דניאל ברסקי

גרפיקה ממוחשבת – פתרונות מוצעים למבחנים

אביב 2007

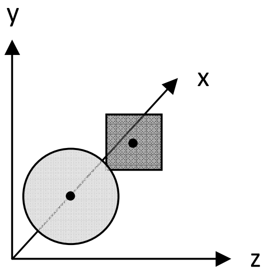
שאלה 1

סעיף א'

עבור מקרה A, נעדיף את Painter's Algorithm

מכיוון שיש מס' קטן של פוליגונים שהיחסים ביניהם פשוטים אך מס' רב של פיקסלים.

עבור מקרה B, נעדיף את Z-Buffer מכיוון שיש מס' קטן של פיקסלים אך סיבוכיות רבה בחישוב היחסים בין הפוליגונים.



סעיף ב'

- לפי שיטת Z-Buffer:

$$C(0,0)=C_{Ball}(2,0,0)=(0\ 0.5\ 1)$$

בנק' $(y\ z)=(4\ 2)$ אין הטלה של המלבן, לכן בכל מקרה מתקבל ערך הצבע של הכדור:

$$C(4,2)=C_{Ball}\left(7-\sqrt{5},4,2\right)=(0\ 0.5\ 1)$$

- עבור ה – Opacities הנתונים:

$$C(0,0)=\alpha_{\text{ball}}\cdot C_{\text{ball}}(2,0,0)+(1-\alpha_{\text{ball}})\cdot\left(\alpha_{\text{ball}}\cdot C_{\text{ball}}(12,0,0)+(1-\alpha_{ball})\cdot\alpha_{\text{rectangle}}\cdot C_{\text{rectangle}}(15,0,0)\right)=$$
$$=0.8\cdot(0,0.5,1)+0.2\cdot\left(0.8\cdot(0,0.5,1)+0.2\cdot 0.6\cdot(1,0.25,0)\right)=(0.024,0.486,0.96)$$
$$C(4,2)=\alpha_{\text{ball}}\cdot C_{\text{ball}}(2,0,0)+(1-\alpha_{\text{ball}})\cdot\left(\alpha_{\text{ball}}\cdot C_{\text{ball}}(12,0,0)+(1-\alpha_{ball})\cdot\alpha_{\text{rectangle}}\cdot C_{\text{Background}}(15,0,0)\right)=$$
$$=0.8\cdot(0,0.5,1)+0.2\cdot\left(0.8\cdot(0,0.5,1)+0.2\cdot 0.6\cdot(0,0,0)\right)=(0,0.48,0.96)$$

סעיף ג'

1. Contained = 1
2. For i = 1 to n
   2.1. Contained = Contained And
   IsOnLeft(($P_{i,x}$,$P_{i,y}$),(x_1,y_1),(x_1,y_2)) And
   Not IsOnLeft(($P_{i,x}$,$P_{i,y}$),(x_2,y_1),(x_2,y_2))) And

IsOnLeft(($P_{i,y}$,$P_{i,x}$),(y_1,x_1),(y_1,x_2))) And
Not IsOnLeft(($P_{i,y}$,$P_{i,x}$),(y_2,x_1),(y_2,x_2)))

1. Return Contained

שאלה 2

סעיף א'

יתרונות של שימוש בקואורדינטות הומוגניות:

1. הקואורדינטות לא משתנות עבור כפל בקבוע
2. ניתן לייצג נקודות באינסוף באמצעות קואורדינטות הומוגניות
3. במעבר מ – 3 ל – 2 מימדים ניתן לשמור את האינפורמציה על קואורדינטת z של האובייקטים

סעיף ב'

קבוצת הקוים עבורם נק' המגוז היא ב - $(2,-1,1)$:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + x_1 t \\ y(t) = y_0 + y_1 t \\ z(t) = z_0 + z_1 t \\ w(t) = w_0 + w_1 t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 t \\ y_0 + y_1 t \\ z_0 + z_1 t \\ z_0 + z_1 t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_0 + x_1 t}{z_0 + z_1 t} = 2 \Rightarrow x_0 + x_1 t = 2(z_0 + z_1 t) \\ \dfrac{y_0 + y_1 t}{z_0 + z_1 t} = -1 \Rightarrow y_0 + y_1 t = -(z_0 + z_1 t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2z_1 \\ x_0 = 2z_0 \\ y_0 = -z_0 \\ y_1 = -z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_0 + 2z_1 t \\ -z_0 - z_1 t \\ z_0 + z_1 t \\ w \end{pmatrix}$$

קבוצת הקווים שנק' המגוז שלהם באינסוף הינה קווים מקבילים שמקבילים למישור XY.

סעיף ג'

סיבוב סביב ציר z נתון ע"י מטריצה מהצורה:

$$R_Z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

לכן, עבור נקודה $(x\ y\ z\ w)^T$ כלשהי, לאחר סיבוב סביב ציר z מטריצת Local to World שלה תהיה:

$$M'=M\cdot R_Z(\theta)=\begin{pmatrix}a_x & b_x & c_x & d_x\\ a_y & b_y & c_y & d_y\\ a_z & b_z & c_z & d_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_x\cos\theta+b_x\sin\theta & -a_x\sin\theta+b_x\cos\theta & c_x & d_x\\ a_y\cos\theta+b_y\sin\theta & -a_y\sin\theta+b_y\cos\theta & c_y & d_y\\ a_z\cos\theta+b_z\sin\theta & -a_z\sin\theta+b_z\cos\theta & c_z & d_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

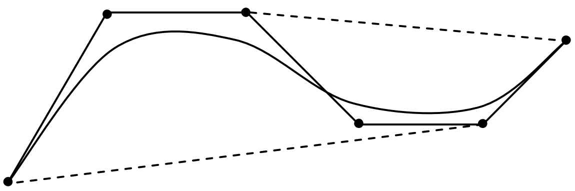
ראינו כי שתי העמודות הימיניות לא משתנות.

<u>**שאלה 3**</u>

<u>סעיף א'</u>

תכונת ה – Convex hull של Spline אומרת ש – Spline בהכרח מוכל בקמור של נקודות הבקרה שלו. חשיבות התכונה בכך שאם נגדיר תנועה של אובייקט לפי נק' בקרה, נדע בודאות כי האובייקט לא ייצא מגבולות הקמור, ולכן למשל לא ייצא מהמסך.

ציור של Spline המקיים תכונה זו:



<u>סעיף ב'</u>

1. נקודות הבקרה של ייצוג Bezier של העקום:

$$P_0 = F(0) = (0,0)$$
$$P_3 = F(1) = (2,0)$$
$$B = P_0 \cdot \binom{3}{0} \cdot t^0 \cdot (1-t)^3 + P_1 \cdot \binom{3}{1} \cdot t^1 \cdot (1-t)^2 + P_2 \cdot \binom{3}{2} \cdot t^2 \cdot (1-t) + P_3 \cdot \binom{3}{3} \cdot t^3 \cdot (1-t)^0 =$$
$$= (P_{1x}, P_{1y}) \cdot (3t - 6t^2 + 3t^3) + (P_{2x}, P_{2y}) \cdot (3t^2 - 3t^3) + (2,0) \cdot t^3$$
$$B_X = P_{1x}(3t - 6t^2 + 3t^3) + P_{2x}(3t^2 - 3t^3) + 2t^3 = -4t^3 + 6t^2$$
$$\Rightarrow P_{1x} = 0, P_{2x} = 2$$
$$B_Y = P_{1y}(3t - 6t^2 + 3t^3) + P_{2y}(3t^2 - 3t^3) = -4t^3 + 4t^2$$
$$\Rightarrow P_{1y} = 0, P_{2y} = \frac{4}{3}$$
$$\begin{cases} P_0 = (0,0) \\ P_1 = (0,0) \\ P_2 = (2, \frac{4}{3}) \\ P_3 = (2,0) \end{cases}$$

2. לשם רציפות, נקודת הבקרה P_0' צריכה להיות זהה לנקודה P_3. כמו כן, על מנת שהנגזרות תהיינה רציפות, צריך להתקיים כי

$$3 \cdot (P_1' - P_0') = 3 \cdot (P_3 - P_2)$$
$$\Rightarrow P_1' = 2 \cdot P_3 - P_2 = 2 \cdot (2,0) - (2, \tfrac{4}{3}) = (2, -\tfrac{4}{3})$$

כמו כן, נדרוש כי $P_3' = (0,-2)$. את P_2' נבחר שרירותית: $P_2' = (0,0)$

העקום המתקבל:

$$B' = (2,0) \cdot \binom{3}{0} \cdot t^0 \cdot (1-t)^3 + (2, -\tfrac{4}{3}) \cdot \binom{3}{1} \cdot t^1 \cdot (1-t)^2 + (0,0) \cdot \binom{3}{2} \cdot t^2 \cdot (1-t) + (0,-2) \cdot \binom{3}{3} \cdot t^3 \cdot (1-t)^0 =$$
$$= \begin{cases} 2(1-t)^3 + 6t(1-t)^2 \\ -4t(1-t)^2 - 2t^3 \end{cases} = \begin{cases} 2 - 6t^2 + 4t^3 \\ -4t + 8t^2 - 6t^3 \end{cases} \qquad t \in (0,1)$$

סעיף ג'

ייצוג כללי של עקום Bezier:

$$B(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i \cdot B_{i,n}(t)$$

$$\frac{dB(t)}{dt}=\sum_{i=0}^{n} n\cdot P_i \cdot \left(B_{i-1,n-1}(t)-B_{i,n-1}(t)\right)=$$

$$=n\cdot\left(\left(P_1-P_0\right)\cdot B_{0,n-1}(t)+\left(P_2-P_1\right)\cdot B_{1,n-1}(t)+\ldots+\left(P_n-P_{n-1}\right)B_{n-1,n-1}(t)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} n\cdot\left(P_{i+1}-P_i\right)\cdot B_{i,n-1}(t)$$

הפולינום הוא מסדר n-1. נקודות הבקרה של העקום החדש:

$$\begin{cases} P_1-P_0 \\ P_2-P_1 \\ P_3-P_2 \\ \vdots \\ P_n-P_{n-1} \end{cases}$$

<u>שאלה 4</u>

<u>סעיף א'</u>

מודל פוליגונלי הוא 2-manifold אם עבור כל נקודה על המודל, החיתוך של כל סביבה כדורית קטנה ככל שתהיה של הנקודה עם האובייקט שקול טופולוגית לדיסק.

<u>סעיף ב'</u>

<u>עבור רשימת פאות:</u>

שינוי קואורדינטות של קודקוד - $O(F\cdot V)$

1. עבור כל פאה ב - $F=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$:

1.1. עבור כל קודקוד v_k ב - f_i

1.1.1. אם $v_k=v$

1.1.1.1. עדכן את v_k

1.1.2. אחרת

1.1.2.1. $k\leftarrow k+1$

1.2. $i\leftarrow i+1$

הוספת קודקוד לפוליהדרון מבלי להרוס את המבנה - $O(F+V)$

1. $V \leftarrow V \cup \{v_5\}$
2. עבור כל פאה ב - $F=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$:
   2.1. אם $v_1 \in f_i \,\&\, v_2 \in f_i$
      2.1.1. $f_i \leftarrow f_i \cup v$

עבור רשימת פאות עם אינדקסים לקודקודים:

שינוי קואורדינטות של קודקוד = $O(1)$

1. עדכן את הקואורדינטות של v

הכנסת קודקוד חדש בין שני קודקודים = $O(F+V)$

1. $V \leftarrow V \cup \{v_5\}$
2. צור מיפוי $v_5 \rightarrow 5$
3. עבור כל פאה ב - $F=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$:
   3.1. אם $1 \in f_i \,\&\, 2 \in f_i$
      3.1.1. $f_i \leftarrow f_i \cup 5$

עבור ייצוג winged edge:

שינוי קואורדינטות של קודקוד = $O(1)$

1. עדכן את הקואורדינטות בטבלת הקודקודים

הכנסת קודקוד חדש בין שני קודקודים = $O(E)$

עבור הוספת קודקוד v_c בין v_a ל - v_b:

1. מצא צלע e_1 המקשרת בין v_a ל-v_b (נניח שהצלע יוצאת מ-v_a ונכנסת ל-v_b)
2. הוסף קודקוד v_c
3. הוסף צלע e_2 מ - v_a ל - v_c
4. הוסף צלע e_3 מ - v_c ל - v_b
5. צור מצביע מ - v_c ל - e_2
6. הפאה השמאלית של e_2 $\rightarrow$ הפאה השמאלית של e_1
7. הפאה השמאלית של e_3 $\rightarrow$ הפאה השמאלית של e_1
8. הפאה הימנית של e_2 $\rightarrow$ הפאה הימנית של e_1

9. הפאה הימנית של e_3 $\rightarrow$ הפאה הימנית של e_1
10. הצלע הקודמת בסיור בפאה השמאלית של e_2 $\rightarrow$ הצלע הקודמת בסיור בפאה השמאלית של e_1
11. הצלע הבאה בסיור בפאה השמאלית של e_2 $\rightarrow$ e_3
12. הצלע הקודמת בסיור בפאה הימנית של e_2 $\rightarrow$ e_3
13. הצלע הבאה בסיור בפאה הימנית של e_2 $\rightarrow$ הצלע הבאה בסיור בפאה הימנית של e_1
14. הצלע הקודמת בסיור בפאה השמאלית של e_3 $\rightarrow$ e_2
15. הצלע הבאה בסיור בפאה השמאלית של e_3 $\rightarrow$ הצלע הבאה בסיור בפאה השמאלית של e_1
16. הצלע הקודמת בסיור בפאה הימנית של e_3 $\rightarrow$ הצלע הקודמת בסיור בפאה הימנית של e_1
17. הצלע הבאה בסיור בפאה הימנית של e_3 $\rightarrow$ e_2

סעיף ג'

נרצה להוכיח כי כל קודקוד מקושר באמצעות צלעות ל – 6 קודקודים סמוכים, כלומר כי הדרגה של כל קודקוד היא בקירוב 6.

ראינו בהרצאה כי עבור פוליהדרון המורכב ממשולשים, מתקיים כי $F=\frac{2}{3}E$ (לכל פאה 3 צלעות, אך מכיוון שכל צלע משיקה ל – 2 פאות אנו סופרים כל צלע פעמיים). נציב זאת בנוסחת אוילר:

$$V+F-E=2$$
$$\Rightarrow V+\tfrac{2}{3}E-E=2$$
$$\Rightarrow E=3(V-2)\cong 3V$$

בהנחה כי בין כל שני קודקודים ישנה צלע אחת לכל היותר, כל צלע מוסיפה 1 לדרגה של כל קודקוד שהיא מקושרת אליו. כלומר, אם נסכם את סה"כ הדרגות, נקבל:

$$R_{total}=2\cdot E=2\cdot 3(V-2)\cong 6\cdot V$$

עתה, אם נחלק את הדרגה הכוללת במס' הצלעות, נקבל כי הדרגה של כל קודקוד היא בקירוב:

$$R=\frac{R_{total}}{V}=6\frac{(V-2)}{V}\cong 6$$

מ.ש.ל.

דניאל ברסקי

אביב 2008

שאלה 1

סעיף א'

$$c_{over} = F_A \cdot c_A + F_B c_B = \alpha_A C_A + \left(1-\alpha_A\right)\cdot \alpha_B C_B$$
$$\alpha_{over} = \alpha_A + \left(1-\alpha_A\right)\alpha_B$$

סעיף ב'

העכבר יהיה בהיר יותר או באותו צבע (אם $\alpha = 1$) בגרסת ה – **Non-Premultiplied**, מכיוון שהכפלה של מקדמי הצבע ב - α מכפילה את המקדמים בגורם בין 0 ל 1, כך שההכפלה תקטין את המקדמים ותקרב אותם ל – 0, שמשמעותה צבע כהה יותר.

$$RGB\alpha = \left(\alpha C_R, \alpha C_G, \alpha C_B, \alpha\right) \;\; RGB\beta = \left(C_R, C_G, C_B, \beta\right)$$
$$\alpha C_R \le C_R, \alpha C_G \le C_G, \alpha C_B \le C_B$$

סעיף ג'

$$c_{output} = F_A \cdot c_{input} + F_B \cdot c_{input} + F_C \cdot c_{background}$$
$$\alpha_{output} \cdot C_{output} = \alpha_{input} \cdot C_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\left(\alpha_{input} \cdot C_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\cdot C_{background}\right)$$
$$\alpha_{output} = \alpha_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\cdot\left(\alpha_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\cdot \underbrace{\alpha_{background}}_{=1}\right) = 1$$

<u>עבור רקע שחור:</u>

$$\alpha_{output} \cdot C_{output} = \alpha_{input} \cdot C_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\left(\alpha_{input} \cdot C_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\cdot (0,0,0)\right) =$$
$$\alpha_{input}\left(2-\alpha_{input}\right)C_{input} > \alpha_{input} C_{input}$$

כלומר, צבע הפלט יהיה בהיר יותר מאשר במערכת זהה ללא הבאג

<u>עבור רקע לבן:</u>

$$\alpha_{output} \cdot C_{output} = \alpha_{input} \cdot C_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\left(\alpha_{input} \cdot C_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\cdot (1,1,1)\right) =$$
$$\alpha_{input}\left(2-\alpha_{input}\right)C_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)^2 \cdot (1,1,1) < \alpha_{input} C_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\cdot(1,1,1)$$

כלומר, צבע הפלט יהיה כהה יותר מאשר במערכת זהה ללא הבאג

<u>עבור רקע בצבע העכבר:</u>

$$\alpha_{output} \cdot C_{output} = \alpha_{input} \cdot C_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\left(\alpha_{input} \cdot C_{input} + \left(1-\alpha_{input}\right)\cdot C_{input}\right) = C_{input}$$

כלומר, צבע הפלט יהיה זהה לצבע הפלט במערכת זהה ללא הבאג

דניאל ברסקי

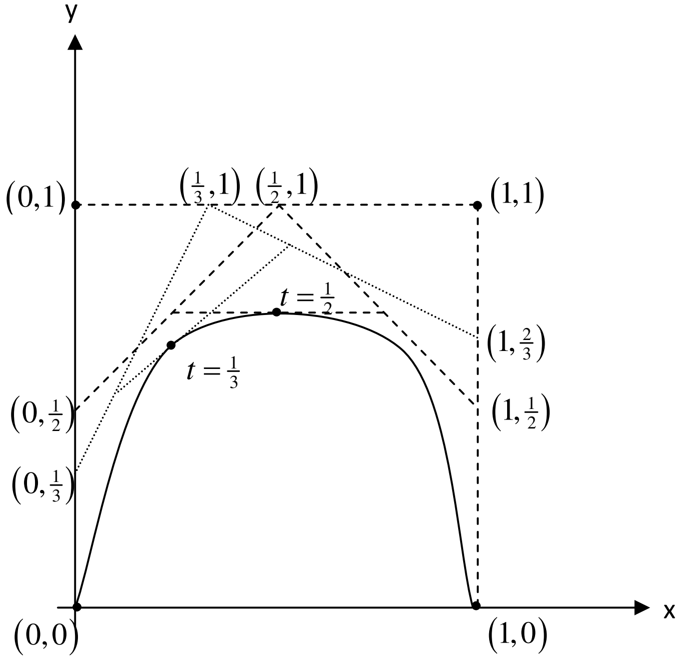
<u>שאלה 2</u>

סעיף א'

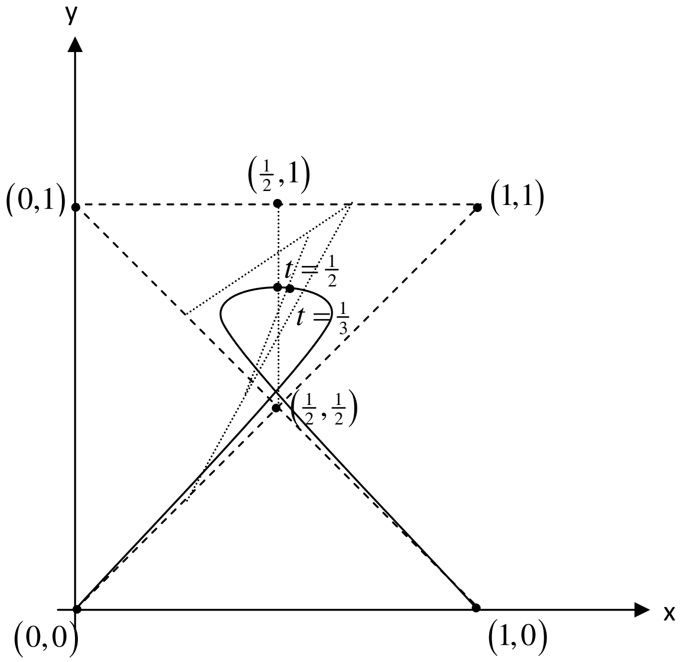
פולינום מדרגה שלישית הינו פשרה בין גמישות לבין יעילות ומהירות חישוב.

סעיף ב'

<u>עבור עקום 1:</u>



<u>עבור עקום 2:</u>



סעיף ג'

הפולינום הוא מדרגה 3, לכן ניתן לתיאור מהצורה:

$$P(t)=at^3+bt^2+ct+d$$

$$\begin{cases} P(0)=d \\ P'(0)=c \\ P(2)=8a+4b+2c+d \\ P'(2)=12a+4b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \\ P(2) \\ P'(2) \end{pmatrix} \Rightarrow M_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

<u>שאלה 3</u>

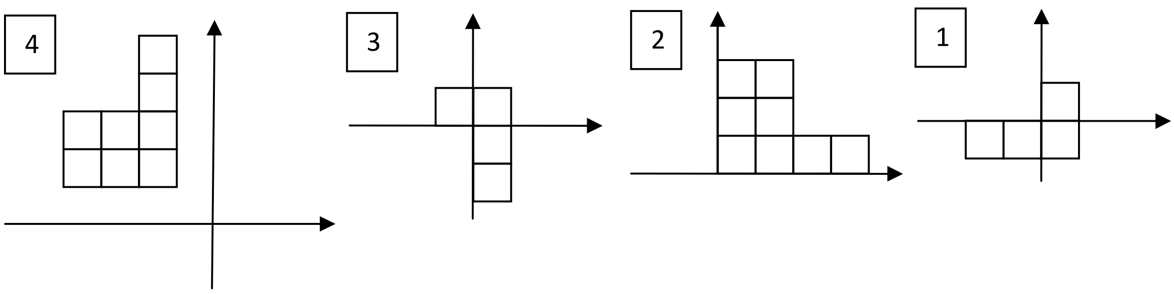
סעיף א'

מטריצה **A** – הזזה ב – 1 ימינה בציר **x**

מטריצה **B** – סיבוב ב – 90 מעלות סביב ציר **z** נגד כיוון השעון

מטריצה **C** – הזזה ב – 1 שמאלה בציר **x**

מטריצה **D** – ניפוח פי 2 לאורך ציר **x**



סעיף ב'

כפי שראינו, ניתן לייצג טרנספורמציה בין מערכות צירים ע"י רישום הצירים ונק' הראשית של מערכת הצירים החדשה ביחס לישנה. לכן,

$$M_{A\to B}=\begin{pmatrix} X_{A\to B} & Y_{A\to B} & O_{A\to B} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ג'

<u>חלק 1</u>

הטרנספורמציה הינה:

$$T(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

דניאל ברסקי

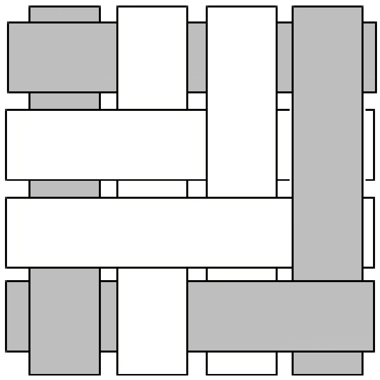
חלק 2
לא ניתן לתאר טרנספורמציה זו כמטריצה כיוון שאינה טרנספורמציה לינארית.

חלק 3
העצמים היחידים שיועתקו לנקודה בודדת על המסך הם קוים ישרים שהמשכיהם עוברים בראשית הצירים.

שאלה 4

סעיף א'

הצורה השניה תהווה בעיה עבור **Painter's Algorithm**, מכיוון שלא ניתן לסווג את הפוליגונים כאחד לפני השני או אחד מאחורי השני. דוגמה לפוליגונים בעייתיים:



סעיף ב'

יצוייר קו רציף אך ורק אם השיפוע גדול מ 1 בערכו המוחלט, כלומר ציר **y** הוא ציר ההתקדמות הראשי.
ניקח לדוגמה קו מהנק' $(0,0)$ לנקודה $(4,3)$, אזי לפי האלגוריתם:

$$dxdt = dx = 4$$
$$dydt = dy = 3$$
$$n = 3$$

ויצוירו פיקסלים בנקודות:

$$(0,0),(1,1),(3,2),(4,3)$$

ניתן לראות כי ישנה אי-רציפות בין $(1,1),(3,2)$.

סעיף ג'

נניח כי פיקסל מסוים נמצא בקואורדינאטות (x, y) (כאשר x, y מציינים את מרכז הפיקסל), לכן תת הפיקסל הירוק ממוקם בקואורדינאטה (x, y), תת הפיקסל האדום ממוקם בקואורדינאטה $(x, y+\frac{1}{3})$ והפיקסל הירוק ממוקם בקואורדינאטה $(x, y-\frac{1}{3})$. לכן, האלגוריתם החדש ירוץ שלוש פעמים – פעם אחת על הקואורדינאטות המקוריות ועל תתי הפיקסלים הירוקים, פעם אחת על הקואורדינאטות בתמונה מוזזות בשליש למעלה ועל תתי הפיקסלים האדומים,

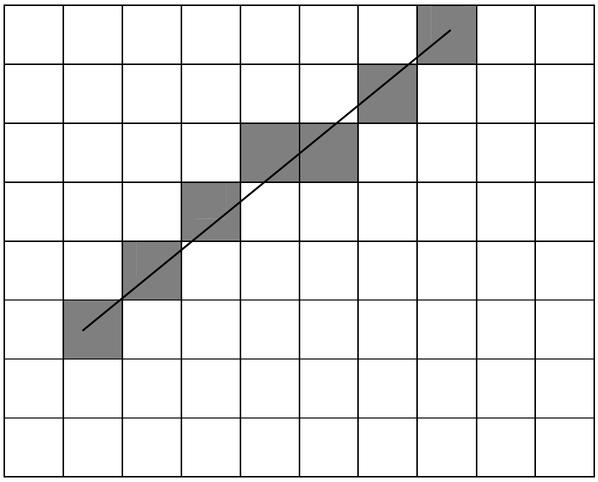
ופעם אחת על הקואורדינאטות בתמונה מוזזות בשליש למטה ועל תתי הפיקסלים הכחולים, כאשר קואורדינאטות הקו עצמו נשארות קבועות.
לאחר מכן, נקבע את צבעי הפיקסלים שיוצגו על המסך לפי התוצאה של האלגוריתם.

דניאל ברסקי

אביב 2009

שאלה 1

סעיף א'

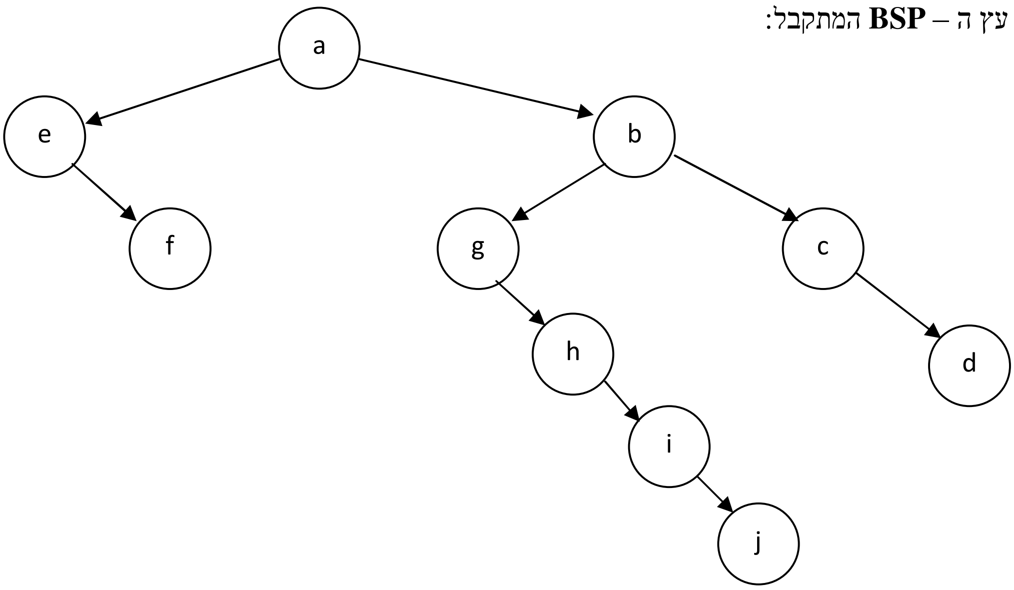


נשים לב כי השיפוע קטן מ – 1 וכי $\Delta x > 0, \Delta y > 0$, כפי שלמדנו בהרצאות. לכן, ציר **x** הוא הציר הראשי (לאורכו נתקדם בדיוק בפיקסל אחד בכל איטרציה).

1. נצבע את הפיקסל $(2,3)$
2. מבין הפיקסלים $(3,4),(3,3)$, הפיקסל בערך $(3,4)$ קרוב יותר לקו, לכן נצבע אותו.
3. מבין הפיקסלים $(4,5),(4,4)$, הפיקסל בערך $(4,5)$ קרוב יותר לקו, לכן נצבע אותו.
4. מבין הפיקסלים $(5,6),(5,5)$, הפיקסל בערך $(5,6)$ קרוב יותר לקו, לכן נצבע אותו.
5. מבין הפיקסלים $(6,7),(6,6)$, הפיקסל בערך $(6,6)$ קרוב יותר לקו, לכן נצבע אותו.
6. מבין הפיקסלים $(7,7),(7,6)$, הפיקסל בערך $(7,7)$ קרוב יותר לקו, לכן נצבע אותו.

סעיף ב'

עץ ה – **BSP** המתקבל:



נבצע **Rendering** לפי הסדר:

$$e \to f \to a \to g \to h \to i \to j \to b \to c \to d$$

סעיף ג'

נרצה שהצבע של פיקסל המוצא יהיה $\frac{c_1 + c_2}{2}$, מה שאומר שההרכבה תבוא לידי ביטוי רק באטימות הפיקסל. לכן, קודם כל נבצע את המיצוע ולאחר מכן את ההרכבה. אין משמעות לייצוג **premultiplied**, מכיוון שהדבר יוציא את הטעם מביצוע המיצוע – היחסים בין הצבעים בצבע הסופי ייקבעו ע"י ערכי α שלהם ולא ע"י ממוצע הצבעים.

סעיף ד'

כל פיקסל בכל ערוץ יכול לקבל אחד מ – 2 ערכים, כאשר 9 הפיקסלים יכולים אפקטיבית לתת משקל שונה לצבע לפי מטריצת ה – **Dither** ולפי צבע האזור בתמונה, כאשר יש 10 אפשרויות של פיקסלים דלוקים או כבויים. לכן, סה"כ, אפקטיבית ניתן ליצור $10^3 = 1000$ צבעים.

<u>שאלה 2</u>

סעיף א'

נבדוק את השפעת הטרנספורמציה על נק' מסוימת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x+w \end{pmatrix}$$

אם נעבור מקואורדינאטות הומוגניות לקואורדינאטות קרטזיות נקבל:

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{w} \\ \frac{y}{w} \\ \frac{z}{w} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{x+w} \\ \frac{y}{x+w} \\ \frac{z}{x+w} \end{pmatrix}$$

הטרנספורמציה מבצעת כיוון של כל הקואורדינאטות יחסית לערך **x** של הנקודה. המשמעות המוכללת הינה הטלה של המרחב על מישור $x = 1$ והזזה.

דניאל ברסקי

סעיף ב'

נקודות המגוז העיקריות:

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.5 & 4.2 \\ 0.2 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0.3 & 1 & 2.2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.5 & 4.2 \\ 0.2 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0.3 & 1 & 2.2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.5 & 4.2 \\ 0.2 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0.3 & 1 & 2.2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 2.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

סעיף ג'

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 + c_3 = 0 \\ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -c_1 + c_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow c_1 = c_3 = 0$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

טרנספורמציה לדוגמה שמקיימת את הדרישה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

נבדוק להיכן מועתק המעגל $x^2 + y^2 = 1$:

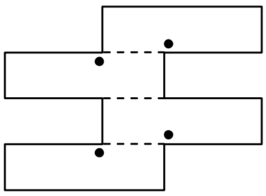
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\\sqrt{1-x^2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\\sqrt{1-x^2}\\\sqrt{1-x^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\-\sqrt{1-x^2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-\sqrt{1-x^2}\\-\sqrt{1-x^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\1\end{pmatrix}$$

המעגל מועתק לקו ישר $y=1$.

<u>**שאלה 3**</u>

סעיף א'



דוגמה לפוליגון מהצורה המדוברת: $n=16$, דרושים $\frac{16}{4}=5$ שומרים לפוליגון.

במקרה הקצה, האובייקט מורכב ממלבנים שיש ביניהם רק צלע משותפת, צריך שומר לכל מלבן, כאשר כל מלבן מוסיף 4 קודקודים. לכן, עבור n קודקודים, נצטרך $\frac{n}{4}$ שומרים על מנת לכסות את כל הפוליגון.

סעיף ב'

<u>חלק 1</u>

ההנחות על מבנה הנתונים הקיים **Winged Edge** הן:

1. לכל קודקוד יש מצביע לצלע שיוצאת ממנו או נכנסת אליו
2. לכל פאה יש מצביע לצלע שמשיקה לה
3. לכל צלע יש כיוון (התחלה וסוף), וכן מצביעים ל:
   a. שתי הפאות בשני צדדיה (פאה שמאלית ופאה ימנית)
   b. צלע קודמת וצלע הבאה במעבר על הפאה הימנית עם כיוון השעון
   c. צלע קודמת וצלע הבאה במעבר על הפאה השמאלית נגד כיוון השעון

<u>חלק 2</u>

האלגוריתם למעבר נגד כיוון השעון:

1. מצא את הצלע שהקודקוד מצביע עליה
2. אם הצלע יוצאת מהקודקוד הראשי,
   2.1. הדפס את הפאה השמאלית כחלק מהכוכב
   2.2. מצא את הצלע הבאה במעבר נגד כיוון השעון על הפאה השמאלית
   2.3. הדפס את הצלע כצלע הבאה בחולייה של הקודקוד
   2.4. אם צלע זו יוצאת מהקודקוד המשותף עם הצלע הקודמת
      2.4.1. מצא את הצלע הבאה במעבר נגד כיוון השעון על הפאה השמאלית
   2.5. אחרת
      2.5.1. מצא את הצלע הקודמת במעבר עם כיוון השעון על הפאה הימנית
   2.6. חזור לשלב 2

3. אחרת
   3.1. הדפס את הפאה הימנית כחלק מהכוכב
   3.2. מצא את הצלע הקודמת במעבר עם כיוון השעון על הפאה הימנית
   3.3. הדפס את הצלע כצלע הבאה בחולייה של הקודקוד
   3.4. אם צלע זו יוצאת מהקודקוד המשותף עם הצלע הקודמת
      3.4.1. מצא את הצלע הבאה במעבר נגד כיוון השעון על הפאה השמאלית
   3.5. אחרת
      3.5.1. מצא את הצלע הקודמת במעבר עם כיוון השעון על הפאה הימנית
   3.6. חזור לשלב 2

סעיף ג'

נוכיח את הטענה לפי בניית **de Casteljau**:

נניח כי הקו הישר חותך את העקום בנקודה t כלשהי. לכן, הוא בהכרח חותך את הקו האחרון של בניית **de Casteljau** המשיך לעקום באותה נקודה. נניח כי קו זה חותך שני קווים של הדרגה הקודמת בבנייה בנקודות a,b , וששני הקווים הנ"ל נפגשים בנקודה c, אזי הקו הישר נכנס למשולש a,b,c וחייב גם לצאת ממנו, כלומר הוא חותך את אחד הקווים מהדרגה הקודמת בבנייה. נמשיך באינדוקציה עד שנגיע להוכחה כי הקו חותך בהכרח את פוליגון הבקרה.