<u>שאלה 1</u>

<u>א.</u> נפתח את f לפי טיילור סביב x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(h) + \frac{f''(x_0)}{2!}(h)^2 + \dots$$

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(2h) + \frac{f''(x_0)}{2!}(2h)^2 + \dots$$

$$\delta_1(h) = A f_0 + B f_1 + C f_2 = A f_0 + B\left(f_0 + f_0' h + \frac{f_0''}{2!}h^2 + \frac{f_0'''}{3!}h^3 + \dots\right) +$$

$$+ C\left(f_0 + f_0'(2h) + \frac{f_0''}{2!}(2h)^2 + \frac{f_0'''}{3!}(2h)^3 + \dots\right) =$$

$$= f_0(A+B+C) + f_0'\left(B\cdot h + C\cdot(2h)\right) + f_0''\left(\frac{B}{2!}h^2 + \frac{C}{2!}(2h)^2\right) +$$

$$+ f_0'''\left(\frac{B}{3!}h^3 + \frac{C}{3!}(2h)^3\right) + \dots$$

$\Rightarrow$ נקבל:

$$A + B + C = 0$$

$$B\cdot h + C\cdot 2h = 0 \Rightarrow B = -2C$$

$$\frac{B}{2!}h^2 + \frac{C}{2!}(2h)^2 = 1$$

נסמן: $A = \frac{\alpha}{h^2}$; $B = \frac{\beta}{h^2}$; $C = \frac{\gamma}{h^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma \cdot 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma = 1 \\ \beta = -2 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\delta_1(h) = \frac{1}{h^2} f_0 - \frac{2}{h^2} f_1 + \frac{1}{h^2} f_2}} =$$

$$= f_0'' + \frac{f_0'''}{3!}\left(-2h + 2^3 h\right) + \frac{f_0^{(4)}}{4!}\left(-2h^2 + 2^4 h^2\right) + \dots$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\delta_1(h) - f_0'' = \frac{f_0'''}{3!}\cdot 6h + O(h^2)}}$$

כלומר, קיבלנו:

$$\delta_1(h) = \frac{1}{h^2} f_0 - \frac{2}{h^2} f_1 + \frac{1}{h^2} f_2 = \frac{1}{h^2}\left(f_0 - 2f_1 + f_2\right)$$

והאיבר המוביל בשגיאה הוא:

$$\frac{f_0'''}{3!} \cdot 6h = f_0''' h$$

ב)

נוסחה אחרת:

$$\delta_2(h) = \frac{1}{h^2}\left(f_{-1} - 2f_0 + f_1\right)$$

נבדוק מהי השגיאה:

$$\delta_2(h) = \frac{1}{h^2}\left[f_0 + \frac{f_0'}{1!}(-h) + \frac{f_0''}{2!}(-h)^2 + \frac{f_0'''}{3!}(-h)^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}(-h)^4 + \dots\right] + \frac{(-2)}{h^2} f_0$$

$$+ \frac{1}{h^2}\left[f_0 + \frac{f_0'}{1!}(h) + \frac{f_0''}{2!}(h)^2 + \frac{f_0'''}{3!}(h)^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}(h)^4 + \dots\right] =$$

$$= f_0'' + \frac{1}{h^2}\left[\frac{f_0'''}{3!}\cancel{(h^3 - h^3)}\right] + \frac{1}{h^2}\left[\frac{f^{(4)}}{4!} h^4 \cdot 2\right] + \dots$$

$$\Rightarrow \quad \delta_2(h) - f_0'' = \frac{f^{(4)}}{4!} \cdot 2h^2 + O(h^4) = \frac{f^{(4)}}{12} h^2 + O(h^4)$$

$\Leftarrow$ נוסחה $\delta_2(h)$ עדיפה מכיוון שהאיבר המוביל בשגיאה הוא מסדר h^2 לעומת $\delta_1(h)$ שם האיבר המוביל בשגיאה הוא מסדר h.

ג) f_i נתונים עם שגיאה מוחלטת חסומה ע' $\varepsilon > 0$

$$\tilde{\delta}_1(h) = \frac{1}{h^2}\left(f_0 \pm \varepsilon - 2(f_1 \pm \varepsilon) + f_2 \pm \varepsilon\right) = \frac{1}{h^2}\left(f_0 - 2f_1 + f_2\right) + \frac{1}{h^2}\left(\pm\varepsilon \pm 2\varepsilon \pm \varepsilon\right)$$

$$\left|\tilde{\delta}_1(h) - f_0''\right| = \frac{1}{h^2}\left(\pm\varepsilon \pm 2\varepsilon \pm \varepsilon\right) + \frac{f_0'''}{3!} 6h + O(h^2)$$

$$\left|\tilde{\delta}_1(h) - f_0''\right| \le \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{|f_0'''|}{3!} \cdot 6h = \frac{4\varepsilon}{h^2} + |f_0'''| h$$

נגזור ונשווה לאפס:

$$-4\varepsilon \cdot 2 \frac{1}{h^3} + |f_0'''| = 0 \quad \Rightarrow \quad h^3 = \frac{8\varepsilon}{|f_0'''|}$$

$$\Rightarrow \quad h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{8\varepsilon}{|f_0'''|}}$$

(* הנגזרת השנייה חיובית $\Rightarrow$ זו נק' מינימום!)

המשך ש׳ 1

$$\delta_3(h) = a\delta_1(h) + b\delta_2(h)$$

ב) נראה מה יקרה לשגיאה:

$$\delta_1(h) - f_0'' = f_0''' \cdot h + o(h^2)$$

$$\delta_2(h) - f_0'' = \frac{f^{(4)}}{12} h^2 + o(h^4)$$

לכן האיבר המוביל בשגיאה הוא מסדר h ולכן הקירוב יהיה פחות טוב מאשר $\delta_2(h)$!

⇐ לא ניתן לקבל קירוב יציב יותר.

ה) הינו מקבלים לפי $\delta_2(h)$:

$$\delta_2(h) = f_0'' + \frac{f^{(4)}}{4!}\cdot 2h^2 + \frac{f^{(6)}}{6!}\cdot 2h^4 + \dots$$

בוחרים קבוע $1>\omega$ ומתחילים לחשב את האיברים בטבלה, עפ״י אקסטרפולציה ריצ׳רדסון.

i	$h_0\omega^i$	$\delta_{2\,i,0}$	$\frac{\Delta}{\omega^{-p_1}-1}$	$F_{i,1}$	$\frac{\Delta}{\omega^{-p_2}-1}$	$F_{i,2}$	…
0		$\delta_2(h_0\omega^0)$					
1		$\delta_2(h_0\omega^1)$					
⋮		⋮					

כאשר אצלנו $P_1=2$, $P_2=4$, …

! Δ הוא ההפרש בין האיבר $\delta_2(\cdot)$ עם הקודם:

$$\delta_{2\,i,j} = \delta_{2\,i,j-1} + \frac{\delta_{2\,i,j-1} - \delta_{2\,i-1,j-1}}{\omega^{-p_j}-1}$$

שאלה 2

$$f''(x_0) \approx \alpha_{-1} f(x_0-h) + \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_0+h)$$

א. זה בדיוק ה-$\delta_2(h)$ מסעיף 1, בשאלה הקודמת כאשר המקדמים:

$$\alpha_{-1} = \frac{A}{h^2},\quad \alpha_0 = \frac{B}{h^2},\quad \alpha_1 = \frac{C}{h^2}$$ (סימון:)

$$\delta(h) \triangleq \alpha_{-1}\underbrace{f(x_0-h)}_{\triangleq f_{-1}} + \alpha_0 \underbrace{f(x_0)}_{\triangleq f_0} + \alpha_1 \underbrace{f(x_0+h)}_{\triangleq f_1}$$

$$\delta(h) = \frac{A}{h^2}\left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(-h) + \frac{f''(x_0)}{2!}(-h)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(-h)^3 + \dots\right]$$

$$+ \frac{B}{h^2} f(x_0) +$$

$$+ \frac{C}{h^2}\left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(h) + \frac{f''(x_0)}{2!}(h)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(h)^3 + \dots\right] =$$

$$= f(x_0)\left[\frac{A}{h^2} + \frac{B}{h^2} + \frac{C}{h^2}\right] +$$

$$+ f'(x_0)\left[\frac{1}{h^2}\right]\left[-Ah + Ch\right] +$$

$$+ f''(x_0)\left[\frac{1}{h^2}\right]\left[\frac{A}{2!}(-h)^2 + \frac{C}{2!}(h)^2\right] + \frac{f'''(x_0)}{3!\,h^2}\left(A(-h)^3 + C(h)^3\right) +$$

$$+ \frac{f_0^{(4)}}{4!\,h^2}\left(A(-h)^4 + C(h)^4\right) + \dots$$

$$\Rightarrow \quad A + B + C = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} -A + C = 0 \\ \frac{A}{2} + \frac{C}{2} = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A = C \\ A + C = 2 \end{array}\right\} A = C = 1 \Rightarrow B = -2$$

$$\Rightarrow \quad \delta(h) = \frac{1}{h^2}\left[f_{-1} - 2f_0 + f_1\right] \approx f''(x_0)$$

ב) לפי הפיתוח מסעיף א',

$$\delta(h) = f''(x_0) + \frac{2f^{(4)}}{4!}h^2 + \frac{2f_0^{(6)}}{6!}h^4 + \dots$$

$$\Rightarrow \quad \delta(h) - f''(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f^{(2n+2)}(x_0)}{(2n+2)!} h^{2n}$$

ג)

$$\tilde{\delta}(h) = \frac{1}{h^2}\left[f_{-1} \pm \delta + (-2)(f_0 \pm \delta) + f_1 \pm \delta\right] =$$

$$= \delta(h) + \frac{1}{h^2}\left[\pm\delta \pm 2\delta \pm \delta\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left|\tilde{\delta}(h) - \delta(h)\right| \le \frac{1}{h^2}\cdot 4\delta$$

זהו חסם של השגיאה

הנגררת של החישוב.

המשך שאלה 2

ג.

$$\left|\tilde{f}(h) - f''(x_0)\right| \leq \frac{4\delta}{h^2} + \frac{2\left|f_0^{(4)}\right|}{4!} h^2$$

נגזור לפי h ונשווה לאפס:

$$-\frac{4\delta \cdot 2}{h^3} + \frac{4\left|f_0^{(4)}\right|}{4!} h = 0$$

$$\frac{+8\delta}{h^3} = \frac{\left|f_0^{(4)}\right|}{6} h \Rightarrow \boxed{h_{opt} = \sqrt[4]{\frac{48\delta}{\left|f_0^{(4)}\right|}}}$$

ד.

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left[f_{-1} - 2f_0 + f_1\right] =$$

הקירוב שמצאנו -

$$= f''(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f^{(2n+2)}(x_0)}{(2n+2)!} h^{2n} \triangleq G(h)$$

$$G(h) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)\right] = f''(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^{2n}$$

כאשר

$$a_n \triangleq \frac{2f^{(2n+2)}(x_0)}{(2n+2)!}$$

עבור $x_0 = 1$

$$\Rightarrow G(h) = \frac{1}{h^2}\left[f(1-h) - 2f(1) + f(1+h)\right] = f''(1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^{2n}$$

ונתונים הערכים של $G(h)$ הבאים:

$h = 0, 0.25, 0.5, \dots, 2$

נבחר $h =$ $\qquad$ $\omega =$

שאלה 3

$$G(h) = a\cdot f(0) + b\cdot f(h/2) + c\cdot f(h)$$

$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \dots$ - פיתוח סביב 0

$$G(h) = a\cdot f_0 + b\left[f_0 + f_0'\cdot\frac{h}{2} + \frac{f_0''}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{f_0'''}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \dots\right] +$$

$$+ c\left[f_0 + f_0'\cdot h + \frac{f_0''}{2!}h^2 + \frac{f_0'''}{3!}h^3 + \dots\right] =$$

$$= (a+b+c)f_0 + \frac{f_0'}{1!}h\left(\frac{b}{2}+c\right) + \frac{f_0''}{2!}h^2\left(\frac{b}{2^2}+c\right) + \frac{f_0'''}{3!}h^3\left(\frac{b}{2^3}+c\right) + \dots$$

$$a = \frac{A}{h} \quad b = \frac{B}{h} \quad c = \frac{C}{h}$$

$$\Rightarrow \quad A + B + C = 0$$

$$\frac{B}{2} + C = 1 \Rightarrow B + 2C = 2$$

$$\frac{B}{2^2} + C = 0 \Rightarrow B + 4C = 0$$

$\underline{C = -1\ ;\ B = 4\ ;\ A = -3}$

$$\Rightarrow \boxed{G(h) = \frac{1}{h}\left[-3f(0) + 4f(h/2) - f(h)\right]}$$

$$\Rightarrow G(h) = f'(0) + \frac{f'''(0)}{3!}h^2\left(\frac{1}{2^3}+1\right) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}h^3\left(\frac{1}{2^4}+1\right) + \dots$$

הביטוי המוביל:

$$\frac{f^{(3)}(0)}{3!}h^2\left(\frac{1}{2^3}+1\right) =$$

$$= \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{1}{8}+1\right)f^{(3)}(0)\cdot h^2 =$$

$$= \frac{1}{\cancel{6}_2}\cdot\frac{\cancel{9}^3}{8}f^{(3)}(0)h^2 = \frac{3}{16}f^{(3)}(0)h^2$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{3}{16} \qquad K = 3 \qquad p = 2}$$

שגיאה אבסולוטית, בהינתן $f(x)$: ε.

$$\tilde{G}(h) = \frac{1}{h}\left[-3(f(0)\pm\varepsilon) + 4(f(h/2)\pm\varepsilon) - (f(h)\pm\varepsilon)\right] =$$

$$= G(h) + \frac{1}{h}\left[\pm 3\varepsilon \pm 4\varepsilon \pm \varepsilon\right]$$

$\sqrt{}$

המשך שאלה 3

$$\Rightarrow \quad G(h) - f'(0) = \frac{3}{16} f^{(3)}(0) h^2 + o(h^3) + \frac{1}{h}\left[\pm 3\varepsilon \pm 4\varepsilon \pm \varepsilon\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left|G(h) - f'(0)\right| \le \frac{3}{16}\left|f^{(3)}(0)\right| h^2 + \frac{8\varepsilon}{h} + o(h^3)$$

צריך למצוא h אופטימלי:

$$G'(h) = \frac{6}{16}\left|f^{(3)}(0)\right| h + 8\varepsilon \cdot (-1)\frac{1}{h^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{3}{8}\left|f^{(3)}(0)\right| \cdot h = \frac{8\varepsilon}{h^2}$$

$$\Rightarrow \quad h^3 = \frac{64\varepsilon}{3\cdot\left|f^{(3)}(0)\right|} \quad \Rightarrow \quad h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{64\varepsilon}{3\left|f^{(3)}(0)\right|}}$$

ב.

$$G(h) = a\cdot f(0) + b\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\left(\frac{h}{2}\right)^i + c\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}h^i =$$

$$= (a+b+c) f(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\left(c+\frac{b}{2^i}\right)h^i$$

$$\Rightarrow \quad G(h) = (a+b+c) f(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\left(c+\frac{b}{2^i}\right)\frac{f^{(i)}(0)}{i!}h^i$$

עבור a,b,c שמצאנו קודם:

$$a = \frac{-3}{h} \quad b = \frac{4}{h} \quad c = -\frac{1}{h}$$

$$G(h) = f'(0) + \sum_{i=3}^{\infty}\left(-\frac{1}{h} + \frac{4}{h}\cdot\frac{1}{2^i}\right)\frac{f^{(i)}(0)}{i!}h^i = f'(0) + \sum_{i=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{i-2}} - 1\right)\frac{f^{(i)}(0)}{i!}h^{i-1}$$

$$= f'(0) + C_1 h^2 + C_2 h^3 + C_3 h^4 + \dots$$

$\Rightarrow$ קצב ההתכנסות של הנוסחה הראשונה: h^2

השנייה: h^3

השלישית: h^4

$$f_0'' \approx a\cdot f_0 + hbf_0' + cf_1 + hdf_1' \triangleq \delta(h)$$

א.

פיתוח סביב x_0: $f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)$

$$f'(x) = f'(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i+1)}(x_0)}{i!}(x-x_0)$$

$$\delta(h) = a\cdot f_0 + h\cdot b\cdot f_0' + c\left[f_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_0^{(i)}}{i!}h^i\right] + h\cdot d\cdot\left[f_0' + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_0^{(i+1)}}{i!}h^i\right] =$$

$$= f_0[a+c] + f_0'\left(h\cdot b + c\cdot\frac{h}{1} + h\cdot d\right) +$$

$$+ f_0''\left(c\cdot\frac{h^2}{2!} + h\cdot d\cdot\frac{h}{1!}\right) + f_0'''\left(\frac{c}{3!}h^3 + h\cdot d\cdot\frac{h^2}{2!}\right) +$$

$$+ f_0^{(4)}\left(c\cdot\frac{h^4}{4!} + h\cdot d\cdot\frac{h^3}{3!}\right) + f_0^{(5)}\left(c\cdot\frac{h^5}{5!} + hd\frac{h^4}{4!}\right) + \dots$$

נסמן:

$$a = \frac{A}{h^2},\ b = \frac{B}{h^2},\ c = \frac{C}{h^2}\ \ d = \frac{D}{h^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ B + C + D = 0 \\ \frac{C}{2} + \frac{D}{1} = 1 \Rightarrow C + 2D = 2 \\ \frac{C}{3!} + \frac{D}{2!} = 0 \quad C + 3D = 0 \end{cases} \quad D = -2 \quad C = 6 \Rightarrow A = -6$$

$$B = -4$$

$$\Rightarrow f_0'' \approx \delta(h) = f_0'' + f_0^{(4)}\left(\frac{6h^2}{4!} + \frac{(-2)h^2}{3!}\right) + f_0^{(5)}\left(\frac{6h^3}{5!} + \frac{(-2)h^3}{4!}\right) + \dots \quad \text{כך}$$

$$f_0'' \approx \delta(h) = f_0'' - \frac{1}{12}h^2 f_0^{(4)} - \frac{1}{30}h^3 f_0^{(5)} + O(h^4)$$

$$f_0'' \approx \frac{1}{h^2}\left[-6f_0 - 4hf_0' + 6f_1 - 2hf_1'\right]$$

ג)

מצאנו קודם:

$$\delta(h) - f_0'' = -\frac{1}{12}h^2 f_0^{(4)} - \frac{1}{30}h^3 f_0^{(5)} + O(h^4)$$

סדר הדיוק הפורמלי הוא $n=3$

סדר הדיוק האסימפטוטי הוא 2.

ד) במקום h נציב $2h$ בנוסחה שקיבלנו בסעיף ב' ונקבל את הקירוב המבוקש:

$$f_0'' \approx \frac{1}{4h^2}\left[-6f_0 - 8hf_0' + 12f_1 - 4hf_1'\right]$$

ה) נסמן:

$$a_1 = -\frac{1}{12}f_0^{(4)} \; ; \; a_2 = -\frac{1}{30}f_0^{(5)}$$

$$\Rightarrow \delta(h) = f_0'' + a_1 h^2 + a_2 h^3 + \dots$$

$h=0.1$

נבצע את הצעד המוצע באמצעות אקסטרפולציית ריצ'רדסון:

עבור $0<\omega<1$:

$$\delta(\omega h) - \omega^2\delta(h) = f_0'' + a_1\omega^2h^2 + a_2\omega^3h^3 + \dots - \omega^2 f_0'' - a_1\omega^2h^2 - a_2\omega^2h^3 - \dots$$

$$= f_0''(1-\omega^2) + a_2h^3(\omega^3-\omega^2) + \dots$$

$$\frac{\delta(\omega h) - \omega^2\delta(h)}{1-\omega^2} = f_0'' + a_2\frac{\omega^3-\omega^2}{1-\omega^2}h^3 + \dots$$

$\Rightarrow$ סדר הדיוק ~~ה~~ האסימפטוטי של הנוסחה המשופרת הוא 3 (קודם היה 2).

נציב הכל עבור $f(x) = e^x$

$$\delta(h) = \frac{1}{h^2}\left[-6 - 4h + 6e^h - 2he^h\right]$$

$h=0.1 \Rightarrow \delta(h) \doteq 0.9991324$

ובאמצעות אקסט' ריצ'רדסון:

$$\omega = 0.5 \Rightarrow \frac{\delta(\omega h) - \omega^2\delta(h)}{1-\omega^2} = 1.0000046$$

(כמובן הערך המדויק הוא 1).