<u>שאלה 1</u>

א. נסמן לפי הקירובים כל $P_3(x)$ שמקיים הקירוב:

$$f(x) - P_3(x)$$

נדרש להשיג מינימום את המקסימום של $x^4 - P_3(x)$ בקטע $[-1,1]$

$P_3(x)$ - פולינום ממעלה 3 ולכן $x^4 - P_3(x)$ הינו פולינום ממעלה 4.

ראינו בהרצאה שהפולינום שעבורו המקסימום על הקטע $[-1,1]$ מינימלי והוא ממעלה n הוא $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

לכן נדרוש ש- $x^4 - P_3(x) = \frac{1}{2^{4-1}}T_4(x)$

$$\Rightarrow \boxed{P_3(x) = x^4 - \frac{1}{2^{4-1}}T_4(x)}$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$\Rightarrow P_3(x) = \cancel{x^4} - \cancel{x^4} + x^2 - \frac{1}{8} = x^2 - \frac{1}{8}$$

ב. באופן דומה לסעיף א':

$$\boxed{P_{n-1}(x) = x^n - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)}$$

$\Rightarrow$ שגיאת הקירוב:

$$x^n - P_{n-1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

$$\left|x^n - P_{n-1}(x)\right| = \left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

מההרצאה.

~~$P_{n-1}(x) = x^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$~~

~~$x^n - P_{n-1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$~~

~~$\Rightarrow \left| x^n - P_{n-1}(x) \right| = \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right| \le \frac{1}{2^{n-1}}$~~

שאלה 2

$\varphi_j(x) = \cos(jx) \qquad j = 0, 1, \ldots$

א.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x) g(x)\,dx$$

$$\langle \varphi_k(x), \varphi_q(x) \rangle = \int_0^{\pi} \cos(kx)\cos(qx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((k+q)x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((k-q)x)\,dx$$

אם $k \neq q$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \sin((k+q)x) \cdot \frac{1}{(k+q)} + \frac{1}{2} \sin((k-q)x) \cdot \frac{1}{k-q} \right]_0^{\pi} =$$

$$\underset{k,q \text{ שלמים}}{=} \left[\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right] = 0$$

אם $k = q \neq 0$:

$$\langle \varphi_k(x), \varphi_q(x) \rangle = \int_0^{\pi} \cos^2(kx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos 2kx)\,dx =$$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2k} \sin(2kx) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left[\pi + \frac{1}{2k} \cdot 0 - 0 \right] = \pi/2$$

אם $k = q = 0$:

$$\langle \varphi_k(x), \varphi_q(x) \rangle = \int_0^{\pi} 1 \cdot dx = \pi$$

$\Leftarrow$

$$\langle \varphi_k(x), \varphi_q(x) \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq q \\ \pi/2, & k = q \neq 0 \\ \pi, & k = q = 0 \end{cases}$$

המשך שאלה 2

ג)

$$f(x) = \pi^2 - x^2$$
$$\varphi_j(x) = \cos(jx)$$

רוצים למצוא קירוב לפי ערך במובן L_2 ל- $f(x)$ בקטע $[0,\pi]$
ע"י הפונ' $\varphi_j(x)$.
הוכחנו בסעיף א' שהפונ' $\varphi_j(x)$ אורתוגונליות — לכן המקדם הנתון
לכן נקבל:

$$c_j = \frac{\langle f(x), \varphi_j(x)\rangle}{\langle \varphi_j(x), \varphi_j(x)\rangle}$$

$$\langle f(x), \varphi_0(x)\rangle = \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,dx = \left[\pi^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\pi^3 - \frac{1}{3}\pi^3 - 0\right] = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$j \neq 0 \quad \langle f(x), \varphi_j(x)\rangle = \int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cdot\cos(jx)\,dx = \int_0^{\pi}\pi^2\cos(jx)\,dx - \int_0^{\pi}x^2\cos(jx)\,dx =$$

$$= \pi^2\cdot\frac{1}{j}\sin(jx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{j}\sin(jx)\cdot x^2\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{j}\int_0^{\pi}2x\sin(jx)\,dx =$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{j}\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{j}\cos(jx)\cdot x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{j}\int_0^{\pi}\cos(jx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{j^2}\left(-\pi\cdot(-1)^j + \cancel{\frac{1}{j}\sin(jx)\Big|_0^{\pi}}\right) = -\frac{2\pi}{j^2}(-1)^j$$

$$j \neq 0 \quad c_j = -\frac{4}{j^2}(-1)^j \qquad c_0 = \frac{2}{3}\pi^2 \quad \Leftarrow$$

$$f^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j\cos(jx) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{4\cdot(-1)^j}{j^2}\cos(jx)\right) \quad \Leftarrow$$

ב.

כאשר $n \to \infty$ נקבל

$$\lim_{n\to\infty} f^*(x) = f(x)$$

(מה שמצאנו במסגרת הקודמת הוא בעצם טור פורייה.

לא היינו צריכים את הטור $\sin(nx)$ מאחר והפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית)

$$\Rightarrow \quad \pi^2 - x^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(-4\frac{(-1)^j}{j^2}\cos(jx)\right)\right) \quad (*)$$

אם נבחר $x=\pi$ נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(-4\frac{(-1)^j}{j^2}(-1)^j\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi^2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{4}{j^2}\right) = \pi^2 - \pi^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} = \frac{1}{6}\pi^2}$$

נחשב את $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$:

נציב ב- $(*)$ $x=0$:

$$\pi^2 - 0^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{4(-1)^{j+1}}{j^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{4(-1)^{j+1}}{j^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2} = \frac{1}{12}\pi^2}$$

שאלה 3

ה. $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ משפחה מנורמלת אורתוגונלית.

=> כל פולינום P_n מדרגה n עם מקדם ראשי 1 ניתן לכתוב ע"י:

$$P_n = \frac{\varphi_n}{A_n} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i$$

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle = \left\langle \frac{\varphi_n}{A_n} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i\varphi_i , \frac{\varphi_n}{A_n} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i\varphi_i \right\rangle =$$

$$= \left\|\frac{\varphi_n}{A_n}\right\|^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \|c_i\varphi_i\|^2 \geq \left\|\frac{\varphi_n}{A_n}\right\|^2$$

הפולינומים φ_i הם אורתוגונליים

שוויון מתקיים אם $c_i = 0$ לכל $i = 0, \dots, n-1$

ואז נקבל ש-

$$\|P_n\|^2 \geq \left\|\frac{\varphi_n}{A_n}\right\|^2$$

כלומר הערך המינימלי של $\|P_n\|^2$ מתקבל עבור

$$P_n = \frac{\varphi_n}{A_n}$$

שאלה 4

א.

$f(-0.5)=0 \qquad f(0)=-3 \qquad f(1)=2$

פונ' הבסיס: $1, \cos(\pi x), \sin(\pi x)$

$f^*(x) = a_0 + a_1\cos(\pi x) + a_2\sin(\pi x)$

$f(-0.5) = a_0 + 0 - a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 - a_2 = 0$

$f(0) = a_0 + a_1 + 0 = -3 \qquad a_0 + a_1 = -3$

$f(1) = a_0 - a_1 + 0 = 2 \qquad a_0 - a_1 = 2$

$\Rightarrow \quad a_0 = -\frac{1}{2} \qquad a_1 = -2\frac{1}{2} \qquad a_2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad f^*(x) = -\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\cos(\pi x) - \frac{1}{2}\sin(\pi x)$

ב.

נסמן: $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = \cos(\pi x)$, $\varphi_2 = \sin(\pi x)$

x_i	$f(x_i)$	$\varphi_0(x_i)$	$\varphi_1(x_i)$	$\varphi_2(x_i)$
-0.5	0	1	0	-1
0	-3	1	1	0
1	2	1	-1	0

$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \sum_{i=0}^{2} \varphi_0^2(x_i) = 1+1+1 = 3$

$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 0+1+1 = 2$

$\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 1+0+0 = 1$

$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \sum_{i=0}^{2} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0$

$\langle \varphi_0, \varphi_2 \rangle = \sum_{i=0}^{2} \varphi_0(x_i)\varphi_2(x_i) = -1+0+0 = -1$

$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 0 = 0.$

$\langle \varphi_0, f \rangle = 0-3+2 = -1$

$\langle \varphi_1, f \rangle = 0-3-2 = -5$

$\langle \varphi_2, f \rangle = 0+0+0 = 0$

המשך סע' ב' 4

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2c_1 = -5 \Rightarrow \boxed{c_1 = -2.5}$$

$$\left.\begin{aligned} 3c_0 - c_2 &= -1 \\ -c_0 + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow +2c_0 = -1 \Rightarrow c_0 = -1/2$$

$$c_2 = c_0 = -1/2$$

<= קיבלנו את אותם המקדמים!

$$f^* = -\frac{1}{2} - 2.5\cos(\pi x) - 1/2\sin(\pi x)$$

הסבר: בסעיף א' מצאנו אינטרפולציה לf(x), כלומר הפונ' שהתקבלה מתלכדת עם $f(x)$ בנקודות x_i <= השגיאה הריבועית (הנורמה) היא אפס ולכן מינימלית. בסעיף ב' חפשנו קירוב שמביא למינימום את השגיאה הריבועית בנק' x_i ומכיוון שהשגיאה היא אפס לכן הקירוב בסעיף ב' מתלכד עם הפונ' מסעיף א'.

השגיאה הריבועית המינימלית היא אפס.

ג:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$3c_0 = -1 \qquad c_0 = -\frac{1}{3}$$

$$2c_1 = -5 \qquad c_1 = -2.5$$

$$f^*(x) = -\frac{1}{3} - 2.5\cos(\pi x)$$

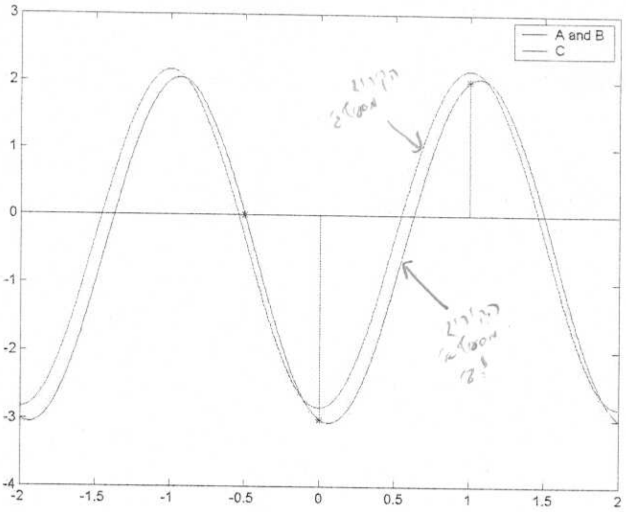
השגיאה הריבועית המינימלית:

$$\|f - f^*\|_2^2 = \sum_{i=0}^{2} \left(f(x_i) - f^*(x_i)\right)^2 = \left(0 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-3 + 2\frac{5}{6}\right)^2 + \left(2 - 2\frac{1}{6}\right)^2 =$$

$$= 1/6 \Rightarrow \|f - f^*\|_2 = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

ص

صفحة فارغة


A and B
C
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2