"ם u,v נמצאים באותו צד.
- אלגוריתם ל**הכרעה על דו-צדדיות** (של גרף לא מכוון) ב $\boldsymbol{O(V+E)}$.
- גרף הוא דו-צדדי אם"ם הוא אינו מכיל מעגלים באורך אי-זוגי.
- אלגוריתם (משתמש בשיכפול גרף) המקבל $G=(V,E)$ וצומת $s\in V$ ומוצא לכל צומת את אורך המסלול הקצר ביותר מ s ל v מבין המסלולים שאורכם זוגי, או מחזיר ∞ אם לא קיים. $\boldsymbol{O(V+E)}$.

בלמן-פורד יכול למצוא מעגלים שליליים בגרף.

- אלגוריתם $(Deapth-first\ search)$ $\boldsymbol{DFS}$ המקבל $G=(V,E)$ ומחזיר:
- * יער DFS – קבוצת עצים **מכוונים** המתארת את אופן גיליו הצמתים, כלומר יחסי הורות המאפיינים איזה צומת גילה איזה צומת.
- * זמני הגילוי – לכל צומת $d(v)$ הוא זמן הגילוי שלו $1,\dots,2n-1$.
- * זמני הנסיגה – לכל צומת $f(v)$ הוא זמן הנסיעה מהצומת $2,\dots,2n$.
- * סיווג קשתות – כל קשת בגרף תסווג לאחד מהסוגים הבאים:
  - קשתות עץ – קשתות השייכות ליער.
  - קשתות קדמיות – אינן קשתות בעץ ומחברות צומת u לצאצא v בעץ.
  - קשתות אחוריות - אינן קשתות בעץ ומחברות צומת u לאב קדמון v בעץ.
  - קשתות חוצות (צידיות) – שאר הקשתות. עשויות לקשר צמתים מאותו עץ DFS בלי יחסי הורות ביניהם או לקשר צמתים בעצי DFS שונים.

פלויד-וורשל מבצע בעזרת תכנון דינאמי בסיבוכיות $O(V^3)$.

- משפט **מסלול הלבן** – ביער ה DFS של גרף, צומת v הוא צאצא של צומת u אם"ם בזמן גילוי u (בזמן $d(u)$) קיים מסלול מ u ל v דרך צמתים לבנים (שלא התגלו עדיין).
- קשת uv היא **קשת עץ** או **קשת קידמית** אם"ם $d(u)<d(v)<f(v)<f(u)$.
- קשת uv היא **קשת אחורית** אם"ם $d(v)<d(u)<f(u)<f(v)$.
- קשת uv היא **קשת חוצה** אם"ם $d(v)<f(v)<d(u)<f(u)$.
- * רק בקשת אחורית מתקיים $f(u)<f(v)$.
- * צומת v הוא צאצא של צומת ו בעץ DFS שהורץ עבור גרף מכוון/לא מכוון G אם"ם:

$$d(u)<d(v)<f(v)<f(u)$$

- * המידע המתקבל מריצת DFS עלול להשתנות מריצה לריצה (בניגוד ל BFS).
- בהרצת DFS על גרף מכוון $G=(V,E)$, אם נסמן את הקשתות שסווגו כאחוריות ב $F\subseteq E$ אז הגרפים $(V,F),(V,E\backslash F)$ הם DAG.
- גרף $G=(V,E)$, מכוון או לא מכוון, מכיל מעגל אם"ם בכל הרצת DFS על G קיימת קשת שתסווג כקשת אחורית.
- אלגוריתם המשתמש ב DFS ומחזיר "יש מעגל בגרף" אם"ם קשת כלשהי סווגה כקשת אחורית.
- בהרצת DFS על גרף לא מכוון לא יכולות להתקבל קשתות קדמיות וקשתות חוצות.
- יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון שהוא DAG. אם $\{f(v)\}_{v\in V}$ הם זמני הנסיגה המתקבלים מהרצת DFS על G אז לכל $uv\in E$ מתקיים $f(u)>f(v)$ (הסדר ההפוך לזה המושרה על ידי זמני הנסיגה מהצמתים הוא מיון טופולוגי).
- יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון. נאמר כי צומת $r\in V$ הוא **שורש** של G אם קיים מסלול מכוון מ v לכל צומת. נסמן את **קבוצת שורשי הגרף** ב R_G.
- בכל הרצת DFS, העץ DFS האחרון מכיל את R_G.
- גרף **הרכיבים הקשירים היטב (רק"ה)** של גרף מכוון G, המסומן ב G^{SCC}, הוא הגרף אשר צמתיו מייצגים רכיבים קשירים היטב ב G, וקשת מחברת בין שני צמתים u,v אם"ם קיים צומת u' ברכיב הקשיר היטב המיוצג על ידי u וקיים צומת v ברכיב הקשיר היטב המיוצג על ידי v כך ש $u'v'$ קשת ב G.

הופמן מביא למינימום את:
$B(T)=\sum f(c)d_T(c)$
$f(c)$ תדירות. $d_T(c)$ עומק.

- אלגוריתם לבניית גרף G^{SCC} בהינתן G בסיבוכיות $\boldsymbol{O(V+E)}$.
- יהיו C,C' שני רק"ה **שונים** בגרף מכוון ויהיו $u,v\in C$ ו $u',v'\in C'$. נניח שיש מסלול מכוון $u'\rightsquigarrow u$ אזי לא ייתכן שיש מסלול מכוון $v\rightsquigarrow v'$.
- בהרצת DFS על גרף מכוון החל מצומת u, מתקבל עץ יחיד ביער ה DFS אם"ם u הוא שורש של הגרף.
- אלגוריתם המקבל גרף מכוון $G=(V,E)$ ומוצא שורש כלשהו של הגרף או מודיע $R_G=\phi$, סיבוכיות $\boldsymbol{O(V+E)}$.

בכדי למצוא את כל השורשים בגרף, כאשר יש בידנו שורש r, מספיק למצוא את כל הצמתים שניתן להגיע מהם אל השורש r, ולכן נהפוך את הקשתות ונראה מי ישיג מהשורש r.

- אם $R_G\neq\phi$ אז R_G הוא רק"ה.
- אם $R_G\neq\phi$ אז הצומת הראשון במיון הטופולוגי של G^{SCC} הוא R_G.
- יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון ויהא U רק"ה של G. לכל ריצת DFS, U מוכל בשלמותו בעץ DFS.
- יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון ויהא U רק"ה של G. אם p הוא מסלול מ u ל v כאשר $u,v\in U$ אז p מוכל בשלמותו ב U.
- גרף מכוון $G=(V,E)$ נקרא **קשיר למחצה** אם עבור כל זוג צמתים u,v קיים מסלול מכוון מ u ל v או מסלול מכוון מ v ל u (או שנייהם).
- אלגוריתם שבהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$, מכריע האם G קשיר למחצה בסיבוכיות $\boldsymbol{O(V+E)}$.

- **חתך** $\boldsymbol{Cut}$ בגרף $G=(V,E)$ הוא חלוקה של קבוצת הצמתים V לשתי קבוצות: X ו $\bar{X}=V\backslash X$. קשת **חוצה** את החתך אם קצה אחד שלה ב X וקצה אחר ב $\bar{X}$.
- האלגוריתם **הגנרי** למציאת **עץ פורש מינימום (עפ"מ)**, בכל שלב האלגוריתם מחליט אם לקחת קשת לעפ"מ שהולך ונבנה (צובע בכחול) או לפסול קשת מלהיות בעפ"מ (צובע באדום).
- האלגוריתם של **קרוסקל** ממיין את הקשתות לפי משקל בסדר לא יורד ועובר על הקשתות בסדר זה. כל קשת שנבדקת – אם היא סוגרת מעגל היא נצבעת באדום, אחרת היא מצטרפת לעפ"מ. למעשה מתחילים מיער ולאט לאט מאחדים אותו לעפ"מ. סיבוכיות $\boldsymbol{O(E\log V)}$.
- האלגוריתם של **פרים** עובר על חתכים לפי קבוצה של צמתים, תמיד בוחר את הקשת הקלה בחתך. סיבוכיות כמו של קרוסקל $\boldsymbol{O(E\log V)}$.
- אלגוריתם שבהינתן $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר עם משקלות על הקשתות $w:E\to N$ כך שכל קשת צבועה בשחור או בצהוב. נרצה למצוא **עפ"מ צהוב ביותר** ב G. נגדיר פונקציית משקל חדשה w'. סיבוכיות $\boldsymbol{O(E\log V)}$.
- T הוא עפ"מ צהוב ביותר לפי פונקציית המשקל w אם"ם T הוא עפ"מ לפי פונקציית המשקל w'.
- * בפועל ניתן למצוא עפ"מ צהוב ביותר גם עבור $w:E\to R$.
- לכל עפ"מ קיימת ריצה של קרוסל (וגם של פרים!) המוצאת אותו.
- יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר. יהיו $w:E\to R,w':E\to R$ שתי פונקציות משקל על הקשתות המקיימות $w(e_1)\leq w(e_2)$ אם"ם $w'(e_1)\leq w'(e_2)$ לכל $e_1,e_2\in E$. אזי:

T הוא עפ"מ לפי w_1 אם"ם T הוא עפ"מ לפי w_2.

- יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר עם פונקציית משקל $w:E\to R$. לכל משקל נתון, כל עפ"מ של G מכיל אותו מספר של קשתות ממשקל זה.

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר עם פונקציית משקל $w:E\to\mathrm{R}$.

- אלגוריתם שבהינתן $e\in E$ מכריע האם **קיים** עפ"מ של G המכיל את e. $\boldsymbol{O(V+E)}$.
- אלגוריתם שבהינתן $e\in E$ מכריע האם **כל** עפ"מ של G מכיל את e. $\boldsymbol{O(V+E)}$.
- קשת e נמצאת **באיזהו** עפ"מ של G אם"ם כל מעגל המכיל את e מכיל קשת $e'\neq e$ כך ש $w(e')\geq w(e)$ (כסאות מוזיקליים ככה שתמיד ההכי כבד לא יושב).
- קשת e נמצאת **בכל** עפ"מ של G אם"ם כל מעגל המכיל את e מכיל קשת $e'\neq e$ כך ש $w(e')>w(e)$.

- משקל **המסלול הקל ביותר** מ u ל v מסמנים ב $d_u(v),dist(u,v)$.
- אלגוריתמים למציאת **המסלולים הקלים ביותר ממקור יחיד**.

נתון גרף $G=(V,E)$, צומת $s\in V$ ופונקציית משקל על הקשתות $w:E\to R$. נרצה את משקל המסלול הקל ביותר מ s לכל צומת $v\in V$ הישיג מ s.

בלמן-פורד, משפר $|V|$ פעמים בעזרת כלל שיפור מקומי. רץ בזמן $\boldsymbol{O(VE)}$.

דייקרסטה רץ בזמן $\boldsymbol{O(V+E\log V)}$, דורש שפונקציית המשקל תהיה אי-שלילית.

- **מבנה אופטימאלי של מסלולים קלים ביותר** – אם p הוא מסלול קל ביותר מ u ל v, אז כל תת-מסלול של p הוא מסלול קל ביותר.
- **אי-שיוויון המשולש** – לכל u,v,w מתקיים: $dist(u,v)\leq dist(u,w)+dist(w,v)$.
- בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים על הקשתות פרט לקשת אחת e שמשקלה שלילי. אין מעגלים שליליים בגרף. נתון $s\in V$. אלגוריתם המוצא עבור כל צומת את משקל המסלול הקל ביותר מ s ל v ב $\boldsymbol{O(V+E\log V)}$.
- תהא $h:V\to R$ פונקציית משקל המתאימה לכל **צומת** מספר ממשי. נגדיר $w_h:E\to R$ כך שלכל קשת $uv\in E$ מתקיים $w_h(uv)=h(u)+w(uv)-h(v)$.
  1. אזי מסלול p מ u ל v הוא קל ביותר לפי w אם"ם הוא קל ביותר לפי w_h.
  2. אין מעגלים שליליים לפי w_h.
- אלגוריתם $\boldsymbol{Johnson}$. בהינתן גרף מכוון עם משקלים על הקשתות ללא מעגלים שליליים מוצא **מסלול קל ביותר מכל צומת לכל צומת**. $\boldsymbol{O(V^2+EV\log V)}$. (בנינו גרף חדש עם צומת נוספת s וחישבנו ממנה את המרחק לכל צומת)
- אלגוריתם המקבל מטריצת שערי חליפין A של n סוגי מטבעות ומודיע האם קיימת סדרה של החלפת מטבעות המבטיחה רווח $\boldsymbol{(Arbitrage)}$. $\boldsymbol{O(VE)=O(n^3)}$.

- אלגוריתם **חמדן** בוחר את האפשרות הטובה ביותר לביצוע בצעד הנוכחי, כלומר האפשרות הטובה ביותר **לוקאלית**.
- **המרחק בין זוג מחרוזות בינאריות** יוגדר $d(x,y)=|\{i\in[n]:x_i\neq y_i|$.
- **המרחק של מחרוזת $\boldsymbol{w}$ מקבוצת מחרוזות $\boldsymbol{A}$** $d(w,a)=\min\{d(w,a):a\in A\}$.
- אלגוריתם המקבל קבוצה A של k מחרוזות בינאריות מאורך n ומחזיר מחרוזת בינארית w כך ש $d(w,A)=\Omega\left(\frac{n}{\log k}\right)$. סיבוכיות $\boldsymbol{O(nk)}$.
- יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. **צביעה חוקית** של G היא פונקציה $c:V\to N$ כך שלכל $uv\in E$ מתקיים $c(u)\neq c(v)$.
- גרף הוא **$\boldsymbol{k}$-צביע** אם קיימת עבורו צביעה המשתמשת ב k צבעים לכל היותר.
- המספר המינימאלי של צבעים הדרוש לצביעת גרף G הוא **המספר הכרומטי** של G והוא מסומן ב $\chi(G)$.
- עבור גרף לא מכוון נסמן ב $d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$ את הדרגות של צמתי הגרף ממוינים בסדר לא-עולה.
- אלגוריתם המקבל גרף לא מכוון ומחזיר צביעה שלו בלכל היותר d_1+1 צבעים. סיבוכיות $\boldsymbol{O(V+E)}$.
- אלגוריתם המקבל גרף לא מכוון ומחזיר צביעה שלו בלכל היותר $d_{\chi(G)}+1$ צבעים. סיבוכיות $\boldsymbol{O(E+V\log V)}$.
- אי שיוויון קומבינטורי $\chi(G)\leq d_{\chi(G)}+1$.
- בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ **כיסוי בצמתים** $\boldsymbol{(Vertex\ Cover)}$ של G היא קבוצת צמתים $U\subseteq V$ כך שלכל קשת $uv\in E$ לפחות אחד מהצמתים u,v ב U.
- אלגוריתם המקבל **יער** לא מכוון ומוצא לו **כיסוי בצמתים** ב $\boldsymbol{O(V+E)}$.
- אלגוריתם **הופמן** המקבל אוסף של תווים c ותדירותיהם במערך f ומוציא כפלט עץ בינארי מלא כך שהעץ הוא קוד $prefix$ אופטימאלי. סיבוכיות $\boldsymbol{O(|c|\log|c|)}$.
- בכל יער בו יש קשת אחת לפחות, יש שני עלים.
- ביער לכל i קיים כיסוי מינימאלי המכיל את הצמתים $v_1,\dots,v_i$.
- אם כל תו מופיע בקובץ בתדירות קטנה ממש מ $\frac{1}{3}$ אזי בהכרח בעץ הופמן לא תהיה מילת קוד מאורך 1.
- לכל אלגוריתם כיווץ ולכל n טבעי, קיימת מילה $x\in\{0,1\}^n$ שהאלגוריתם אינו מכווץ (כלומר לא רק שלכל אלגוריתם יש מילה שהאלגוריתם אינו מצליח לכווץ, אלא שיש מילה כזו מכל אורך).

- משפט **האינטרפילציה** – בהינתן $n+1$ נקודות שונות (x_i,y_i) כך ש $x_i\neq x_j$ אז קיים פולינום יחיד A, ממעלה n לכל היותר, כך ש $y_i=A(x_i)$.

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$$

- N היא החזקה הקטנה ביותר של 2 שהיא לפחות $2n+1$.
- w הוא שורש יחידה מסדר N אם $w^N=1$.
- יש N שורשי יחידה מסדר N: $e^{\frac{2\pi i\cdot k}{N}}$ $\forall k=0,1,\dots,N-1:$ $e^{ix}=\cos x+i\cdot\sin x$.
- ריבועי שורש היחידה מסדר N הם שורשי היחידה מסדר $\frac{N}{2}$.
- אלגוריתם ה $\boldsymbol{FFT}$ מכפיל פולינומים ביעילות בסיבוכיות $\boldsymbol{O(n\log n)}$.

תכנון דינאמי

- אלגוריתם המקבל אוסף משימות $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ כך שלכל משימה יש זמן התחלה וסיום s_i, f_i. ומוציא כפלט **תת-קבוצה מקסימאלית** $A \subseteq S$ של משימות (או קטעים) הזרים בזוגות. בסיבוכיות $O(n\log n)$.
- אלגוריתם המוצא השמת סוגריים אופטימאלית לכפל מטריצות בזמן $O(n^3)$ ובמקום $O(n^2)$.
- אלגוריתם של **פלויד-וורשל** המוצא **מסלולים קלים ביותר מכל צומת לכל צומת** ב $O(V^3)$.
- אלגוריתם לבעיית ה $Knapsack$ המוצא ערך אופטימאלי להכנסת n עצמים עם משקלים חיוביים תחת הגבלת גודל W ב $O(nW)$ **פסאודו-פולינומיאלית**.
- בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, קבוצת צמתים תקרא **בלתי תלויה ($Independent\ Set$)** אם לכל $u,v\in U$ מתקיים $uv \notin E$.
- אלגוריתם אשר בהינתן **עץ** לא מכוון $T=(V,E)$ מוצא **קבוצה בלתי תלויה מקסימום** ב T ב $O(V+E)$ (מאמינים שלא קיים אלגוריתם יעיל לגרפים כלליים).
- נסמן ב $S^+(v)$ את גודל קבוצה בלתי תלויה מקסימום בתת העץ ש v שורשו, הכוללת את v.
- נסמן ב $S^-(v)$ את גודל קבוצה בלתי תלויה מקסימום בתת העץ ש v שורשו, הלא כוללת את v.
- נסמן ב $S(v)$ את גודל קבוצה בלתי תלויה מקסימום בתת העץ ש v שורשו, ללא הגבלות.
- לכל $v\in V$ מתקיים:

$$S(v)=\max\{S^+(v),S^-(v)\}$$
$$S^+(v)=1+\sum_{u\in child(v)} S^-(u)$$
$$S^-(v)=\sum_{u\in child(v)} S(u)$$

- האלגוריתם של $Turan, Erdos$ המוצא **קבוצה בלתי תלויה עם $\frac{n}{\delta+1}$ צמתים** כאשר $\delta=\frac{2m}{n}$ הוא ממוצע הדרגות בגרף. סיבוכיות $O(V+E)$.
- אלגוריתם שבהינתן סדרת מספרים $a_1,\dots,a_n$ מוצא **תת-סדרה מונוטונית לא-יורדת ארוכה ביותר** של הסדרה. סיבוכיות $O(n^2)$.
- מעגל ביטוני הוא מסלול המתחיל בנקודה השמאלית ביותר, ומתקדם ימינה דרך חלק מהנקודות עד אשר מגיע לנקודה הימנית ביותר, ואז חוזר שמאלה בכל נקודות הנותרות.
- אלגוריתם ל**בעיית הסוכן הנוסע האוקלידית** המקבל n נקודות במישור ומחשב את המעגל הקצר ביותר המחבר את כל הנקודות (מבין המעגלים הביטוניים בלבד) בסיבוכיות $O(n^2)$.
- אלגוריתם המחשב את הרווח המקסימאלי במשחק שבו נתונה סדרה של n מספרים המסודרים בשורה משמאל לימין $a_1,\dots,a_n$ ובכל תור בוחרים מספר מאחד הצדדים – זהו הרווח בתור. סיבוכיות $O(n^2)$.

- נגדיר $\delta^+(v)$ כקבוצת הקשתות היוצאות מהצומת v. ו $\delta^-(v)$ כקבוצת הקשתות הנכנסות ל v.
- **אילוץ הקיבול**: הזרימה דרך הקשת e אינה יכולה לחרוג מקיבולת הקשת. $0\le f(e)\le c(e)$.
- **שימור הזרימה**: לכל הצמתים $v\in V\backslash\{s,t\}$ סה"כ הזרימה שנכנסת ל v שווה לסה"כ הזרימה שיוצאת מ v: $\sum_{e\in\delta^+(v)} f(e)=\sum_{e\in\delta^-(v)} f(e)$.
- **חתך $s-t$ ברשת זרימה** זהו חתך $(S,\bar S)$, $S\subseteq V$ כך ש $s\in S$ ו $t\in\bar S$.
- **קיבול של חתך** $(S,\bar S)$ מוגדר כ $c(S,\bar S)=\sum_{e\in(S,\bar S)} c(e)$.
- **ערך של זרימה** הוא $|f|=\sum_{e\in\delta^-(t)} f(e)-\sum_{e\in\delta^+(t)} f(e)$.
- לכל חתך $(S,\bar S)$ ולכל זרימה f מתקיים: $|f|=\sum_{e\in(S,\bar S)} f(e)-\sum_{e\in(\bar S,S)} f(e)$.

* אפשר לחשב את ערך פונקציית הזרימה $|f|$ על ידי הסתכלות על חתך **כלשהו** $(S,\bar S)$ או על ידי חישוב סה"כ הזרימה מהמקור (או הזרימה לבור).

- לכל חתך $(S,\bar S)$ ולכל פונקציית זרימה f מתקיים: $f\le c(S,\bar S)$.

* אם קיים חתך $(S,\bar S)$ כך ש $|f|=c(S,\bar S)$ אז f היא זרימת מקסימום.

- לכל קשת e עם קיבול $c(e)$ וזרימה $f(e)$ נגדיר שתי קשתות עם **קיבול שיורי**:
קשת קדמית: $c(e)-f(e)$
קשת אחורית: $f(e)$
- **גרף שיורי** G_f הוא אוסף כל הקשתות עם קיבול שיורי חיובי ממש.
- **מסלול שיפור** הוא מסלול מ s ל t בגרף השיורי.
- עבור מסלול שיפור p, יהי Δ הקיבול השיורי הקטן ביותר לאורך p. אזי אם נגדיל את הזרימה ב Δ בכל רשת המתאימה לקשת קדמית ב p ונקטין את הזרימה ב Δ בכל קשת המתאימה לקשת אחורית ב p, נקבל פונקציית זרימה חוקית כך שערך הזרימה גדול ב Δ.
- **משפט חתך-מינימום-זרימת-מקסימום** ($Min-Cut-Max-Flow$). תהי f פונקציית זרימה ברשת הזרימה $N=(G,s,t,c)$ אזי הטענות הבאות שקולות:
1. f זרימת מקסימום.
2. אין מסלול שיפור מ s ל t בגרף G_f.
3. קיים חתך $s-t$ $(S,\bar S)$ עבורו $|f|=c(S,\bar S)$.
- האלגוריתם של **פורד-פולקרסון** בוחר את מסלול השיפור באופן שרירותי ברשת השיורית. אם ידוע כי כל הקיבולים על הקשתות הם שלמים אז מובטח שהאלגוריתם מוצא זרימה מקסימאלית בזמן של $O(Ef^*)$ כאשר f^* היא הזרימה המקסימאלית ברשת.
- האלגוריתם של **אדמונדס-קארפ** רץ בזמן $O(VE^2)$ ובוחר מסלול שיפור ברשת השיורית כמסלול הקצר ביותר מ s ל t.
- האלגוריתם של **דיניץ** רץ בזמן $O(V^2E)$ (ואם לקשתות קיבולי יחידה אז $O(\sqrt{V}E)$.
- האלגוריתם של **גולדברג** רץ בזמן $O(V^3)$.
- נגדיר פונקציית קיבול חדשה $c'(e)=c(e)+\frac{1}{m+1}$.
- חתך $s-t$ הוא חתך מינימום ברשת $N'=(G,s,t,c')$ אם"ם הוא חתך מינימום ב N עם מספר מינימאלי של קשתות.
- אלגוריתם המוצא **חתך מינימום** עם מספר **מינימאלי של קשתות** בסיבוכיות זרימה רגילה.

- יהא $G=(V=L\cup R,E)$ גרף דו-צדדי. **שידוך ($Matching$)** ב G היא תת-קבוצה של קשתות M כך שלכל שתי קשתות אין נקודת קצה משותפת. M יקרא **שידוך מקסימום** ב G אם לכל שידוך M' ב G מתקיים $|M|\ge|M'|$.
- שידוך M יקרא **שידוך מושלם ($Perfect\ Matching$)** אם כל צומת בגרף הוא נקודת קצה של איזושהי קשת ב M.
- אלגוריתם המוצא בגרף דו-צדדי **שידוך מקסימום** בזמן $O(VE)$.
- נגדיר גרף מכוון G' עם צומת מקור ובור וכיווני קשתות מ L ל R עם קיבול יחידה על כל הקשתות.
- ב G יש שידוך בגודל k אם"ם ב G' יש זרימה בגודל k.
- יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון. **כיסוי במסלולים** של צמתי G הוא קבוצת מסלולים זרים בצמתים ב G כך שכל צומת של G מוכל באחד המסלולים בכיסוי (מסלול יכול להיות צומת יחיד).
- אלגוריתם המחשב את **מספר המסלולים הקטן ביותר בגרף** $G=(V,E)$ שהוא DAG ב $O(VE)$.
- יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. בהינתן קבוצת צמתים A נסמן ב $\Gamma(A)$ את **קבוצת השכנים** של צמתי A. כלומר $\Gamma(a)=\{v\in V:\exists u\in A\ uv\in E\}$.
- **משפט החתונה של $Hall$**. יהא $G=(V=L\cup R,E)$ גרף דו-צדדי עם $|L|=|R|=n$. ב G קיים שידוך מושלם אם"ם לכל $A\subseteq L$ מתקיים $|A|\le|\Gamma(A)|$.
- בהינתן גרף לא-מכוון $G=(V,E)$, **הקשירות בקשתות** של G המסומנת ב $\kappa(G)$, הוא המספר המינימאלי של קשתות שהסרתן מ G הופכת אותו ללא קשיר.
- אלגוריתם המחשב את $\kappa(G)$ לכל $G=(V,E)$ בסיבוכיות $O(V^2E)$ (אם נבחר באלגוריתם את הצומת בעל הדרגה המינימאלית בגרף d_{min} אז $O(VEd_{min})$.

- **רשת זרימה עם קיבולים עליונים ותחתונים** היא $N=(G,s,t,c,b)$ כאשר $b:E\to R^+$ מציינת את הקיבולים התחתונים על כל קשת.
- **אילוץ הקיבול**: $b(e)\le f(e)\le c(e)$.

* לא בהכרח תמיד קיימת f חוקית.
* ערך של פונקציית זרימה עשוי להיות שלילי.
* לכל חתך $s-t$ ולכל פונקציית זרימה f מתקיים: $|f|\le c(S,\bar S)-\sum_{\substack{uv\in E\\ u\notin S\\ v\in S}} b(uv)$
* נגדיר את הרשת הבאה:

$N^*=(G^*,s^*,t^*,c^*)$, $G^*=(V^*,E^*)$, $V^*=V\cup\{s^*,t^*\}$, E^*
$=E\cup\{s^*v, vt^*\mid v\in V\}\cup\{st,ts\}$

$$c^*(uv)=\begin{cases}(c)e-b(e) & ,uv\in E\\ \sum_{e\in\delta^-(v)} b(e) & ,u=s^*\\ \sum_{e\in\delta^+(v)} b(e) & ,v=t^*\\ \infty & ,u=s,v=t\\ \infty & ,v=s,u=t\end{cases}$$

- תהי f^* זרימת מקסימום ב N^*. נגדיר פונקציה f עבור הרשת N:

$$f(uv)=\begin{cases}b(uv) & ,uv\in E, u=s,v=t\ or\ u=t,v=s\\ f^*(uv)+b(uv) & ,else\end{cases}$$

אזי שני הבאים שקולים:
1. f זרימה חוקית ב N.
2. f^* מרווה את החתך $(\{s^*\},V^*\backslash\{s^*\})$.

- נגדיר רשת שיורית המכילה חסמים עליונים בלבד:

$N_{b,f}=(G_{b,f},s,t,c_{b,f})$
$for\ uv\in E$
$c_{b,f}(uv)=c(uv)-f(uv)$
$c_{b,f}(vu)=f(uv)-b(uv)$

- f זרימה חוקית ב N ו f' זרימת מקסימום ב $N_{b,f}$ אז $f+f'$ זרימת מקסימום ב N.