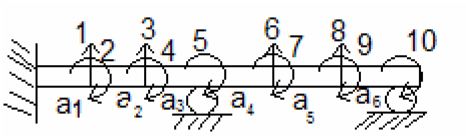
דף נוסחאות לאנליזת מבנים



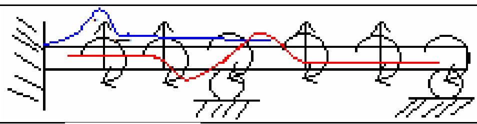
אלמנטים סופיים

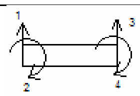
$\Phi_I(x)$ - פונקצית צורה (I - מס' ד"ח גלובליות) תמיד גזירה (חלקה).

Φ_I - של תזוזה/כוח - מקבלת 1 בנק' ד"ח I, ו- 0 בכל ד"ח אחרת.

Φ_I - של זוית/סיבוב/מומנט – 1 בנגזרת בנק' ד"ח, 0 בערך הפונקציה בנק'.

a_i - אורך אלמנט i.

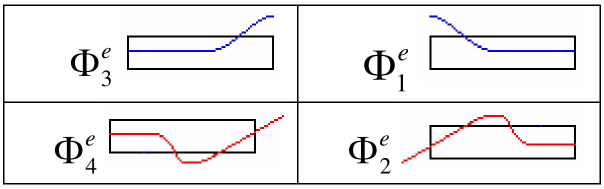
	כחול – פונקצית תזוזה של ד"ח 1. אדום – פונקצית סיבוב של ד"ח 5.



ברמת האלמנט

$$u^e \cong u^{e*} = \sum_i d_i \phi_i^e(x); i = 1,2,3,4$$

$$\phi_1^e(x_1^e) = 1 \quad \phi_{i \neq 1}^e(x_1^e) = 0$$



פונקציות הרמיט (Hermite)

$$\phi_1^e(x) = -\left(x - x_2^e\right)^2 \frac{-h^e + 2\left(x_1^e - x\right)}{\left(h^e\right)^2}$$

$$\phi_3^e(x) = \frac{\left(x - x_1^e\right)\left(x - x_2^e\right)^2}{\left(h^e\right)^2}$$

$$\phi_2^e(x) = \left(x - x_1^e\right)^2 \frac{h^e + 2\left(x_2^e - x\right)}{\left(h^e\right)^2}$$

$$\phi_4^e(x) = \frac{\left(x - x_1^e\right)^2\left(x - x_2^e\right)}{\left(h^e\right)^2}$$

ריילי ריץ

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_{.0}^{L} EI\left(u''\right)^2 dx - \left[\int_0^L fudx + \sum_{n=1}^{N_P} u\left(x_p^{(n)}\right)P^{(n)} + \sum_{m=1}^{N_M} u'\left(x_M^{(m)}\right)M^{(m)}\right]$$

$$\Pi(u) = \Pi(d_1, \ldots, d_N) \rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial d_I} = 0 \qquad (\text{N eq. in N var.})$$

$$F_I = \int_0^L f\phi_I(x)dx + \sum_{n=1}^{N_P}\phi_I\left(x_p^{(n)}\right) + \sum_{m=1}^{N_M}\phi_I'\left(x_M^{(m)}\right)M^{(m)}$$

$$K_{IJ} = \int_0^L \phi_I''(x)EI(x)\phi_J''(x)dx$$

$\bar{\bar{K}}\bar{d} = \bar{F}$. כאשר:

$\bar{\bar{K}}$ - מטריצת קשיחויות גלובלית. $\bar{d}$ - וקטור נעלמים. $\bar{F}$ - וקטור כוחות גלובלי.

עבור EI קבוע, פונקצית הקשיחות הלוקלית (עבור אלמנט):

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{EI}{\left(h^e\right)^3}\begin{pmatrix} 12 & 6h^e & -12 & 6h^e \\ & 4\left(h^e\right)^2 & -6h^e & 2\left(h^e\right)^2 \\ & & 12 & -6h^e \\ & & & 4\left(h^e\right)^2 \end{pmatrix}_{Sym.} \qquad \underline{f}^e = \frac{\hat{f}^e h^e}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ h^e/6 \\ 1 \\ -h^e/6 \end{pmatrix}$$

ממכאניקת מוצקים:

$$M = EIu'' \qquad V = -M'$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{M(x)y}{I} \qquad \tau = \frac{V(x)Q}{I\cdot b}$$

תנודות אורכיות

בעיית התגובה בתדר $\boxed{\left(AE\hat{u}'\right)' + \Omega^2\rho\hat{u}' - \hat{f} = 0 \quad 0 < x < L}$

1) מצב מתמיד. 2) כל העומסים וגם התגובה הם בתדר Ω נתון.

בעיית התגובה בזמן של תנודות אורכיות של מוט

$$\boxed{-\left(AEu'\right)' + f = \rho\ddot{u} \quad 0 < x < L}$$

$$u(0,t) = 0 \quad AEu'(L,t) = p(t)$$

$$u(x,0) = 0 \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x)$$

תנודות עצמיות- פתרון בהפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית.

$$\frac{\left(AE\phi'\right)'}{\rho\phi} = \frac{\ddot{T}}{T} = -\lambda \Rightarrow T = A\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right) \Rightarrow \boxed{\lambda = \omega^2}$$

מציאת $\lambda_n = \omega_n^2$: $\boxed{\left(AE\phi_n'\right)' + \lambda\rho\phi_n = 0}$

אופני תנודה: ω_n- תדרים עצמיים. ϕ_n - פונקציות עצמיות.

תנודות רוחביות

תדרים עצמיים – פתרון בהפרדת משנים

$$\boxed{EIu^{IV} + \rho\ddot{u} = 0} \qquad \beta^4 \triangleq \frac{\omega^2\rho}{EI}$$

$$\phi(x) = a_1\sin(\beta x) + a_2\cos(\beta x) + a_3\sinh(\beta x) + a_4\cosh(\beta x)$$

בעיית המצב המתמיד (תגובה בתדר)

$$\boxed{EIu^{IV}+\rho\ddot{u}=f}\Rightarrow\left(c\triangleq\sqrt{\frac{EI}{\rho}}\right)\Rightarrow c^2\hat{u}^{IV}-\Omega^2\hat{u}=\frac{f}{\rho}$$

$$u_{ss}\left(x,t\right)=\hat{u}\left(x\right)\sin\left(\Omega t\right)\quad\text{or}\quad\hat{u}\left(x\right)\cos\left(\Omega t\right)$$

$$\hat{u}=\hat{u}_H+\hat{u}_P\qquad\hat{u}_P=-\frac{f}{\Omega^2\rho}\qquad\left(f=const\right)$$

תגובה בזמן

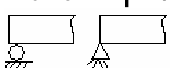
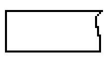
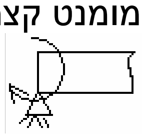
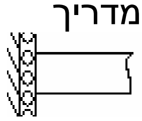
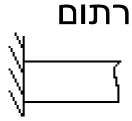
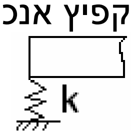
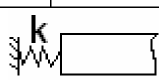
$$\boxed{EIu^{IV}+\rho\ddot{u}=f\left(x,t\right)}$$

תנודות זויתיות

אורכיות	$u\left(x,t\right)$	f	P	A	E
זוויתיות	$\theta\left(x,t\right)$	M	T	$J_O=\frac{\pi R^4}{2}$ כאשר לא מעגל: $J=2\int\psi dA$	$G=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$

אורכיות	ρ	$c=\sqrt{\frac{EA}{\rho}}$	$\left(EAu'\right)'+f=\rho\ddot{u}$
זוויתיות	$I_\rho=\frac{I_P\rho}{A}$ $I_P=\int_A r^2dA$	$c=\sqrt{\frac{GJA}{I_P\rho}}=\sqrt{\frac{GA}{\rho}}$	$\boxed{\left(GJu'\right)'+M=I_\rho\ddot{\theta}}$

קטלוג ת. שפה

סמך פשוט  $u=0$, $u''=0$	חופשית  $u''=0$, $u'''=0$	מומנט קצה  $u=0$, $EIu''=M_0$
מדריך  $u'=0$, $u'''=0$	רתום  $u=0$, $u'=0$	קפיץ אנכי  $u''=0$, $EIu'''=-ku$
קפיץ אופקי  $EAu'=-ku$		

<u>אנליזה מודלית</u>

פונקציות ϕ_n אורתוגונאליות: $\int \phi_n \rho \phi_m \underset{n\neq m}{=} 0 = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$

נרמול: $A = \dfrac{1}{\sqrt{\int_0^L \phi_n^*(x)\rho(x)dx}}$. בד"כ: $A = \sqrt{\dfrac{2}{\rho L}}, \quad \phi_n^*(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$

$$g(x) = \sum g_n \phi_n(x), \qquad g_n = \int_0^L g(x)\rho(x)\phi_n(x)dx$$

$$u(x,t) = \sum_n \phi_n(x) T_n(t)$$