תורה אלקטרומגנטית (114245)

- בהצלחה -

חן אבינדב אביב תשס״ו

מבוא לאלקטרוסטטיקה

$$\vec E(\vec x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i\frac{\vec x-\vec x_i}{\left|\vec x-\vec x_i\right|^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\vec x')\frac{\vec x-\vec x'}{\left|\vec x-\vec x'\right|^3}d^3x'$$

חוק גאוס – צורה אינטגרלית:

$$\oint_S \vec E\cdot\hat n\, dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec x)d^3x=\frac{Q_{\text{in V}}}{\varepsilon_0}$$

צורה דיפרנציאלית:

$$\vec\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

מחוק גאוס והעובדה ש- $\vec\nabla\times\vec E=0$ מתקבלים תנאי השפה על $\vec E$:

$$\left(\vec E_2-\vec E_1\right)\cdot\hat n_{1\to2}=\sigma/\varepsilon_0,\quad \left(\vec E_2-\vec E_1\right)\times\hat n_{1\to2}=0$$

כאשר $\hat n$ הוא וקטור יחידה המכוון מתחום 1 ל- 2, ו- σ היא צפיפות המטען המשטחית שקיימת על השפה.

מכיוון ש- $\vec\nabla\times\vec E=0$ ניתן להגדיר פוטנציאל סקלרי $\phi(\vec x)$ כך ש- $\vec E=-\vec\nabla\phi$. פורמלית, הפיתרון ל- ϕ נתון על ידי:

$$\phi(\vec x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\vec x')\frac{1}{\left|\vec x-\vec x'\right|}d^3x'$$

ועבור התפלגות מטען משטחית, $\rho(\vec x')d^3x'=\sigma(\vec x')dS'$, כלומר:

$$\phi(\vec x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\sigma(\vec x')\frac{1}{\left|\vec x-\vec x'\right|}dS'$$

משוואת פואסון:

$$\vec\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

דיפול חשמלי ושכבת דיפול

השדה החשמלי ב- $\vec x$ כתוצאה מדיפול $\vec p$ הממוקם ב- $\vec x_0$ הוא:

$$\vec E(\vec x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\hat n(\vec p\cdot\hat n)-\vec p}{\left|\vec x-\vec x_0\right|^3}-\frac{4\pi}{3}\vec p\,\delta(\vec x-\vec x_0)\right]$$

כאשר $\hat n$ הוא וקטור יחידה המכוון מ- $\vec x_0$ ל- $\vec x$. מומנט הדיפול $\vec p$ מוגדר לפי: $\vec p=\int\vec x'\rho(\vec x')d^3x'$ (כאשר שני מטענים $\pm q$ נמצאים במרחק 2ℓ זה מזה, הדיפול שלהם הוא $|p|=q\ell$)

פוטנציאל של דיפול חשמלי הוא:

$$\phi(\vec x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot(\vec x-\vec x_0)}{\left|\vec x-\vec x_0\right|^3}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\vec p\cdot\vec\nabla\frac{1}{\left|\vec x-\vec x_0\right|}$$

למשל, עבור דיפול חשמלי לאורך ציר z ($\vec p=p\hat z$) מקבלים:

$$E_r=\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\quad E_\theta=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\quad E_\varphi=0$$

אנרגית האינטראקציה בין שני דיפולים $\vec p_1,\vec p_2$ הנמצאים ב- $\vec x_1,\vec x_2$:

$$W=\frac{\vec p_1\cdot\vec p_2-3(\hat n\cdot\vec p_1)(\hat n\cdot\vec p_2)}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec x_1-\vec x_2\right|^3}$$

כאשר $\hat n$ הוא וקטור יחידה בין $\vec x_1,\vec x_2$ (כיוונו לא משנה).

מומנט הכוח שפועל על דיפול בנוכחות שדה חיצוני: $\vec N=\vec p\times\vec E_{\text{ext}}$

שכבת דיפול – נוצרת על ידי שני משטחים הטעונים ב- $\pm\sigma(\vec x)$ (קובעים $\sigma>0$) שבכל נקודה $\vec x$ המרחק ביניהם הוא $d(\vec x)$. בגבול שבו מקרבים את שתי השכבות זו לזו כאשר המכפלה σd קבועה:

$$\lim_{d(\vec x)\to0}\sigma(\vec x)d(\vec x)=D(\vec x)$$

מתקבל פוטנציאל של:

$$\phi(\vec x)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S D(\vec x')d\Omega'$$

הזווית המרחבית נמדדת מנקודת התצפית $\vec x$ אל הנקודה $\vec x'$ על המשטח S. במעבר דרך שכבת דיפול ישנה קפיצה בפוטנציאל לפי: $\phi_+-\phi_-=D/\varepsilon_0$ (ϕ_+ הוא הפוטנציאל בצד החיובי של השכבה)

אנרגיה פוטנציאלית בריק

בהינתן n מטענים q_i ב- $\vec x_i$, האנרגיה הפוטנציאלית שלהם היא:

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}\frac{q_iq_j}{\left|\vec x_i-\vec x_j\right|}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_iq_j}{\left|\vec x_i-\vec x_j\right|}$$

כאשר מתעלמים מאיברים בסכום עם $i=j$ ("אנרגיה עצמית").
עבור התפלגות מטען רציפה הסכום מוחלף באינטגרל:

$$W=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int\int\frac{\rho(\vec x)\rho(\vec x')}{\left|\vec x-\vec x'\right|}d^3x\,d^3x'=\frac12\int\rho(\vec x)\phi(\vec x)d^3x$$

מציבים $\rho=-\varepsilon_0\vec\nabla^2\phi$ ואז מתוך אינטגרציה בחלקים מקבלים:

$$W=-\frac{\varepsilon_0}{2}\int\phi\vec\nabla^2\phi\,d^3x=\frac{\varepsilon_0}{2}\int\left|\vec\nabla\phi\right|^2d^3x=\frac{\varepsilon_0}{2}\int\left|\vec E\right|^2d^3x$$

צפיפות האנרגיה היא לפיכך $w=\varepsilon_0\left|\vec E\right|^2/2$.

מקדמי קיבול

בהינתן מערכת של n גופים מוליכים, כאשר כל אחד מוחזק בפוטנציאל V_j, המטען על הגוף ה- i הוא:

$$Q_i=\sum_{j=1}^{n} C_{ij}V_j\qquad(\mathbf{Q}=\mathbf{CV})$$

C_{ii} הוא מקדם הקיבול של המוליך ה- i, ו- C_{ij} הם מקדמי ההשראות. המטריצה $\mathbf C$ היא סימטרית. הקיבול של מוליך שווה למטען עליו, כאשר אותו מוליך נתון בפוטנציאל יחידה, וכל שאר המוליכים בסביבה מוחזקים בפוטנציאל אפס. האנרגיה של מערכת כזו היא:

$$W=\frac12\sum_{i=1}^{n}Q_iV_i=\frac12\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}V_iV_j=\frac12\mathbf V^t\mathbf{CV}$$

פתרון בעיות תנאי שפה עם פונקצית גרין

פונקצית גרין $G(\vec x,\vec x')$ היא כזו המקיימת:

$$\vec\nabla'^2\vec G(\vec x,\vec x')=-4\pi\delta(\vec x-\vec x')$$

בתלת מימד הפיתרון הוא:

$$G(\vec x,\vec x')=\frac{1}{\left|\vec x-\vec x'\right|}+F(\vec x,\vec x')$$

כאשר $\vec\nabla'^2F=0$. לכל G כזו מתקיימת המשוואה האינטגרלית ל- ϕ:

$$\phi(\vec x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\vec x')G(\vec x,\vec x')d^3x'+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[G\frac{\partial\phi}{\partial\hat n'}-\phi\frac{\partial G}{\partial\hat n'}\right]dS'$$

בבעיות שלנו יהיה נתון או הפוטנציאל ϕ על השפה S (תנאי שפה דיריכלה), או נגזרתו $\partial\phi/\partial\hat n'$, כלומר השדה, עליה (נוימן), אך לא שניהם. לכן על מנת לקבל מכאן פיתרון, עלינו להעלים את אחד האיברים מהאינטגרל המשטחי. עושים זאת בעזרת בחירה של G (החופש נתון על ידי F) כך שיתקיים:

Dirichlet: $\quad G_D(\vec x,\vec x')=0 \qquad \forall\vec x'\in S$

Neumann: $\quad \frac{\partial G_N}{\partial\hat n'}(\vec x,\vec x')=-\frac{4\pi}{|S|}\qquad\forall \vec x'\in S$

כאשר $|S|$ הוא השטח הכולל של משטח השפה S. הפתרונות הם, בהתאמה:

$$\phi_D(\vec x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec x')G_D(\vec x,\vec x')d^3x'-\frac{1}{4\pi}\oint_S\phi\frac{\partial G_D}{\partial\hat n'}dS'$$

$$\phi_N(\vec x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec x')G_N(\vec x,\vec x')d^3x'+\frac{1}{4\pi}\oint_S G_N\frac{\partial\phi}{\partial\hat n'}dS'+\langle\phi\rangle_S$$

$\hat n'$ הוא וקטור יחידה בניצב למשטח השפה, בכיוון מתוך הבעיה אל מחוצה לה (כלומר, מהתחום שבו אנו מעוניינים למצוא את הפוטנציאל אל התחום האחר).
באגף ימין מופיעים ϕ או $\partial\phi/\partial\hat n'$, שידועים לנו על השפה S, ו- $\langle\phi\rangle_S$ הוא ממוצע ϕ על פני S:

$$\langle\phi\rangle_S=\frac{1}{|S|}\oint_S\phi(\vec x')dS'$$

לרוב נתקלים בבעיות נוימן שהן חיצוניות לתחום מסויים, ואז משטח השפה S הוא אינסופי, ונקבל תנאי הומוגני $\partial G_N/\partial\hat n'=0$, וכן $\langle\phi\rangle_S=0$.

אלמנטי אורך, שטח ונפח בקואורדינטות שונות

$$dl = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\varphi} \qquad dl = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$$

$$dS = r^2\sin\theta d\theta d\varphi\hat{r} \,/\, r\sin\theta dr d\varphi\hat{\theta} \,/\, rdrd\theta\hat{\varphi} \qquad dS = \rho d\varphi dz\hat{\rho} \,/\, d\rho dz\hat{\varphi} \,/\, \rho d\varphi d\rho\hat{z}$$

$$dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \quad \left(J = r^2\sin\theta\right) \qquad dV = \rho d\rho d\varphi dz \quad \left(J = \rho\right)$$

(את אלמנט השטח המתאים לחישוב בוחרים לפי כיוון הנורמל שלו)

שיטת הדמויות ופונקצית גרין

בשיטה זו מציבים מטעני דמות מחוץ לתחום שבו אנו מעוניינים לחשב את הפוטנציאל או השדה, כך שאותם מטעני דמות ביחד עם המטענים האמיתיים הנתונים בבעיה, יקיימו את תנאי השפה של הבעיה. למשל, בהינתן קליפה כדורית מוליכה ומוארקת, מהו הפוטנציאל בנקודה $\vec{x}$ כלשהי מחוץ לקליפה, בנוכחות מטען נקודתי q' בנקודה $\vec{x}'$? עלינו לחפש באיזו נקודה $\vec{x}''$ בתוך הקליפה להציב את מטען הדמות q'', כך שנקבל פוטנציאל אפס על הקליפה.

הפיתרון הוא:
$$q'' = -\frac{aq'}{\left|\vec{x}'\right|}, \qquad \vec{x}'' = \frac{a^2}{\left|\vec{x}'\right|^2}\vec{x}'$$

כאשר a הוא רדיוס הקליפה. ישנו קשר הדוק בין שיטת הדמויות ופונקציות גרין. בפונקציה $G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)$, $\vec{x}$ היא הנקודה שבה אנו מחשבים את הפוטנציאל כתוצאה ממטען יחידה ב-$\vec{x}'$, על כל הדמויות שהוא יוצר בהתאם לתנאי השפה. לכן, פונקצית גרין לבעיה של הקליפה המוליכה והמוארקת היא:

$$G\left(\vec{x},\vec{x}'\right) = \frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|} - \frac{a}{r'\left|\vec{x}-\left(a^2/r'^2\right)\vec{x}'\right|}$$

$$= \frac{1}{\left(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(r^2r'^2/a^2+a^2-2rr'\cos\gamma\right)^{1/2}}$$

כאשר γ היא הזווית בין $\vec{x}$ ל-$\vec{x}'$, ובקואורדינטות כדוריות:

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\left(\varphi-\varphi'\right)$$

הפיתרון באופן מפורש לבעית דיריכלה החיצונית לקליפה הוא:

$$\phi\left(\vec{x}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}\phi\left(a,\theta',\varphi'\right)\frac{a\left(x^2-a^2\right)}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\gamma\right)^{3/2}}d\Omega'$$

כאשר הפוטנציאל על השפה $r=a$ כבר ידוע לנו. לבעיה הפנימית הופכים את סימן הפיתרון. אם נתונה בנוסף גם התפלגות מטען בבעיה, יש להוסיף את הפוטנציאל שלה לפיתרון.

אפשר לרשום את פונקצית גרין הזו גם בעזרת $Y_{\ell m}$, שכן מתקיים:

$$\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|} = 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{1}{2\ell+1}\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}Y_{\ell,m}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{\ell,m}\left(\theta,\varphi\right)$$

ואם כבר אנחנו מתפרעים, אפשר להכליל את הפיתרון לבעיה של שתי קליפות (כדוריות מוליכות) ומוארקות ברדיוסים $b>a$:

$$G\left(\vec{x},\vec{x}'\right) = 4\pi\sum_{\ell,m}\frac{Y_{\ell,m}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{\ell,m}\left(\theta,\varphi\right)}{\left(2\ell+1\right)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2\ell+1}\right]}\left(r_<^{\ell}-\frac{a^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{\ell+1}}-\frac{r_>^{\ell}}{b^{2\ell+1}}\right)$$

משוואת לפלס בקואורדינטות כדוריות

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\phi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

מבצעים הפרדת משתנים ומציעים פיתרון מהצורה:

$$\phi\left(r,\theta,\varphi\right) = \frac{U\left(r\right)}{r}P\left(\theta\right)Q\left(\varphi\right)$$

מהצבה למשוואה מקבלים משוואות לכל פונקציה בנפרד:

$$\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{\ell\left(\ell+1\right)}{r^2}U = 0, \qquad \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[\ell\left(\ell+1\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0$$

כאשר m,ℓ הם קבועים הפרדה. את שתי המשוואות הראשונות ניתן לפתור ולקבל:
$$U\left(r\right) = Ar^{\ell+1} + Br^{-\ell}, \qquad Q\left(\varphi\right) = e^{\pm im\varphi}$$

אם מרשים את כל תחום הזוויות ל-φ, עלינו לדרוש ש-m יהיה שלם. המשוואה שקיבלנו ל-P היא (כמעט) משוואת לג'נדר.

פיתוח בפונקציות אורתוגונליות

נניח נתון אוסף פונקציות $\left\{U_n\left(\xi\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת בקטע $\left(a,b\right)$ ומקיימות את תנאי האורתונורמליות:

$$\int_a^b U_n^*\left(\xi\right)U_m\left(\xi\right)d\xi = \delta_{nm}$$

אזי ניתן לפתח כל פונקציה $f\left(\xi\right)$ בקטע $\left(a,b\right)$ לפי אותן פונקציות:

$$f\left(\xi\right) = \sum_{n=1}^{\infty}a_nU_n\left(\xi\right), \qquad a_n = \int_a^b U_n^*\left(\xi\right)f\left(\xi\right)d\xi$$

הטור אכן יתכנס לפונקציה כאשר אוסף הפונקציות מקיים את תכונת השלמות:
$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n^*\left(\xi'\right)U_n\left(\xi\right) = \delta\left(\xi'-\xi\right)$$

דוגמה: טור פורייה. בקטע $\left(-a/2,a/2\right)$ הפונקציות הן:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}, \qquad \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right), \qquad \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)$$

עם m טבעי. הפיתוח של $f\left(x\right)$ בפונקציות אלה הוא:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) + B_m\sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\right]$$

$$\begin{Bmatrix}A_m\\B_m\end{Bmatrix} = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2}f\left(x\right)\begin{Bmatrix}\cos\\\sin\end{Bmatrix}\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)dx$$

בגבול שבו הקטע $\left(a,b\right)$ הופך לאינסופי, אינדקס הסכימה הופך למשתנה רציף. כך למשל במקרה של התמרת פורייה:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A\left(k\right)e^{ikx}dk, \qquad A\left(k\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}f\left(x\right)dk$$

עם תנאי האורתונורמליות ותכונת השלמות (בהתאמה):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik\left(x-x'\right)}dk = \delta\left(x-x'\right), \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\left(k-k'\right)x}dx = \delta\left(k-k'\right)$$

משוואת לפלס בקואורדינטות קרטזיות

$$\vec{\nabla}^2\phi\left(x,y,z\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

מהפרדת משתנים $\phi\left(x,y,z\right) = X\left(x\right)Y\left(y\right)Z\left(z\right)$ מקבלים:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

כל אחד מהאיברים צריך להיות שווה לקבוע, ונגדיר:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2, \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2, \qquad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \alpha^2+\beta^2$$

הערכים של α,β נקבעים מתוך תנאי השפה של הבעיה.

דוגמה: תיבה עם מימדים $\left(a,b,c\right)$ בכיווני $\left(x,y,z\right)$ בהתאמה. נניח כי כל הפאות נתונות בפוטנציאל אפס, פרט לפאה $z=c$ שעליה יש פוטנציאל ידוע $V\left(x,y\right)$. מתנאי ש-$\phi=0$ עבור $x=0$, $y=0$ ו-$z=0$ (בנפרד) מקבלים שהפיתרונות הם מהצורה:

$$X = \sin\alpha x, \qquad Y = \sin\beta y, \qquad Z = \sinh\left(z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)$$

ועל מנת שהפוטנציאל יתאפס על $x=a$ ו-$y=b$ המקדמים הם:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad \beta_m = \frac{m\pi}{b}$$

$$\gamma_{n,m} = \sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$$

ואז הפיתרון הכללי נתון על ידי:

$$\phi\left(x,y,z\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{n,m}\sin\left(\alpha_nx\right)\sin\left(\beta_my\right)\sinh\left(\gamma_{n,m}z\right)$$

והקבועים $A_{n,m}$ נקבעים מתוך הדרישה $\phi\left(x,y,c\right) = V\left(x,y\right)$:

$$A_{n,m} = \frac{4}{ab\sinh\left(\gamma_{n,m}c\right)}\int_0^a dx\int_0^b dy\,V\left(x,y\right)\sin\left(\alpha_nx\right)\sin\left(\beta_my\right)$$

אם לתיבה יש פוטנציאל שונה מאפס על פאות נוספות, פותרים באותו אופן לכל פאה בנפרד ומשתמשים בעיקרון הסופרפוזיציה.

פולינומי לג'נדר

לבעיות עם סימטריה אזימוטלית לא יכולה להיות תלות של הפוטנציאל ב- φ, ולכן מקבלים $m=0$ בפיתרון למשוואת לפלס בקואורדינטות כדוריות. עבור $P(x)=P(\cos\theta)$ מתקבלת משוואת לג'נדר:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx}\right]+\ell(\ell+1)P=0,\qquad -1\le x\le 1$$

הפתרונות למשוואה זו הם פולינומי לג'נדר. הראשונים מביניהם הם:

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$$

נוסחת רודריגז:

$$P_\ell(x)=\frac{1}{2^\ell\,\ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[\left(x^2-1\right)^\ell\right]$$

פולינומי לג'נדר מהווים סט שלם של פונקציות א"ג בקטע $x\in(-1,1)$:

$$\int_{-1}^{1}P_{\ell'}(x)P_\ell(x)\,dx=\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell'\ell}$$

לפיכך ניתן לפתח כל פונקציה של x בקטע $(-1,1)$ בפונקציות אלה:

$$f(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell P_\ell(x),\qquad A_\ell=\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_\ell(x)\,dx$$

או במונחים של פונקציה של θ בקטע $(0,\pi)$:

$$g(\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha_\ell P_\ell(\cos\theta),\qquad \alpha_\ell=\frac{2\ell+1}{2}\int_0^\pi g(\theta)P_\ell(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$P_\ell(x)$ היא זוגית כאשר ℓ זוגי, ולהיפך, כלומר: $P_\ell(-x)=(-1)^\ell P_\ell(x)$.

מתקיים גם $P_\ell(1)=1$ לכל ℓ (כלומר עבור $\theta=0$, על ציר z).

פולינומי לג'נדר מקיימים מספר קשרי רקורסיה, וביניהם:

$$\int_{x_1}^{x_2}P_\ell(x)\,dx=\frac{1}{2\ell+1}\left(P_{\ell+1}(x)-P_{\ell-1}(x)\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{dP_{\ell+1}}{dx}-\frac{dP_{\ell-1}}{dx}-(2\ell+1)P_\ell=0,\qquad (\ell+1)P_{\ell+1}-(2\ell+1)xP_\ell+\ell P_{\ell-1}=0$$

$$\frac{dP_{\ell+1}}{dx}-x\frac{dP_\ell}{dx}-(\ell+1)P_\ell=0,\qquad \left(x^2-1\right)\frac{dP_\ell}{dx}-\ell xP_\ell+\ell P_{\ell-1}=0$$

בעיות שפה עם סימטריה אזימוטלית

$m=0$ ואז פתרון כללי נתון על ידי הטור:

$$\phi(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_\ell r^\ell+B_\ell r^{-(\ell+1)}\right]P_\ell(\cos\theta)$$

כאשר A_ℓ,B_ℓ נקבעים מתוך תנאי השפה. ייתכנו מספר סוגים של תנאי השפה – באינסוף (שדה קבוע, או פוטנציאל אפס), בראשית (פוטנציאל סופי), ברדיוס מסויים, בזווית מסויימת, וכו'. כך למשל אם הבעיה כוללת את הראשית, חובה לדרוש $B_\ell=0$ לכל ℓ על מנת לקבל פוטנציאל סופי שם.

הפיתרון תקף בכל המרחב, ובפרט הוא נכון על ציר z, כלומר עבור $\theta=0$. לפיכך בחלק החיובי של ציר z נקבל שהפוטנציאל הוא:

$$P_\ell(1)=1\quad\Rightarrow\quad \phi(z=r)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_\ell r^\ell+B_\ell r^{-(\ell+1)}\right]$$

ולכן, מתוך יחידות הפיתרון, אם ניתן למצוא את הפוטנציאל לאורך ציר z כטור ב- r, הרי שאנחנו יודעים את הקבועים A_ℓ,B_ℓ ואז הפיתרון בכל המרחב ידוע לנו – פשוט כופלים כל איבר בטור ב- $P_\ell(\cos\theta)$.

ניתן לפתח את הפוטנציאל ב- $\vec{x}$ כתוצאה ממטען נקודתי ב- $\vec{x}'$ (פונקצית גרין) לפי פולינומי לג'נדר:

$$\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\cos\gamma)$$

כאשר $r_<=\min\left\{\left|\vec{x}\right|,\left|\vec{x}'\right|\right\},\ r_>=\max\left\{\left|\vec{x}\right|,\left|\vec{x}'\right|\right\}$.

ספריות הרמוניות ופתרון בעיות שפה בקואורדינטות כדוריות

בהיעדר סימטריה אזימוטלית, מרשים פתרונות עם $m\neq 0$. כעת הפתרונות ל- $P(\theta)$ תלויים ב- ℓ וב- m, ונהוג לרשום את כל החלק הזוויתי של הפיתרון בעזרת פונקציות $Y_{\ell,m}$:

$$Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

כאשר P_ℓ^m הם פולינומי לג'נדר המוכללים.

פיתרון כללי לפוטנציאל הוא לפיכך מהצורה:

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left[A_{\ell,m}r^\ell+B_{\ell,m}r^{-(\ell+1)}\right]Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

פונקציות אלה הן אורתונורמליות ומהוות סט שלם, כך שמתקיים:

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi Y_{\ell',m'}^*(\theta,\varphi)Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta=\delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_{\ell,m}^*(\theta',\varphi')Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)=\delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\theta-\cos\theta')$$

(התכונה השנייה היא יחס השלמות). מספר תכונות נוספות:

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\varphi)=(-1)^m Y_{\ell,m}^*(\theta,\varphi)$$

$$Y_{\ell,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,P_\ell(\cos\theta)$$

$$Y_{\ell,m}(\pi-\theta,\varphi+\pi)=(-1)^\ell Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

$$Y_{\ell,m}(\pi-\theta,\varphi)=(-1)^{\ell+m}Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

$$Y_{\ell,m}(\theta,\varphi+\pi)=(-1)^m Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

וכמה פונקציות לדוגמה:

$$Y_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\qquad Y_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1,1}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi},\qquad Y_{1,-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_{2,2}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{2i\varphi},\qquad Y_{2,1}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_{2,0}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta-\tfrac{1}{2}\right)$$

ניתן לפתח כל פונקציה של θ,φ ב- $Y_{\ell,m}$ לפי:

$$g(\theta,\varphi)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}A_{\ell,m}Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

$$A_{\ell,m}=\int_{4\pi}Y_{\ell,m}^*(\theta,\varphi)g(\theta,\varphi)\,d\Omega$$

בשביל אורי ויינברג – משפט החיבור:

$$P_\ell(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_{\ell,m}^*(\theta',\varphi')Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

כאשר $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$.

מכאן מקבלים את הצורה המפורשת ביותר לפונקצית גרין, או לפוטנציאל בנקודה $\vec{x}$ כתוצאה ממטען נקודתי ב- $\vec{x}'$:

$$\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}=4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{1}{2\ell+1}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}Y_{\ell,m}^*(\theta',\varphi')Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

לרוב ניתן לפשט חישובים על ידי הזהויות הבאות:

$$1=\sqrt{4\pi}\,Y_{0,0},\qquad \sin\theta\cos\varphi=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[Y_{1,-1}-Y_{1,1}\right]$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_{1,0},\qquad \sin\theta\sin\varphi=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[iY_{1,-1}+iY_{1,1}\right]$$

משפטים אינטגרליים

$$\int_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot\hat{n}\,dS=\oint_{\partial S}\vec{A}\cdot d\vec{l}\qquad \int_V\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d^3x=\oint_{\partial V}\vec{A}\cdot\hat{n}\,dS$$

$$\int_S\hat{n}\times\vec{\nabla}f\,dS=\oint_{\partial S}f\,d\vec{l}\qquad \int_V\vec{\nabla}f\,d^3x=\oint_{\partial V}f\,\hat{n}\,dS$$

$$\int_S\left(\hat{n}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{A}\,dS=\oint_{\partial S}d\vec{l}\times\vec{A}\qquad \int_V\vec{\nabla}\times\vec{A}\,d^3x=\oint_{\partial V}\hat{n}\times\vec{A}\,dS$$

(כאשר ∂V הוא משטח השפה הסגור של V ו- ∂S הוא המסלול הסגור שמגדיר את S)

משוואת לפלס בקואורדינטות גליליות

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

מבצעים הפרדת משתנים $\phi(\rho,\varphi,z)=R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$:

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-k^2Z=0,\qquad \frac{d^2Q}{d\varphi^2}+\nu^2Q=0$$

$$\Rightarrow\quad Z(z)=e^{\pm kz},\qquad Q(\varphi)=e^{\pm i\nu\varphi}$$

הערכים של k,ν נקבעים מתוך תנאי השפה. כאשר <u>כל תחום הזוויות</u> של φ מותר, ν חייב להיות שלם על מנת להבטיח חד-ערכיות של $Q(\varphi)$. עבור הפונקציה הרדיאלית מתקבלת המשוואה:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(k^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0$$

ולאחר החלפת משתנים $x=k\rho$ מקבלים את <u>משוואת בֶּסֶל</u>:

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0$$

פונקציות בֶּסֶל

שני פתרונות בלתי-תלויים למשוואת בֶּסֶל הם $J_\nu(x)$ ו- $N_\nu(x)$ המוגדרת לפי:

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

$J_\nu(x)$ היא <u>פונקציית בֶּסֶל מהסוג הראשון</u> מסדר ν, $N_\nu(x)$ היא <u>פונקציית נוימן</u> (או בֶּסֶל מהסוג השני). ההתנהגות <u>האסימפטוטית</u> של $J_\nu(x)$ עבור $x\ll 1$ היא כמו $(x/2)^\nu$, בעוד ש- $N_\nu(x)$ מתנהגת שם כמו $(2/x)^\nu$ (או $\ln(x/2)$ עבור $\nu=0$). כלומר, $J_\nu(x)$ <u>שואפת לאפס</u> בראשית, בעוד ש- $N_\nu(x)$ <u>מתבדרת</u> שם.

לשתי הפונקציות יש <u>אינסוף שורשים</u>. נתעניין בעיקר בשורשים של $J_\nu(x)$, ונסמן $J_\nu(X_{\nu,n})=0$ כאשר $n=1,2,\ldots$.

השורשים הראשונים ל- ν קטנים הם:

$$\nu=0:\qquad X_{0,n}=2.405,\ 5.520,\ 8.645,\ \ldots$$

$$\nu=1:\qquad X_{1,n}=3.832,\ 7.016,\ 10.173,\ \ldots$$

$$\nu=2:\qquad X_{2,n}=5.136,\ 8.417,\ 11.620,\ \ldots$$

ועבור n גדולים, השורשים נתונים אסימפטוטית על ידי הנוסחה:

$$X_{\nu,n}\cong n\pi+\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

אוסף הפונקציות $\left\{\sqrt{\rho}\,J_\nu\left(\frac{X_{\nu,n}\rho}{a}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ עם $\nu\geq 0$ קבוע, מהוות <u>סט שלם</u> בקטע $0\leq\rho\leq a$. הן אורתוגונליות לפי:

$$\int_0^a\rho J_\nu\left(\frac{X_{\nu,n'}\rho}{a}\right)J_\nu\left(\frac{X_{\nu,n}\rho}{a}\right)d\rho=\frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}\left(X_{\nu,n}\right)\right]^2\delta_{n'n}$$

ולפיכך <u>ניתן לפתח כל פונקציה</u> של ρ בקטע זה באופן הבא:

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{\nu,n}J_\nu\left(\frac{X_{\nu,n}\rho}{a}\right)$$

$$A_{\nu,n}=\frac{2}{a^2J_{\nu+1}^2\left(X_{\nu,n}\right)}\int_0^a\rho f(\rho)J_\nu\left(\frac{X_{\nu,n}\rho}{a}\right)d\rho$$

שונות

$$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$\frac{1}{(1+x)^n}\approx 1-nx$$

שדה של תיל אינסופי טעון אחיד ב- λ: $\lambda/2\pi\varepsilon_0 r$

שדה של לוח אינסופי: $\sigma/2\varepsilon_0$

חוק אוהם: $\vec{J}=\sigma\vec{E}$

קוודרופול סימטרי

לקוודרופול חשמלי עם סימטריה צירית סביב ציר z טנזור מהצורה:

$$\mathbf{Q}\propto\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

המקדם תלוי במאפייני הקוודרופול

בעיות שפה בקואורדינטות גליליות

כדוגמה ניקח <u>גליל סופי</u> בגובה L ורדיוס a. נניח כי הפוטנציאל על המעטפת ועל המכסה התחתון הוא אפס, ועל המכסה העליון ($z=L$) הפוטנציאל הוא $V(\rho,\varphi)$.

על מנת לקבל $\phi=0$ על $\rho=a$ ו- $z=0$ (בנפרד) הפתרונות צריכים להיות מהצורה:

$$Z(z)=\sinh kz,\qquad Q(\varphi)=A\sin m\varphi+B\cos m\varphi$$

כאשר m מספר שלם ו- k ייקבע מתוך תנאי השפה. <u>החלק הרדיאלי</u> יהיה מהצורה:

$$R(\rho)=C\cdot J_m(k\rho)+D\cdot N_m(k\rho)$$

אך כזכור, פונקציית נוימן N_m <u>מתבדרת</u> בראשית, ולכן על מנת לקבל <u>פוטנציאל סופי</u> עבור $\rho=0$ נדרוש $D=0$. על מנת שהפוטנציאל יתאפס גם ב- $\rho=a$, צריך ש- $k\rho$ יהיה שורש של J_m, כלומר:

$$k_{m,n}=\frac{X_{m,n}}{a},\qquad n=1,2,\ldots$$

כאשר $X_{m,n}$ הם <u>שורשי פונקציית בֶּסֶל</u> מהסוג הראשון מסדר m. לכן הפיתרון הוא:

$$\phi(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{X_{m,n}\rho}{a}\right)\sinh\left(\frac{X_{m,n}z}{a}\right)\left(A_{m,n}\sin m\varphi+B_{m,n}\cos m\varphi\right)$$

והקבועים $A_{m,n},B_{m,n}$ נקבעים מתוך התנאי $\phi(\rho,\varphi,L)=V(\rho,\varphi)$:

$$\begin{Bmatrix}A_{m,n}\\B_{m,n}\end{Bmatrix}=\frac{2/\sinh\left(k_{m,n}L\right)}{\pi a^2J_{m+1}^2\left(k_{m,n}a\right)}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho V(\rho,\varphi)J_m\left(k_{m,n}\rho\right)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\\cos m\varphi\end{Bmatrix}d\rho$$

כאשר עבור $m=0$ מציבים בטור את $B_{0,n}/2$.

פיתוח שדה למולטיפולים

נתעניין ב<u>התפלגות מטען מקומית</u> $\rho(\vec{x})$, ששונה מאפס אך ורק בסביבה קטנה של הראשית. פיתרון כללי לפוטנציאל <u>מחוץ</u> לסביבה זו נתון על ידי:

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{4\pi}{2\ell+1}q_{\ell,m}\frac{Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)}{r^{\ell+1}}$$

כאשר האיברים r^ℓ נפלו מתוך דרישה שהפוטנציאל יתאפס באינסוף. מקדמי הפיתוח $q_{\ell,m}$ נתונים על ידי:

$$q_{\ell,m}=\int Y_{\ell,m}^*(\theta',\varphi')r'^{\ell}\rho(\vec{x}')d^3x'$$

והם מקיימים $q_{\ell,-m}=(-1)^m q_{\ell,m}^*$. בקואורדינטות קרזטיות, הראשונים הם:

$$q_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int\rho(\vec{x}')d^3x'=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\tilde{q}$$

$$q_{1,1}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int(x'-iy')\rho(\vec{x}')d^3x'=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(p_x-ip_y\right)$$

$$q_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int z'\rho(\vec{x}')d^3x'=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z$$

$$q_{2,2}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{25}{2\pi}}\int(x'-iy')^2\rho(\vec{x}')d^3x'=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\left(Q_{1,1}-2iQ_{1,2}-Q_{2,2}\right)$$

$$q_{2,1}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int z'(x'-iy')\rho(\vec{x}')d^3x'=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\left(Q_{1,3}-iQ_{2,3}\right)$$

$$q_{2,0}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int\left(3z'^2-r'^2\right)\rho(\vec{x}')d^3x'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Q_{3,3}$$

$\tilde{q}$ הוא <u>המטען הכולל</u> של ההתפלגות: $\tilde{q}=\int\rho(\vec{x}')d^3x'$

$\vec{p}$ הוא <u>מומנט הדיפול החשמלי</u> שלה: $\vec{p}=\int\vec{x}'\rho(\vec{x}')d^3x'$

ו- $\mathbf{Q}$ הוא <u>טנזור הקוודרופול החשמלי</u>: $Q_{ij}=\int\left(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij}\right)\rho(\vec{x}')d^3x'$

כאשר $\{x_1,x_2,x_3\}=\{x,y,z\}$. ניתן לרשום את הפיתוח במונחים של $\tilde{q},\vec{p},\mathbf{Q}$:

$$\phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\tilde{q}}{r}+\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}Q_{ij}\frac{x_ix_j}{r^5}+\ldots\right]$$

רכיבי השדה החשמלי כתוצאה מאיבר מולטיפולי <u>ספציפי</u>, עם ℓ,m מסויימים, הם:

$$\left(E_r\right)_{\ell,m}=\frac{(\ell+1)}{(2\ell+1)\varepsilon_0}q_{\ell,m}\frac{1}{r^{\ell+2}}Y_{\ell,m}$$

$$\left(E_\theta\right)_{\ell,m}=-\frac{1}{(2\ell+1)\varepsilon_0}q_{\ell,m}\frac{1}{r^{\ell+2}}\frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial\theta}$$

$$\left(E_\varphi\right)_{\ell,m}=-\frac{1}{(2\ell+1)\varepsilon_0}q_{\ell,m}\frac{1}{r^{\ell+2}}Y_{\ell,m}\frac{im}{\sin\theta}$$

שדה חשמלי בתווך מקרוסקופי

כאשר עוסקים בתווך מקרוסקופי, המכיל בתוכו אטומים, מולקולות וכו', מגדירים קיטוב חשמלי (פולריזציה, צפיפות נפחית של מומנט דיפול) $\vec{P}$.
ניתן להראות שאז הפוטנציאל נתון על ידי:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\rho(\vec{x}') - \vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{x}')\right]\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}d^3x'$$

כאשר ρ הוא התפלגות המטען החופשי (שאינו קשור לתווך), מסמנים גם ρ_{ext} או ρ_{free}. אך זהו בדיוק הפוטנציאל שנגרם כתוצאה מצפיפות מטען אפקטיבית של $\left[\rho_{\text{ext}}(\vec{x}') - \vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{x}')\right]$, כלומר מתקיים:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{\text{ext}} - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\right)$$

ולכן מגדירים את וקטור ההעתקה החשמלי: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

כך שמתקיים: $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{\text{ext}}$

עבור תווך לינארי איזוטרופי, $\vec{P}$ יהיה באותו כיוון של $\vec{E}$ ולכן ניתן לרשום:

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E},\qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E},\qquad \varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$$

כאן χ_e הוא הסוספטיביליות החשמלית של התווך, ε היא הפרמיטיביות החשמלית של התווך, ו- $\varepsilon/\varepsilon_0$ הוא המקדם הדיאלקטרי שלו. אם התווך הוא גם הומוגני, ε אינו תלוי במקום ואז נקבל: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho_{\text{ext}}}{\varepsilon}$

(הערה: בבעיה עם שני סוגי חומרים, ε_1 ו- ε_2, בגבול שבו $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ נקבל שחומר 2 מתנהג כמוליך ביחס לחומר 1.)

תנאי השפה על $\vec{E},\vec{D}$: $\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)\times\hat{n}_{1\to2} = 0$, $\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)\cdot\hat{n}_{1\to2} = \sigma$

כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה המכוון מתחום 1 ל-2, ו- σ היא צפיפות המטען המשטחית על השפה (שכוללת אך ורק את המטענים החופשיים, ולא את מטען הפולריזציה).
צפיפות המטען שמושרה כתוצאה מפולריזציה נתונה על ידי:

$$\sigma_{\text{pol}} = -\left(\vec{P}_2-\vec{P}_1\right)\cdot\hat{n}_{1\to2}$$

אנרגיה פוטנציאלית אגורה במערכת - ניתן להראות בתווך לינארי מתקיים:

$$W = \frac{1}{2}\int\rho(\vec{x})\phi(\vec{x})d^3x = \frac{1}{2}\int\vec{E}\cdot\vec{D}\,d^3x$$

זו בדיוק הכללה של התוצאה שקיבלנו בריק.
השינוי באנרגיה כתוצאה מהכנסת גוף בנפח V עם מקדם פרמיטיביות ε לתוך שדה חיצוני $\vec{E}_0$, כך שבסוף התהליך השדות הם $\vec{E}$ ו- $\vec{D}$, הוא:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int_V\left(\vec{E}\cdot\vec{D}_0 - \vec{D}\cdot\vec{E}_0\right)d^3x = -\frac{1}{2}\int_V\vec{P}\cdot\vec{E}_0\,d^3x$$

מהביטוי האחרון מקבלים שצפיפות האנרגיה שאצורה בגוף בלבד, תחת ההנחות לעיל, היא: $w = -\tfrac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}_0$

זהויות וקטוריות

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{C}\cdot\vec{D}) - (\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{D})\vec{C} - (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{D}$$

$$\vec{\nabla}(fg) = f(\vec{\nabla}g) + g(\vec{\nabla}f)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla}\times(f\vec{A}) = f(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{\nabla}f\times A$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = (\vec{\nabla}\vec{B})\cdot\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}^2 f = \Delta f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f,\qquad \vec{\nabla}^2\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = 0\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$$

פיתוח אנרגיה למולטיפולים

נתעניין שוב בהתפלגות מטען מקומית $\rho(\vec{x})$ שקיימת רק בנפח V קטן סביב הראשית, ונשים אותה באיזור בו קיים פוטנציאל חיצוני $\phi(\vec{x})$.
האנרגיה שאצורה כעת בהתפלגות המטען היא:

$$W = \int_V\rho(\vec{x})\phi(\vec{x})d^3x$$

בהנחה שהתפלגות המטען מספיק קטנה כך שהפוטנציאל ϕ משתנה באיטיות בסביבתה, ניתן לפתח לטור טיילור את ϕ:

$$\phi(\vec{x}) = \phi(0) + \vec{x}\cdot\vec{\nabla}\phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}x_ix_j\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(0) + \ldots$$

מתוך $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ נקבל שניתן לרשום:

$$\phi(\vec{x}) = \phi(0) - \vec{x}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}x_ix_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \ldots$$

עבור השדה החיצוני $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ (המטענים שיוצרים אותו אינם נמצאים בסביבת הראשית), ולכן:

$$\phi(\vec{x}) = \phi(0) - \vec{x}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j}\left(3x_ix_j - r^2\delta_{ij}\right)\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \ldots$$

ואז הצבה לתוך הנוסחה של W ושימוש בהגדרת המומנטים נותנת:

$$W = \tilde{q}\phi(0) - \vec{p}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j}Q_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \ldots$$

חשוב להבחין – בנוסחה זו $\phi,\vec{E}$ הם מאפיינים של השדה החיצוני שבו שמנו את התפלגות המטען המקומית, בעוד ש- $\tilde{q},\vec{p},\mathbf{Q}$ הם המומנטים של ההתפלגות הזו.

זהויות ומשפטי גרין

זהות גרין הראשונה והשנייה (שנקראת גם משפט גרין):

$$\int_V\left(\phi\vec{\nabla}^2\psi + \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi\right)d^3x = \oint_S\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS$$

$$\int_V\left(\phi\vec{\nabla}^2\psi - \psi\cdot\vec{\nabla}^2\phi\right)d^3x = \oint_S\left[\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]dS$$

משפט ההפיכות של גרין: (עבור שתי מערכות עם גיאומטריה זהה)

$$\int_V\rho\phi' d^3x + \int_S\sigma\phi' dS = \int_V\rho'\phi d^3x + \int_S\sigma'\phi dS$$

אופרטורים דיפרנציאלים בקואורדינטות שונות

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z},\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\qquad \leftarrow\uparrow\quad \text{Cartesian}$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z},\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\qquad \leftarrow\uparrow\quad \text{Cylindrical}$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\qquad \leftarrow\downarrow\quad \text{Spherical}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

מבוא למגנטוסטטיקה

משוואת הרציפות: $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$$

$\vec{J}$ הוא צפיפות הזרם – כמות המטען (החיובי) העובר דרך יחידת שטח (בניצב לכיוון הזרם) ביחידת זמן. במגנטוסטטיקה מתקיים: $$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$$

חוק ביו-סבר – השדה המגנטי בנקודה $\vec{x}$ כתוצאה מאלמנט זרם $Id\vec{l}$ שנמצא ב- $\vec{x}'$: $$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\vec{l}\times\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^3}$$

חוק אמפר – הכוח שפועל על לולאת זרם אחת כתוצאה מלולאה שנייה הוא: $$\vec{F}_{12}=-\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\oint_{C_1}\oint_{C_2}\left(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2\right)\frac{\vec{x}_{12}}{\left|\vec{x}_{12}\right|^3}$$

כאשר $\vec{x}_{12}$ הוא וקטור המקום מהנקודה על לולאה 2 לנקודה על לולאה 1.

תוצאה מיידית לתילים אינסופיים מוליכי זרם – השדה המגנטי שיוצר תיל כזה במרחק R ממנו הוא: $$\left|\vec{B}\right|=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$$

והכוח ליחידת אורך שפועל בין שני תילים מוליכי זרם במרחק d זה מזה הוא: $$\frac{dF}{dl}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1I_2}{d}$$

הכוח הוא מושך כאשר הזרמים הם באותו כיוון, ודוחה להיפך.

באופן כללי, הכוח והמומנט שפועלים על גוף עם צפיפות זרם $\vec{J}$ המוכנס לשדה מגנטי חיצוני $\vec{B}$ הם: $$\vec{F}=\int_V\vec{J}\left(\vec{x}\right)\times\vec{B}\left(\vec{x}\right)d^3x,\quad \vec{N}=\int_V\vec{x}\times\left(\vec{J}\times\vec{B}\right)d^3x$$

שדות מגנטיים בחומר

מגנטיזציה (או צפיפות המומנט המגנטי) מוגדרת לפי: $$\vec{M}\left(\vec{x}\right)=\sum\nolimits_i N_i\left\langle\vec{m}_i\right\rangle$$

כאשר N_i הוא מספר החלקיקים מסוג i ליחידת נפח, ו- $\vec{m}_i$ הוא המומנט המגנטי שלהם. הפוטנציאל הוקטורי בחומר הוא סכום של הפוטנציאל כתוצאה מצפיפות הזרם החופשית $\vec{J}_{\text{ext}}$ והפוטנציאל כתוצאה מהמגנטיזציה של החומר $\vec{M}$:

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{J}\left(\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}+\vec{M}\left(\vec{x}'\right)\times\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\left|\vec{x}-\vec{x}'^3\right|}\right]d^3x'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\left[\vec{J}\left(\vec{x}'\right)+\vec{\nabla}'\times\vec{M}\left(\vec{x}'\right)\right]}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}d^3x'$$

ז"א, המגנטיזציה של החומר תורמת "צפיפות זרם אפקטיבית" של $\vec{J}_M=\vec{\nabla}\times\vec{M}$, ולכן מתקיים: $$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left[\vec{J}_{\text{ext}}+\vec{\nabla}\times\vec{M}\right]$$

מגדירים את $\vec{H}$ שמקיים: $$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M},\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}_{\text{ext}}$$

הפרמביליות המגנטית של החומר היא μ והיא מוגדרת לפי $\vec{B}=\mu\vec{H}$. בחומר פרמגנטיים $\mu>\mu_0$, ובחומרים דיאמגנטיים $\mu<\mu_0$).

תנאי השפה שנגזרים מ- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$ הם: $$\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)\cdot\hat{n}_{1\to2}=0,\quad \hat{n}_{1\to2}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{K}$$

כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה המכוון מתחום 1 ל- 2, ו- $\vec{K}$ הוא צפיפות הזרם המשטחית על השפה.

$\vec{H}$ קשור לצפיפות הזרם האמיתית שקיימת בבעיה, בעוד שהמגנטיזציה $\vec{M}$ אחראית לצפיפות הזרם המושרה.

חוק אמפר בצורה מוכללת לשדות בחומר: $$\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\cdot\hat{n}d\vec{S}=\int_S\vec{J}_{\text{ext}}\cdot\hat{n}dS$$

משוואות המגנטוסטטיקה ופוטנציאל וקטורי

באופן כללי, השדה המגנטי שיוצרת צפיפות זרם $\vec{J}\left(\vec{x}\right)$ הוא:

$$\vec{B}\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}\left(\vec{x}'\right)\times\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^3}d^3x'=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}\left(\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}d^3x'$$

ומכאן מקבלים $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, שזו אחת המשוואות הבסיסיות של המגנטוסטטיקה.

מחישוב מפורש של $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ מקבלים:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}\left(\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}d^3x'$$

ובמגנטוסטטיקה $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$ ולכן נקבל: $$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

ניתן לרשום מחדש את המשוואה האחרונה בצורה אינטגרלית, ואז מקבלים את חוק אמפר: $$\oint_C\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int_S\vec{J}\cdot\hat{n}dS=\mu_0I$$

כאשר C היא לולאה סגורה, S הוא המשטח ש- C מגדירה, ו- I הוא סך כל הזרם דרך C.

מכיוון ש- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ ניתן להגדיר פוטנציאל וקטורי $\vec{A}$ כך ש- $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, ואז:

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}d^3x'$$

(בחישוב מפורש של האינטגרל ניתן להפריד רכיבים רק בקואורדינטות קרטזיות)

עד כדי גרדיאנט של פונקציה כלשהי. תחת כיול קולון, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, מקבלים: $$\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$$

בדומה למשוואת פואסון ל- ϕ (עם ρ באגף ימין). במקרה זה הפיתרון ל- $\vec{A}$ הוא זה שמופיע לעיל עד כדי קבוע בלבד (ולא עד כדי גרדיאנט).

מומנט מגנטי

נתעניין בשדה המגנטי בנקודה $\vec{x}$ שיוצר גוף עם צפיפות זרם מקומית $\vec{J}\left(\vec{x}'\right)$, שמוגבלת לסביבה קטנה של הראשית, כלומר $\left|\vec{x}'\right|\ll\left|\vec{x}\right|$. פיתוח טיילור נותן:

$$\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}=\frac{1}{\left|\vec{x}\right|}+\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{\left|\vec{x}\right|^3}+\dots$$

ואז הרכיב ה- i של הפוטנציאל הוקטורי יהיה:

$$A_i\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{\left|\vec{x}\right|}\int J_i\left(\vec{x}'\right)d^3x'+\frac{\vec{x}}{\left|\vec{x}\right|^3}\cdot\int J_i\left(\vec{x}'\right)\vec{x}'d^3x'+\dots\right]$$

האיבר הראשון מתאפס משום ש- $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$, ואת האיבר השני ניתן לרשום מחדש כך שנקבל את הפוטנציאל של דיפול מגנטי: $$\vec{A}\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{\left|\vec{x}\right|^3}$$

והפוטנציאל המגנטי הסקלרי של דיפול מגנטי: $$\phi_M\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{x}}{\left|\vec{x}\right|^3}$$

כאשר $\vec{m}$ הוא המומנט המגנטי של צפיפות הזרם: $$\vec{m}=\int\frac{1}{2}\vec{x}'\times\vec{J}\left(\vec{x}'\right)d^3x'$$

האינטגרנד הוא צפיפות המומנט המגנטי, או מגנטיזציה. ביטוי זה הוא קירוב בלבד, ובפרט נכון רק מחוץ לסביבה שבה קיים הזרם. השדה של דיפול מגנטי הוא:

$$\vec{B}\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{m}\right)-\vec{m}}{\left|\vec{x}\right|^3}-\frac{8\pi}{3}\vec{m}\delta\left(\vec{x}\right)\right]$$

כאשר $\hat{n}=\vec{x}/\left|\vec{x}\right|$. עבור לולאת זרם המוכלת במישור (כלשהו), המומנט המגנטי שלה הוא $\left|\vec{m}\right|=I\cdot A$, כאשר I הוא הזרם בלולאה ו- A הוא השטח שלה. $\vec{m}$ יהיה ניצב למישור המכיל את הלולאה, וכיוונו נקבע על ידי $\vec{x}\times d\vec{l}$.

הכוח שפועל על גוף עם מומנט מגנטי $\vec{m}$ שמוכנס לשדה מגנטי חיצוני $\vec{B}$ הוא, בקירוב ראשון: $$\vec{F}=\vec{\nabla}\left(\vec{m}\cdot\vec{B}\right)$$

באופן מיידי נובע שהאנרגיה הפוטנציאלית של הגוף תהיה $U=-\vec{m}\cdot\vec{B}$, ומומנט הכוח שפועל על הגוף הוא $\vec{N}=\vec{m}\times\vec{B}\left(0\right)$ כאשר $\vec{B}\left(0\right)$ הוא השדה החיצוני בנקודה סביבה עושים את הפיתוח (מרכז הגוף, נניח).

פתרון בעיות שפה במגנוסטטיקה

באופן כללי, עלינו לפתור את משוואת פואסון: $\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$

שמתקבלת עבור בחירה של כיול קולון $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$. זוהי אכן משוואת פואסון המוכרת, לכל רכיב של $\vec{A}$ ו- $\vec{J}$ בנפרד, וניתן לפתור אותה בשיטות שנלמדו בפרק האלקטרוסטטיקה.

כאשר אין זרמים בבעיה ($\vec{J}=0$) נקבל שמתקיים $\vec{\nabla}\times\vec{H}=0$ ואז ניתן להגדיר פוטנציאל מגנטי סקלרי ϕ_M: $\vec{H}=-\vec{\nabla}\phi_M$

באיזורים ש- μ קבוע, נקבל מ- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ שמתקיים: $\vec{\nabla}^2\phi_M=0$

כאשר במעבר בין איזורים עם μ שונה עלינו לתפור את הפתרון לפי תנאי השפה. שוב קיבלנו משוואת פואסון, אך הפעם עבור פונקציה אחת בלבד.

בעיה נפוצה היא של מגנטים קבועים, שבהם המגנטיזציה $\vec{M}$ ידועה וקבועה, ואינה תלויה בשדה שאנו מפעילים. אם גם אין זרמים, $\vec{J}=0$, ניתן להשתמש בפוטנציאל הסקלרי ϕ_M ומקבלים עבורו את המשוואה:

$$\vec{\nabla}^2\phi_M=-\rho_M=\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$$

כאשר ρ_M היא צפיפות המטען המגנטי האפקטיבית. אם הבעיה אינה כוללת משטחי השפה הפיתרון הפורמלי הוא:

$$\phi_M(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'=-\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\int\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

ואם הבעיה היא של גוף סופי בנפח V, שבתוכו נתונה מגנטיזציה $\vec{M}$ ומחוצה לו היא אפס, הפיתרון הפורמלי הוא:

$$\phi_M(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'+\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\hat{n}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}dS'$$

כאשר $\hat{n}'$ הוא וקטור יחידה בניצב למשטח S הפונה החוצה. אם בנוסף נתון כי $\vec{M}$ קבוע בתוך הגוף, האיבר הראשון מתאפס.

צפיפות זרם נפוצה

טבעת זרם ברדיוס a במישור $z=0$ הנושאת זרם I. לצפיפות הזרם יש רכיב משיקי בלבד, בגודל: $J_\varphi(\vec{x}')=I\frac{\delta(r'-a)}{a}\sin\theta'\delta(\cos\theta')$

ובצורה וקטורית ניתן לרשום: $\vec{J}(\vec{x}')=-\hat{x}J_\varphi\sin\varphi'+\hat{y}J_\varphi\cos\varphi'$

מכיוון שלבעיה סימטריה גלילית, נוכל להניח שנקודות התצפית שלנו נמצאת במישור xz, כלומר $\varphi'=0$, דבר המפשט את החישובים.

באופן כללי: $\vec{J}(\vec{x})=\rho(\vec{x})\vec{v}(\vec{x})$, ρ צפיפות המטען ו- $\vec{v}$ המהירות.

אנרגיה של שדה מגנטי

נתבונן בלולאה שזורם בה זרם קבוע I. אם השטף המגנטי דרך הלולאה משתנה, יושרה בה כא"מ, ואז המקורות יעשו עבודה על מנת לשמור על זרם קבוע. קצב שינוי האנרגיה של חלקיק הנע במהירות $\vec{v}$ שפועל עליו כוח $\vec{F}$ הוא $dE/dt=\vec{v}\cdot\vec{F}$, ועבור חלקיק טעון בשדה חשמלי נקבל $dE/dt=q\vec{v}\cdot\vec{E}$. לכן קצב העבודה שיעשו המקורות על מנת לשמור על זרם קבוע הוא: $dW/dt=-I\varepsilon=IdF/dt \;\Rightarrow\; \delta W=I\,\delta F$

כאשר F הוא השטף המגנטי דרך הלולאה. מתוך תוצאה זו מקבלים:

$$\delta W=\int\delta\vec{A}\cdot\vec{J}\,d^3x=\int\vec{H}\cdot\delta\vec{B}\,d^3x$$

וכאשר מניחים תווך לינארי (לא פרומגנטי) ניתן לרשום:

$$W=\frac{1}{2}\int\vec{J}\cdot\vec{A}\,d^3x=\frac{1}{2}\int\vec{H}\cdot\vec{B}\,d^3x$$

השינוי באנרגיה כתוצאה מהכנסת גוף בנפח V עם מקדם פרמיביליות μ לשדה חיצוני קבוע $\vec{B}_0$, כך שבסוף התהליך השדות הם $\vec{B},\vec{H}$:

$$\Delta W=\frac{1}{2}\int_V\left(\vec{B}\cdot\vec{H}_0-\vec{H}\cdot\vec{B}_0\right)d^3x=\frac{1}{2}\int_V\vec{M}\cdot\vec{B}_0\,d^3x$$

דוגמה - כדור מגנטי

נתבונן בכדור ממוגנט ברדיוס a שהמגנטיזציה בתוכו ידועה $\vec{M}=M_0\hat{z}$, המוכנס לריק. הפיתרון הפורמלי לפוטנציאל המגנטי הסקלרי הוא:

$$\phi_M(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'+\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\hat{n}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}dS'$$

כאשר V הוא נפח הכדור ו- S היא שפתו. המגנטיזציה קבועה ולכן בתוך הכדור $\vec{\nabla}\cdot\vec{M}=0$; כמו כן נציב $\hat{n}'\cdot\vec{M}=M_0\cos\theta'$ ונקבל:

$$\phi_M(\vec{x})=\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{M_0\cos\theta'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}dS'=\frac{M_0a^2}{4\pi}\int_{4\pi}\frac{\cos\theta'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\Omega'$$

מהצבת הפיתוח של $1/|\vec{x}-\vec{x}'|$ לפונקציות $Y_{\ell,m}$ רואים שרק האיברים עם $\ell=1$ שורדים, בזכות ה- $\cos\theta'$ באינטגרנד. הפיתרון הוא:

$$\phi_M(\vec{x})=\phi_M(r,\theta)=\frac{1}{3}M_0a^2\frac{r_<}{r_>^2}\cos\theta$$

$r_<=\min\{a,r\},\ r_>=\max\{a,r\}$. ולכן השדות בתוך הכדור הם:

$$\vec{H}_{\text{in}}=-\frac{1}{3}\vec{M}=-\frac{1}{3}M_0\hat{z},\qquad \vec{B}_{\text{in}}=\frac{2\mu_0}{3}\vec{M}=\frac{2\mu_0}{3}M_0\hat{z}$$

ומחוץ לכדור מקבלים פוטנציאל של דיפול מגנטי:

$$\phi_M=\frac{1}{3}M_0a^3\frac{\cos\theta}{r^2}=\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3},\quad \vec{m}=\frac{4\pi a^3}{3}\vec{M}=\frac{4\pi a^3}{3}M_0\hat{z}$$

בעיה דומה היא של כדור עם מגנטיזציה קבועה, אך תלויה בשדה החיצוני $\vec{B}_0$ שמפעילים. מתוך סופרפוזיציה עם הבעיה הקודמת מקבלים:

$$\vec{H}_{\text{in}}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0-\frac{1}{3}\vec{M},\qquad \vec{B}_{\text{in}}=\vec{B}_0+\frac{2\mu_0}{3}\vec{M}$$

וניתן למצוא את המגניטזציה של הכדור $\vec{M}$ מתוך הקשר $\vec{B}_{\text{in}}=\mu\vec{H}_{\text{in}}$:

$$\vec{M}=\frac{3}{\mu_0}\left(\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\right)\vec{B}_0$$

חוק פרדיי להשראות

נגדיר את השטף המגנטי דרך לולאה סגורה C: $F=\int_S\vec{B}\cdot\hat{n}dS$

כאשר S הוא המשטח שמגדירה הלולאה C. הכוח האלקטרומניע במעגל הוא: $\varepsilon=\oint_C\vec{E}\cdot d\vec{l}$

כאשר $\vec{E}$ הוא השדה החשמלי באלמנט האורך $d\vec{l}$ של המעגל. לפי חוק פרדיי, מתקיים הקשר: $\varepsilon=-\frac{dF}{dt}$

כאשר הסימן נקבע לפי חוק לנץ, לפיו הזרם המושרה במעגל יהיה בכיוון כזה שייצור שטף מגנטי שיתנגד לשינוי ב- F. חוק פרדיי בצורה מפורשת:

$$\oint_C\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_S\vec{B}\cdot\hat{n}dS\quad\Leftrightarrow\quad\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

ההשראות L מוגדרת כך שמתקיים: $\varepsilon=-L\frac{dI}{dt}$

(בלולאות מלבניות ל- ε יש "נטייה" להיות שווה ל- $B\ell v$)

מעבר לקואורדינטות כדוריות ומעגליות

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z=r\cos\theta$$

$$\hat{r}=\cos\varphi\sin\theta\hat{x}+\sin\varphi\sin\theta\hat{y}+\cos\theta\hat{z}$$

$$\hat{\theta}=\cos\varphi\cos\theta\hat{x}+\sin\varphi\cos\theta\hat{y}-\sin\theta\hat{z}$$

$$\hat{\varphi}=-\sin\varphi\hat{x}+\cos\varphi\hat{y}$$

$$\hat{x}=\cos\varphi\sin\theta\hat{r}+\cos\varphi\cos\theta\hat{\theta}-\sin\varphi\hat{\varphi}$$

$$\hat{y}=\sin\varphi\sin\theta\hat{r}+\sin\varphi\cos\theta\hat{\theta}+\cos\varphi\hat{\varphi}$$

$$\hat{z}=\cos\theta\hat{r}-\sin\theta\hat{\theta}$$

$$\hat{\varphi}\times\hat{r}=\hat{\theta},\quad\hat{\theta}\times\hat{\varphi}=\hat{r},\quad\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{\varphi}$$

(ניתן לקבל את המעבר לקואורדינטות מעגליות על ידי הצבת $\theta=\pi/2$)

משוואות מקסוול

$$(1)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho,\qquad (3)\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$(2)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\qquad (4)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\vec{E},\qquad \vec{H}=\vec{B}/\mu_0-\vec{M}=\vec{B}/\mu$$

מגדירים פוטנציאל סקלרי ϕ ופוטנציאל וקטורי $\vec{A}$, שמגדירים את השדות לפי:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\qquad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

עלינו רק למצוא את המשוואות שהפוטנציאלים מקיימים.
על פי חופש הכיול, הטרנספורמציה הבאה:

$$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda,\qquad \phi'=\phi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

אינה משנה את השדות $\vec{E},\vec{B}$. לכן ניתן לבחור $\vec{A},\phi$ כך שיתקיים

כיול לורנץ:
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

ואז מקבלים שתי משוואות בלתי-תלויות ל- $\vec{A},\phi$:

$$\vec{\nabla}^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho,\qquad \vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

אלה הן משוואות גלים, ופותרים אותן על ידי שימוש בפונקצית גרין.
קיים גם כיול כולון, שדורש $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, ואז מתקבלות המשוואות:

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x},t)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x},t)$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}+\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

כלומר, עבור ϕ מתקבלת משוואת פואסון הרגילה (עם התפלגות מטען שתלויה גם בזמן), ועבור $\vec{A}$ מתקבלת משוואת גלים אי-הומוגנית מסובכת. אל תנסו זאת בבית.

גלים אלקטרומגנטיים

משוואות מקסוול בריק, בהיעדר מקורות ($\vec{J}=0,\ \rho=0$) הן:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}+\partial\vec{B}/\partial t=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0,\qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}-\partial\vec{D}/\partial t=0$$

אם מניחים תלות הרמונית בזמן לפי $e^{-i\omega t}$ נקבל את המשוואות עבור האמפליטודות:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}-i\omega\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0,\qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}+i\omega\vec{D}=0$$

נניח תווך הומוגני, לינארי ואיזוטרופי עם $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ ו- $\vec{B}=\mu\vec{H}$.

הצבה של המשוואות זו לתוך זו נותנת: $\left(\vec{\nabla}^2+\mu\varepsilon\omega^2\right)\left\{\vec{E}/\vec{B}\right\}=0$

נניח פתרונות: $\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t},\qquad \vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t}$

אז מהמשוואה האחרונה מקבלים שמתקיימים הקשרים הבאים:

$$k=\left|\vec{k}\right|=\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega,\qquad v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{n},\qquad n=\sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$

k הוא מספר הגל, v מהירות הפאזה ו- n מקדם השבירה של החומר. ממשוואות מקסוול מקבלים תנאים על $\vec{E}_0,\vec{B}_0$ ו- $\hat{k}$:

$$\hat{k}\cdot\vec{E}_0=0,\qquad \hat{k}\cdot\vec{B}_0=0,\qquad \vec{B}_0=\sqrt{\mu\varepsilon}\left(\hat{k}\times\vec{E}_0\right)$$

כלומר, הוקטורים $\vec{E}_0,\vec{B}_0,\vec{k}$ מהווים שלשה ימנית. עבור גל זה וקטור פוינטינג הממוצע:

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left|\vec{E}_0\right|^2\hat{k}$$

וצפיפות האנרגיה שאגורה בגל זה היא:

$$u=\frac{1}{4}\left(\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^*+\frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\vec{B}^*\right)=\frac{\varepsilon}{2}\left|\vec{E}_0\right|^2$$

פונקצית גרין למשוואת הגלים

תחת כיול לורנץ ראינו שמקבלים עבור הפוטנציאלים ϕ ו- $\vec{A}$ משוואות גלים, שנראות מהצורה:

$$\vec{\nabla}^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-4\pi f(\vec{x},t)$$

ניתן להיפטר מהתלות הזמנית בעזרת התמרת פורייה של ψ ו- f:

$$\psi(\vec{x},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega,\qquad \tilde{\psi}(\vec{x},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\vec{x},t)e^{i\omega t}dt$$

$$f(\vec{x},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega,\qquad \tilde{f}(\vec{x},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\vec{x},t)e^{i\omega t}dt$$

הצבה לתוך משוואת הגלים נותנת: $\left(\vec{\nabla}^2+k^2\right)\psi(\vec{x},\omega)=-4\pi f(\vec{x},\omega)$

לכל מרכיב עם תדירות ω של הגל, כאשר $k=\omega/c$. נחפש פונקצית גרין $G(\vec{x},\vec{x}')$ כזו שתקיים:

$$\left(\vec{\nabla}^2+k^2\right)G_k(\vec{x},\vec{x}')=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

כאשר אין משטחי שפה, פונקצית גרין תהא תלויה ב- $\vec{R}=\vec{x}-\vec{x}'$ בלבד, ולמעשה היא צריכה גם להיות בעלת סימטריה כדורית, כלומר תלויה ב- $R=\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|$ בלבד. מהצבת האופרטור $\vec{\nabla}^2$ בקואורדינטות כדוריות נקבל:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG_k)+k^2G_k=-4\pi\delta(\vec{R})$$

והפיתרון למשוואה זו הוא:

$$G_k(\vec{x},\vec{x}')=G_k(R)=\frac{Ae^{ikR}}{R}+\frac{(1-A)e^{-ikR}}{R}$$

כאשר הקבוע A נקבע מתנאי התחלה כלשהו על הזמן. האיבר הראשון מייצג גל כדורי המתפשט מהראשית, והאיבר השני הוא גל כדורי המתכנס אליה. לכן, אם למשל ברגע $t=0$ מתחיל לפעול מקור קרינה, נבחר $A=1$. ניתן להמשיך את הניתוח ולמצוא את פונקצית גרין ה"מלאה" לבעיה, כלומר פונקציה $G(\vec{x},\vec{x}';t,t')$ שמקיימת:

$$\left(\vec{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{x},\vec{x}';t,t')=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta(t-t')$$

מהצבת התמרת הפורייה מקבלים:

$$G^{(\pm)}(R,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm ikR}}{R}e^{-i\omega\tau}d\omega$$

כאשר $\tau=t-t'$. בתווך ללא דיספרסיה מתקיים $k=\omega/c$ ואז:

$$G^{(\pm)}(\vec{x},\vec{x}';t,t')=\frac{1}{R}\delta\left(\tau\mp\frac{R}{c}\right)=\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}\delta\left(t'-\left[t\mp\frac{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}{c}\right]\right)$$

$G^{(+)}$ נקראת פונקצית גרין המעוכבת (retarded), והמשמעות שלה היא שהפרעה בנקודה שנמצאת במרחק R מהמקור, מגיע לשם אחרי זמן של R/c. באופן דומה $G^{(-)}$ נקראת פונקצית גרין המתקדמת (advanced).
הפתרונות למשוואת הגלים שממנה יצאנו הם לפיכך:

$$\psi^{(\pm)}(\vec{x},t)=\int dt\int G^{(\pm)}(\vec{x},\vec{x}';t,t')f(\vec{x}',t')d^3x'+\psi_0(\vec{x},t)$$

ולפיתרון זה ניתן להוסיף כל פונקציה אחרת $\psi_0(\vec{x},t)$ שמקיימת את משוואת הגלים ההומוגנית. שני מקרים חשובים הם כאשר ידוע לנו הגל בזמן $t=-\infty$ או בזמן $t=+\infty$, ופונקצית המקור $f(\vec{x},t)$ שונה מאפס רק בתחום סופי במרחב ובזמן. במקרה הראשון, כאשר הגל ב- $t=-\infty$ הוא ψ_{in}:

$$\psi(\vec{x},t)=\psi_{\text{in}}(\vec{x},t)+\int dt\int G^{(+)}(\vec{x},\vec{x}';t,t')f(\vec{x}',t')d^3x'$$

וכאשר הגל ב- $t=+\infty$ הוא ψ_{out}:

$$\psi(\vec{x},t)=\psi_{\text{out}}(\vec{x},t)+\int dt\int G^{(-)}(\vec{x},\vec{x}';t,t')f(\vec{x}',t')d^3x'$$

פתרונות אלה מקיימים את תנאי השפה הנתון, כאשר בין $-\infty<t<\infty$ קיים גם גל נוסף כתוצאה מ- $f(\vec{x},t)$.

קיטוב גלים אלקטרומגנטיים

כל גל המתקדם בכיוון z (למשל) ניתן לרשום כסופרפוזיציה של גלים המקוטבים בכיוון x ובכיוון y. נסמן ב- $\vec{E}_x,\vec{E}_y$ את האמפליטודה (המרוכבת) של הגלים בשני הקיטובים, אזי קיטוב לינארי מתקבל כאשר לשניהם יש אותה פאזה; קיטוב מעגלי מתקבל כאשר לאמפליטודות של הגלים $\vec{E}_x,\vec{E}_y$ יש אותו גודל אך הפרש פאזה של $\pi/2$ בדיוק; קיטוב אליפטי מתקבל בכל מקרה אחר.

משפט פוינטינג, שימור תנע ואנרגיה

קצב העבודה שעושים שדות חיצוניים על מטען בתנועה הוא $dW/dt = q\vec{v}\cdot\vec{E}$,

לכן עבור צפיפות זרם רציפה נקבל הספק כולל של: $dW/dt = \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,d^3x$

שמייצג מעבר אנרגיה א״מ לאנרגיה מכנית או תרמית. משפט פוינטינג, שמבטא שימור האנרגיה הוא:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E} \quad\Leftrightarrow\quad \int_V\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\right)d^3x = -\int_V\left(\vec{J}\cdot\vec{E}\right)d^3x$$

כאשר $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ הוא וקטור פוינטינג (מציבים את השדה הפיסיקלי, כלומר החלק הממשי בלבד!), שמייצג צפיפות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן, או צפיפות הספק ליחידת שטח. u היא צפיפות האנרגיה האלקטרומגנטית האגורה בשדה: $u = \left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)/2$, ו- $\vec{J}\cdot\vec{E}$ הוא צפיפות ההספק של השדה, שמתבזבז על עבודה מכנית או תרמית.

כמו כן, השינוי בתנע המכני של חלקיקים טעונים הנמצאים בנפח V הוא:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{d\vec{P}_{\text{mech}}}{dt} = \int_V\left(\rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}\right)d^3x$$

מגדירים גם את התנע האלקטרומגנטי האצור בשדות:

$$\vec{P}_{\text{field}} = \varepsilon_0\int_V \vec{E}\times\vec{B}\,d^3x = \mu_0\varepsilon_0\int_V \vec{E}\times\vec{H}\,d^3x = \frac{1}{c^2}\int_V \vec{S}\,d^3x$$

ואז מתקבל חוק שימור התנע:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{\text{mech}} + \vec{P}_{\text{field}}\right)_\alpha = \oint_S \sum_{\beta=1}^{3} T_{\alpha,\beta}n_\beta dS$$

כאשר S הוא המשטח המגדיר את הנפח V שבו מחושב התנע הכולל, $\hat{n}$ הוא וקטור הנורמל המכוון מתוך הנפח החוצה, ו- $\mathbf{T}$ הוא טנזור המאמץ של מקסוול:

$$T_{\alpha,\beta} = \varepsilon_0\left[E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta - \tfrac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{E} + c^2\vec{B}\cdot\vec{B}\right)\delta_{\alpha,\beta}\right]$$

דיספרסיה - מודל לורנץ

נניח כי כל אלקטרון בחומר (עם מטען $-e$) הוא מערכת של אוסילטור הרמוני מרוסן, עם כוח חיצוני $-e\vec{E}$, כלומר: $m\left[\ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x}\right] = -e\vec{E}\left(\vec{x},t\right)$

γ,ω_0 הם מאפיינים של החומר. כאשר השדה החיצוני הוא $\vec{E}e^{i\omega t}$ ניתן למצוא פיתרון ל- $\vec{x}$ ומקבלים שכל אלקטרון מייצג דיפול חשמלי עם מומנט של:

$$\vec{p} = -e\vec{x} = \frac{e^2}{m}\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma\right)^{-1}\vec{E}$$

אם ישנן N מולקולות ליח׳ נפח בחומר, ובכל אחת Z אלקטרונים, ובכל מתוכם f_j אלקטרונים עם γ_j,ω_j (בסך הכל $\sum_j f_j = Z$), נקבל שהקבוע הדיאלקטרי של החומר הוא:

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j f_j\left(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j\right)^{-1}$$

באופן כללי מקדמי הריסון γ_j קטנים ביחס לתדירויות התהודה ω_j, ולכן כאשר תדירות הגל ω אינה בסביבה של אף אחת מהתדירויות ω_j, נקבל מקדם דיאלקטרי ממשי בקירוב מצויין. בפרט, עבור תדירות ω קטנה מכל התדירויות ω_j, נקבל $\varepsilon(\omega) > \varepsilon_0$, ובאופן דומה עבור תדירות ω שגדולה מכל התדירויות ω_j נקבל $\varepsilon(\omega) < \varepsilon_0$.

תחום שבו $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega)$ גדל עם התדירות נקרא תחום דיספרסיה נורמלית, בעוד שתחום שבו $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega)$ קטן עם ω נקרא תחום דיספרסיה אנומלית. כאשר תדירות הגל ω אינה בסביבה של אף אחת מהתדירויות ω_j מתקבלת דיספרסיה נורמלית, ואין כמעט בליעה של הגל בחומר. לעומת זאת עבור $\omega \sim \omega_j$ מתקבלת דיספרסיה אנומלית, ובמקביל יש חלק מדומה לא זניח של $\varepsilon(\omega)$, כלומר בליעה.

בגבול של תדירות נמוכה $\omega \to 0$, מעניין לדבר על חומרים שבהם קיימים f_0 אלקטרונים חופשיים, כך ש- $\omega_0 = 0$. במקרה כזה מקבלים עבור תדירויות נמוכות מקדם דיאלקטרי של:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\text{other}}(\omega) + i\frac{Ne^2 f_0}{m\omega\left(\gamma_0 - i\omega\right)}$$

כאשר $\varepsilon_{\text{other}}(\omega)$ הוא התרומה של שאר האלקטרונים עם $\omega_j \neq 0$, ומניחים שהוא ממשי טהור. מתוך הצבת הביטוי הנ״ל לחוק אמפר עם $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ מקבלים ביטוי למוליכות של החומר: $\sigma = \frac{f_0 Ne^2}{m\left(\gamma_0 - i\omega\right)}$ (זהו בעצם מודל דרודה)

בגבול של תדירויות גבוהות, מעבר לתדירות התהודה הגבוהה ביותר, הקבוע הדיאלקטרי מתנהג לפי:

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \cong 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \qquad \omega_p^2 = \frac{NZe^2}{\varepsilon_0 m}$$

ω_p נקראת תדירות הפלסמה, ומספר הגל k נתון על ידי $k^2 = \left(\omega^2 - \omega_p^2\right)/c^2$.

יש לציין כי בחומרים דיאלקטריים, קשר דיספרסיה זה נכון רק עבור $\omega \gg \omega_p$.

חוק סנל, מקדמי העברה והחזרה

נניח כי המישור $z = 0$ מחלק את העולם לשני איזורים, כאשר ב- $z < 0$ קיים חומר עם μ,ε וב- $z > 0$ החומר הוא μ',ε'. גל $\vec{E}$ מגיע מ- $z < 0$ ופוגע בממשק, חלק מהגל מועבר $\vec{E}'$, וחלקו מוחזר $\vec{E}''$. נסמן את הגלים:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \quad \vec{E}' = \vec{E}_0' e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\omega t}, \quad \vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i\vec{k}''\cdot\vec{x} - i\omega t}$$

מספרי הגל הם $k = k'' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ ו- $k' = \omega\sqrt{\mu'\varepsilon'}$. נסמן ב- i,t,r את הזוויות שיוצרים $\vec{k},\vec{k}',\vec{k}''$ (בהתאמה) עם האנך למישור $z = 0$ (ציר x לצורך העניין). על מנת שיתאפשר קיום תנאי שפה ב- $z = 0$, הפאזות של שלושת הגלים חייבות להיות שווה שם, כלומר:

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{x}\right)_{z=0} = \left(\vec{k}'\cdot\vec{x}\right)_{z=0} = \left(\vec{k}''\cdot\vec{x}\right)_{z=0}$$

$$\Rightarrow\quad k\sin i = k'\sin t = k''\sin r$$

מכיוון שמספרי הגל של הגל הפוגע והמוחזר שווים $k = k''$ מקבלים מכאן שזווית ההחזרה שווה לזווית הפגיעה $r = i$, בעוד שזווית ההעברה נקבעת לפי חוק סנל: $n\sin i = n'\sin t$

מתוך תנאי השפה על השדות (רציפות של $\vec{E}_\parallel,\vec{H}_\parallel,\vec{D}_\perp,\vec{B}_\perp$) מקבלים את מקדמי פרנל ליחס בין הגלים המועברים והמוחזרים לבין הגל הפוגע. מקדמים אלה הם תלויים בקיטוב הגל –

קיטוב TM - כאשר $\vec{E}_0$ ניצב למישור הפגיעה (אצלנו xz):

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2\mu' n\cos i}{\mu' n\cos i + \mu n'\cos t}, \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{\mu' n\cos i - \mu n'\cos t}{\mu' n\cos i + \mu n'\cos t}$$

וקיטוב TE - כאשר $\vec{E}_0$ מקביל למישור הפגיעה (xz):

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2\mu' n\cos i}{\mu n'\cos i + \mu' n\cos t}, \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{\mu n'\cos i - \mu' n\cos t}{\mu n'\cos i + \mu' n\cos t}$$

ניתן גם לרשום לעיל $n'\cos t = \sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}$ לפי חוק סנל. עוצמת הגל פרופורציונית לריבוע האמפליטודה, ולכן ריבוע יחסי האמפליטודה הוא החלק היחסי של העוצמה שעוברת או מוחזרת.

חבורות גלים

לפי עיקרון הסופרפוזיציה, ניתן להרכיב כל גל אלקטרומגנטי על ידי גלים מישוריים, כל אחד עם מספר גל k ואמפליטודה (מרוכבת) $A(k)$, לפי: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx - i\omega(k)t}dk$

כאשר מתירים תלות כלשהי של התדירות ω ב- k, על מנת שהתיאור יתאים גם לתווך דיספרסיבי. המקדמים $A(k)$ נקבעים מתוך תנאי ההתחלה על הגל:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(x,0) + \frac{i}{\omega(k)}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right]e^{-ikx}dx$$

אך בדרך כלל נניח כי הגל עומד ברגע $t = 0$ כך שהאיבר השני מתאפס. מתקיים הקשר: $\Delta x\cdot\Delta k \geq \tfrac{1}{2}$

כאשר $\Delta x,\Delta k$ מייצגים את רוחב הפונקציות $u(x,0), A(k)$. המשמעות היא שככל שהגל $u(x,0)$ צר יותר במרחב המקום (כלומר, שונה מאפס בתחום קטן של x), כך ההתמרה $A(k)$ רחבה יותר (כלומר, הגל מורכב מהרבה גלים מישוריים), ולהיפך.

נתעניין בהתפתחות בזמן של חבילת גלים כזו. כאשר $A(k)$ ממוקמת סביב ערך מסויים k_0, ניתן לפתח את $\omega(k)$ סביבו:

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g\left(k - k_0\right), \quad \omega_0 = \omega(k_0), \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0)$$

v_g נקראת מהירות החבורה, מכיוון שהצבת הפיתוח נותנת:

$$u(x,t) \cong u\left(x - v_g t, 0\right)\cdot e^{i\left[k_0 v_g - \omega_0\right]t}$$

כלומר, החבורה מתפתחת בזמן מבלי לשנות את צורתה (פרט לתוספת פאזה כללית), והיא מתקדמת במהירות של v_g. בגלים אלקטרומגנטיים $\omega(k) = ck/n(k)$ ומקבלים:

$$v_p = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)}, \qquad v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega\left(dn/d\omega\right)}$$

פונקצית דלתא

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\,dx=1,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)f(x)\,dx=f(x_0)$$

מוגדרת גם לפי:
$$\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk$$

וגם כנגזרת של <u>פונקצית המדרגה</u>:
$$\delta(x)=\frac{d}{dx}\Theta(x),\qquad \Theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

הדלתא <u>זוגית</u> $\delta(-x)=\delta(x)$. לכל $g(x)$ עם אפסים <u>פשוטים</u> (נגזרת לא מתאפסת) בנקודות $\{x_i\}$ מתקיים:
$$\delta(g(x))=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

<u>מתיחה של דלתא</u>: (שלחנו את מושון...)
$$\delta(\alpha x)=\frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$

הדלתא <u>בקואורדינטות שונות</u>:
$$\delta(\vec{x}-\vec{x}')_{\text{cartesian}}=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$
$$\delta(\vec{x}-\vec{x}')_{\text{cylindrical}}=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\theta-\theta')\delta(z-z')$$
$$\delta(\vec{x}-\vec{x}')_{\text{spherical}}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\varphi-\varphi')$$

(הערה: מחוץ לדלתא, ניתן להחליף בין כל אחד מהגדלים $\alpha\leftrightarrow\alpha'$)

פונקציות גרין לבעיות נפוצות

מטענים נקודתיים מול מוליך אינסופי ומוארק במישור $z=0$:
$$G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}-\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'+2z'\hat{z}|}$$
$$=\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-1/2}-\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2\right]^{-1/2}$$
$$\frac{\partial G}{\partial z'}(\vec{x},\vec{x}')=\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-3/2}(z-z')+\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2\right]^{-3/2}(z+z')$$

תילים אינסופיים (בחיי שהם אינסופיים, בדקתי בעצמי) מקבילים לציר z וטעון בצפיפות מטען אורכית, מול מוליך אינסופי ומוארק במישור $y=0$:
$$G(x,y;x',y')=-\ln\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]+\ln\left[(x-x')^2+(y+y')^2\right]$$
$$\frac{\partial G}{\partial y'}(x,y;x',y')=\frac{2(y-y')}{(x-x')^2+(y-y')^2}+\frac{2(y+y')}{(x-x')^2+(y+y')^2}$$

מטען מול קליפה מוליכה ומוארקת ברדיוס a:
$$G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}-\frac{a}{r'\left|\vec{x}-(a^2/r'^2)\vec{x}'\right|}$$
$$=4\pi\sum_{\ell,m}\frac{Y^*_{\ell,m}(\theta',\varphi')Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)}{2\ell+1}\left(\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}-\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{\ell+1}\right)$$
$$=\frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2}}-\frac{1}{(r^2r'^2/a^2+a^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2}}$$
$$\frac{\partial G}{\partial r'}(\vec{x},\vec{x}')=\frac{-r'+r\cos\gamma}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{3/2}}+\frac{r^2r'/a^2-r\cos\gamma}{(r^2r'^2/a^2+a^2-2rr'\cos\gamma)^{3/2}}$$

ומטען בין שתי קליפות מוארקות ברדיוסים $b>a$:
$$G(\vec{x},\vec{x}')=4\pi\sum_{\ell,m}\frac{Y^*_{\ell,m}(\theta',\varphi')Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2\ell+1}\right]}\left(r_<^\ell-\frac{a^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{\ell+1}}-\frac{r_>^\ell}{b^{2\ell+1}}\right)$$

מתמטיקה כללית

$$\vec{\nabla}^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$
$$\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}=-\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$
$$|\vec{x}-\vec{x}'|=\sqrt{r^2+r'^2-2rr\cos\gamma}$$
$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

בעיות תנאי שפה במעבר בין תווכים

כל השיטות שהובאו לעיל תקפות גם במקרה זה, כאשר ההבדל היחיד הוא שתנאי השפה השתנה (התנאי הוא על $\vec{D}_\perp$ ולא $\vec{E}_\perp$).
בתור דוגמה נניח שחצי המרחב $z>0$ הוא חומר עם קבוע דיאלקטרי ε_1, וחצי המרחב $z<0$ הוא חומר עם קבוע ε_2. מניחים מטען נקודתי q ב-$\vec{x}=d\hat{z}$, כלומר במרחק d מהממשק בין החומרים. בהנחה שאין צפיפות מטען חופשית על המישור $z=0$, תנאי השפה הם רציפות ב-$\vec{D}_\perp,\vec{E}_\parallel$, כלומר:
$$\lim_{z\to0^+}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1E_z\\ E_{x,y}\end{Bmatrix}=\lim_{z\to0^-}\begin{Bmatrix}\varepsilon_2E_z\\ E_{x,y}\end{Bmatrix}$$

והפיתרון הוא, בקואורדינטות גליליות:
$$\phi(\rho,z)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{q}{R_-}+\frac{q'}{R_+}\right) & z>0\\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q''}{R_-} & z<0\end{cases}$$

כאשר $R_\pm=\sqrt{\rho^2+(d\pm z)^2}$, ומטעני הדמות הם:
$$q'=-\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)q,\qquad q''=\left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)q$$

צפיפות המטען המושרה על המישור $z=0$ כתוצאה מפולריזציה היא:
$$\sigma_{\text{pol}}(\rho)=-\frac{q}{2\pi}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}\frac{d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

בעיה נוספת היא של כדור ברדיוס a העשוי מחומר עם מקדם דיאלקטרי ε_1 שמוכנס לעולם עם מקדם ε_2. לפני הכנסת הכדור היה בעולם תוהו ובוהו, וחושך על פני תהום, וגם שדה חשמלי קבוע $\vec{E}_0=E_0\hat{z}$. מציעים פתרונות מהצורה:
$$\phi_{\text{in}}(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$$
$$\phi_{\text{out}}(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[B_\ell r^\ell+C_\ell r^{-(\ell+1)}\right]P_\ell(\cos\theta)$$

מהתנאי האסימפטוטי על השדה הקבוע מקבלים $B_\ell=-E_0\delta_{\ell,1}$.
שאר המקדמים נקבעים מתוך תנאי השפה ב-$r=a$:
$$\vec{E}_\parallel:\qquad -\frac{1}{a}\frac{\partial\phi_{\text{in}}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a}=-\frac{1}{a}\frac{\partial\phi_{\text{out}}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a}$$
$$\vec{D}_\perp:\qquad -\varepsilon_1\frac{\partial\phi_{\text{in}}}{\partial r}\bigg|_{r=a}=-\varepsilon_2\frac{\partial\phi_{\text{out}}}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

הצבה של הטורים ושימוש באי"ג של P_ℓ ונגזרתו נותנת את הפיתרון:
$$\phi_{\text{in}}(r,\theta)=-\left(\frac{3}{\varepsilon_1/\varepsilon_2+2}\right)E_0r\cos\theta$$
$$\phi_{\text{out}}(r,\theta)=\left(\frac{\varepsilon_1/\varepsilon_2-1}{\varepsilon_1/\varepsilon_2+2}\right)E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta-E_0r\cos\theta$$

צפיפות המטען המושרה על קליפת הכדור כתוצאה מפולריזציה היא:
$$\sigma_{\text{pol}}(\theta)=3\varepsilon_1\left(\frac{\varepsilon_2/\varepsilon_1-1}{\varepsilon_2/\varepsilon_1+2}\right)E_0\cos\theta$$