100

$$w(x) = e^{-x} \qquad 0 \le x < \infty$$

$$L_n(x) = e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x) g(x) w(x)\, dx \qquad \text{א'ל}$$

נסמן:

$$K_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) = L_n(x) e^{-x}$$

ונחשב:

$$I(n,k) \triangleq \int_0^\infty x^k L_n(x) e^{-x}\, dx$$

צ"ל : $k = 0 \ldots n-1$

$$I(n,k) = \int_0^\infty x^k L_n(x) e^{-x}\, dx = \int_0^\infty x^k K_n(x)\, dx = \ldots$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{d}{dx} K_n(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left(n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}\right) = n \cdot \frac{d}{dx} K_{n-1}(x) - K_n(x) \\ &\Rightarrow K_n(x) = \frac{d}{dx}\left\{n K_{n-1}(x) - K_n(x)\right\} \\ &\Rightarrow \int K_n(x)\, dx = n K_{n-1}(x) - K_n(x) \end{aligned}\right)$$

$$\ldots = \underbrace{\left(n K_{n-1}(x) - K_n(x)\right) x^k \Big|_0^\infty}_{\circledast} - k \int_0^\infty \left(n K_{n-1}(x) - K_n(x)\right) x^{k-1}\, dx = \ldots$$

$$\circledast = \left(n K_{n-1}(x) - K_n(x)\right) x^k \Big|_0^\infty = e^{-x} \underbrace{\left(n L_{n-1}(x) - L_n(x)\right) x^k}_{\text{פולינום}} \Big|_0^\infty = 0 - 0 = 0$$

$$\left(\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \quad \forall k\right)$$

$$\ldots = -k \int_0^\infty \left(n K_{n-1}(x) - K_n(x)\right) x^{k-1}\, dx = k \int_0^\infty K_n(x) x^{k-1} - kn \int_0^\infty K_{n-1}(x) x^{k-1} =$$

$$= k \cdot I(n, k-1) - kn\, I(n-1, k-1)$$

נמשיך ברקורסיה על n ״

הוכחה ל-

$$I(n,k)=\int_0^\infty x^k L_n(x)e^{-x}dx = kI(n,k-1)-k\cdot nI(n-1,k-1)$$

$\nabla^{(n,k)}$

בשביל תנאי התחלה צריך לחשב

$$I(n,0) \qquad \forall n>0$$

$$I(n,0)=\int_0^\infty L_n(x)e^{-x}dx=\int_0^\infty K_n(x)dx=$$

$$=nK_{n-1}(x)-K_n(x)\Big|_0^\infty=(nL_{n-1}(x)-L_n(x))e^{-x}\Big|_0^\infty=\dots$$

נמצא את $nL_{n-1}(x)-L_n(x)$:

$$L_n(x)=e^x\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(nx^{n-1}e^{-x}-e^{-x}x^n)=nL_{n-1}(x)-e^x\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x}x^n)$$

$$\Rightarrow nL_{n-1}(x)-L_n(x)=e^x\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x}x^n)$$

$$\dots=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x}x^n)\Big|_0^\infty=0-0=0$$

השוויון האחרון נובע מכך ש- $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x}x^n)\cdot e$ מכיל איברים $e^{-x}\cdot x^i$ כאשר $i>0$

ולכן גם בגבול ב-0 וגם באינסוף גבולם יהיה אפס.

מאחר והוכחנו את תנאי ההתחלה $I(n,0)=0$ לכל $n>0$

ולכן מתקיים $I(n,k)=kI(n,k-1)-knI(n-1,k-1)=0-0=0$ //

מאחר הוכחנו ש-

$$\int_0^\infty x^k L_n(x)e^{-x}dx=0 \qquad k=0,1,\dots,n-1$$

לכן אם נניח בה"כ $i>j$ אז

$$\langle L_i(x),L_j(x)\rangle=\int_0^\infty L_i(x)L_j(x)e^{-x}dx=$$

$$=\int_0^\infty(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2\dots+\alpha_jx^j)L_i(x)e^{-x}dx=$$

$$=\alpha_0\int_0^\infty L_i(x)e^{-x}dx+\alpha_1\int_0^\infty xL_i(x)e^{-x}dx+\dots+\alpha_j\int_0^\infty x^jL_n(x)e^{-x}dx=0+0+\dots+0=0$$

והוכחנו ש- $L_i(x)$ ו- $L_j(x)$ אורתוגונליים לכל $i\neq j$.

<u>תרגיל מס' 1</u>

נמצא את $L_n(x)$ ל- $n \le 3$:

$$L_0(x) = e^x \cdot \frac{d^0}{dx^0}\left(x^0 e^{-0}\right) = \underline{1}$$

$$L_1(x) = e^x \frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\right) = e^x\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = 1 - x$$

$$L_2(x) = e^x \frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 e^{-x}\right) = e^x \frac{d}{dx}\left(2xe^{-x} - x^2e^{-x}\right) =$$

$$= e^x\left(2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x}\right) =$$

$$= 2 - 2x - 2x + x^2 = x^2 - 4x + 2$$

$$L_3(x) = e^x \frac{d^3}{dx^3}\left(x^3e^{-x}\right) = e^x \frac{d^2}{dx^2}\left(3x^2e^{-x} - x^3e^{-x}\right) =$$

$$= e^x \frac{d}{dx}\left(6xe^{-x} - 3x^2e^{-x} - 3x^2e^{-x} + x^3e^{-x}\right) = e^x \frac{d}{dx}\left(6xe^{-x} - 6x^2e^{-x} + x^3e^{-x}\right) =$$

$$= e^x\left(6e^{-x} - 6xe^{-x} - 12xe^{-x} + 6x^2e^{-x} + 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x}\right) =$$

$$= 6 - 6x - 12x + 6x^2 + 3x^2 - x^3 = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$$

$\Rightarrow$

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1 - x$$

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$$

שאלה 2

לא ניתן לבחור a,b,c כך שהפולינום $P_5(x)=(x-a)(x-b)^2(x-c)^3$

יהיה אורתוגונלי לכל פולינום ממעלה ≤ 2, לפי המ"פ $(W(x)=1)$ בקטע $[-1,1]$

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} w(x)f(x)g(x)\,dx$$

מכיוון שעבור הפולינום $p(x)=(x-a)(x-c)$ שהוא פולינום ממעלה 2, נקבל:

$$\langle P_5(x),p(x)\rangle=\int_{-1}^{1}(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^4\,dx$$

האינטגרנד הוא אי-שלילי (ושונה מאפס) ולכן האינטגרל לא יכול להיות שווה לאפס, כלומר, לא ניתן לבחור a,b,c המקיימים את הדרושה.

שאלה 3

רוצים למצוא קירוב לפונ' $f(x)=x+2$ באמצעות פונ' בסיס $\{1,e^x,e^{-x}\}$.

1. נמצא את המקדמים עבור המ"פ: $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)e^x\,dx$:

לפי התרגול (הרצאה):

נסמן:

$$\varphi_1=1\quad \varphi_2=e^x\quad \varphi_3=e^{-x}$$

$$\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle=\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1$$

$$\langle\varphi_2,\varphi_2\rangle=\int_0^1 e^xe^xe^x\,dx=\int_0^1 e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(e^3-1)$$

$$\langle\varphi_3,\varphi_3\rangle=\int_0^1 e^{-x}e^{-x}e^x\,dx=\int_0^1 e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^1=-e^{-1}+e^0=1-e^{-1}$$

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle=\int_0^1 1\cdot e^x\cdot e^x\,dx=\int_0^1 e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$\langle\varphi_1,\varphi_3\rangle=\int_0^1 1\cdot e^{-x}\cdot e^x\,dx=\int_0^1 1\,dx=x\Big|_0^1=1$$

$$\langle\varphi_2,\varphi_3\rangle=\int_0^1 e^xe^{-x}e^x\,dx=\int_0^1 e^x\,dx=e-1$$

[illegible]

$$\begin{bmatrix} e-1 & \frac{1}{2}(e^2-1) & 1 \\ \frac{1}{2}(e^2-1) & \frac{1}{3}(e^3-1) & e-1 \\ 1 & e-1 & 1-e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e-1 \\ \frac{5e^2-3}{4} \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\langle f, \varphi_1 \rangle = \int_0^1 (x+2)\cdot 1\cdot e^x\,dx = \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 2e^x dx =$$

$$= xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx + 2e^x\Big|_0^1 = e - e^x\Big|_0^1 + 2e-2 =$$

$$= \cancel{e} - \cancel{e} + 1 + 2e - 2 = 2e-1$$

$$\langle f, \varphi_2 \rangle = \int_0^1 (x+2)\cdot e^x e^x\,dx = \int_0^1 (x+2)e^{2x}dx = \int_0^1 xe^{2x}dx + 2\int_0^1 e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cdot x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx + 2\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}\int_0^1 e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4} = \frac{5e^2-3}{4}$$

$$\langle f, \varphi_3 \rangle = \int_0^1 (x+2)e^{-x}e^x\,dx = \int_0^1 (x+2)dx = \left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+2 = \frac{5}{2}$$

לפתור (ב- matlab כמובן) נקבל:

$c_1 = 2.5216 \qquad c_2 = 0.2896 \qquad c_3 = -0.8213$

ב. נבנה בסיס אורתוגונלי לפי ג"ש מ- $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ ל- $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$:

$$\boxed{\phi_1 = \varphi_1 = 1}$$

$$\phi_2 = \varphi_2 - \frac{\langle \varphi_2, \phi_1 \rangle}{\|\phi_1\|^2}\phi_1$$

$$\langle \varphi_2, \phi_1 \rangle = \langle e^x, 1 \rangle \underset{\text{חושב קודם}}{=} \frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$\|\phi_1\|^2 = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle = e-1$$

$$\Rightarrow \phi_2 = e^x - \frac{\frac{1}{2}(e^2-1)}{e-1}\cdot 1 = \boxed{e^x - \tfrac{1}{2}(e+1)} = $$

$$\cong \boxed{e^x - 1.85914}$$

$$\phi_3 = \varphi_3 - \frac{\langle \varphi_3, \phi_1\rangle}{\|\phi_1\|^2}\phi_1 - \frac{\langle \varphi_3, \phi_2\rangle}{\|\phi_2\|^2}\phi_2$$

$$\langle \varphi_3, \phi_1\rangle = \langle e^{-x}, 1\rangle = 1$$

$$\|\phi_1\|^2 = e-1$$

$$\langle \varphi_3, \phi_2\rangle = \langle e^{-x}, e^x - \tfrac{1}{2}(e+1)\rangle =$$

$$= \langle e^{-x}, e^x\rangle - \tfrac{1}{2}(e+1)\langle e^{-x}, 1\rangle =$$

$$= e-1-\tfrac{1}{2}(e+1)\cdot 1 = e-1-\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{e}{2}-\frac{3}{2}}}$$

$$\|\phi_2\|^2 = \langle e^x - \tfrac{1}{2}(e+1), e^x - \tfrac{1}{2}(e+1)\rangle = \langle e^x, e^x\rangle - (e+1)\langle e^x, 1\rangle + \tfrac{1}{4}(e+1)^2\langle 1,1\rangle =$$

$$= \tfrac{1}{3}(e^3-1) - (e+1)\tfrac{1}{2}(e^2-1) + \tfrac{1}{4}(e+1)^2(e-1) \cong 0.42277$$

$$\Rightarrow \phi_3 = e^{-x} - \frac{1}{e-1}\cdot 1 - \frac{\frac{e}{2}-\frac{3}{2}}{0.42277}\cdot\left(e^x - \tfrac{1}{2}(e+1)\right) =$$

$$\cong e^{-x} + 0.331183\, e^x - 1.2 \quad //$$

<u>סב</u> כעת, כשבסיס האורתוגונלי ϕ_i נמצא את המקדמים.

$$C_i = \frac{\langle f, \phi_i\rangle}{\langle \phi_i, \phi_i\rangle}$$

$$\langle f, \phi_1\rangle = \langle x+2, 1\rangle = 2e-1$$

$$\langle f, \phi_2\rangle = \langle x+2, e^x - 1.85914\rangle = \langle x+2, e^x\rangle - 1.85914\langle x+2, 1\rangle =$$

$$= \frac{5e^2-3}{4} - (2e-1)\cdot 1.85914 \cong 0.23812$$

!

$$\langle f,\phi_3\rangle = \langle x+2,\ e^{-x}+0.333183e^{x}-1.2\rangle =$$

$$= \langle x+2, e^{-x}\rangle + 0.333183\langle x+2, e^{x}\rangle - 1.2\langle x+2, 1\rangle =$$

$$= -0.602638$$

$$\Rightarrow\ c_1 = \frac{\langle f,\phi_1\rangle}{\langle \phi_1,\phi_1\rangle} = \frac{2e-1}{e-1} \cong 2.582$$

$$c_2 = \frac{\langle f,\phi_2\rangle}{\langle \phi_2,\phi_2\rangle} \cong 0.56325$$

$$c_3 = \frac{\langle f,\phi_3\rangle}{\langle \phi_3,\phi_3\rangle} = -0.8213$$

שאלה 4

נוכיח שהטענה נכונה:

יהי $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ בסיס אורתונורמלי למרחב בו מקרבים את הפונ' f ו g.

(בסיס כזה מקבלים ע"י GS של הבסיס הנתון, ונרמול)

אז המקדמים בקירוב הטוב ביותר לפי LS של $f(x)$ הם:

$$q_i = \frac{\langle f,\varphi_i\rangle}{\langle \varphi_i,\varphi_i\rangle} \underset{\text{אורתונ'}}{=} \langle f,\varphi_i\rangle \qquad \left(Q_2(x) = \sum_i q_i\varphi_i(x)\right)$$

המקדמים בקירוב הטוב ביותר לפי LS של $g(x)$ הם:

$$h_i = \langle g,\varphi_i\rangle \qquad \left(H_2(x) = \sum_i h_i\varphi_i(x)\right)$$

המקדמים בקירוב הטוב ביותר לפי LS של $(f(x)+g(x))$ הם:

$$k_i = \langle f+g,\varphi_i\rangle = \langle f,\varphi_i\rangle + \langle g,\varphi_i\rangle = q_i + h_i$$

ולכן הקירוב הטוב ביותר לפי LS של $f(x)+g(x)$ הוא $Q_2(x)+H_2(x)$!

$$\left(f(x)+g(x) \underset{LS}{\approx} \sum_i k_i\varphi_i(x) = \sum_i (q_i+h_i)\varphi_i(x) = \sum_i q_i\varphi_i(x) + \sum_i h_i\varphi_i(x) = Q_2(x) + H_2(x) \right)$$

שאלה 5

$c_0 + 2c_1 = 0$

$3c_0 + 4c_1 = 0$

$5c_0 + 6c_1 = 1$

נשית כבעיית מינימום ריבועים:

מקרבים את הפונ׳ f בנק׳ x_1, x_2, x_3.

$f(x_1) = 0$

$f(x_2) = 0$

$f(x_3) = 1$

באמצעות שני פונ׳ בסיס φ_0, φ_1 המקיימות

$\varphi_0(x_1) = 1 \quad \varphi_0(x_2) = 3 \quad \varphi_0(x_3) = 5$

$\varphi_1(x_1) = 2 \quad \varphi_1(x_2) = 4 \quad \varphi_1(x_3) = 6$

הקירוב יהיה

$$f \sim c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1$$

המ״פ הנדרשת:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{3} f(x_i) g(x_i)$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \sum_{i=1}^{3} \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) = 1 + 9 + 25 = 35$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \sum_{i=1}^{3} \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) = 4 + 16 + 36 = 56$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \sum_{i=1}^{3} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) = 2 + 12 + 30 = 44$$

$$\langle f, \varphi_0 \rangle = \sum_{i=1}^{3} f(x_i)\varphi_0(x_i) = 0 + 0 + 5 = 5$$

$$\langle f, \varphi_1 \rangle = \sum_{i=1}^{3} f(x_i)\varphi_1(x_i) = 0 + 0 + 6 = 6$$

$\Leftarrow$

$$\begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$35c_0 + 44c_1 = 5$$

$$44c_0 + 56c_1 = 6$$

$$44\left(\frac{5-44c_1}{35}\right) + 56c_1 = 6$$

$$220 - 1936c_1 + 1960c_1 = 210$$

$$24c_1 = -10 \Rightarrow c_1 = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}$$

$$c_0 = \frac{5-44c_1}{35} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftarrow \quad c_0 = \frac{2}{3} \ , \ c_1 = -5/12$$

ב)

נבחר פונ' w:

$$w(x_1) = w(x_2) = 1$$

$$w(x_3) = 2$$

נפתור כמו קודם, רק שהמ"פ כאן הוא:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{3} f(x_i)\, g(x_i)\, w(x_i)$$

פתרון:

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \sum_{i=1}^{3} \varphi_0(x_i)^2 \cdot w(x_i) = 1 + 9 + 25 \cdot 2 = 60$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \sum_{i=1}^{3} \varphi_1(x_i)^2\, w(x_i) = 4 + 16 + 2 \cdot 36 = 92$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \sum_{i=1}^{3} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i)\, w(x_i) = 2 + 12 + 2 \cdot 30 = 74$$

$$\langle f, \varphi_0 \rangle = 0 + 0 + 2 \cdot 5 = 10$$

$$\langle f, \varphi_1 \rangle = 0 + 0 + 2 \cdot 6 = 12$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 60 & 74 \\ 74 & 92 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

המשך סעיף ב'

ונפתור:

$$\begin{cases} 60\hat{c}_0 + 74\hat{c}_1 = 10 \\ 74\hat{c}_0 + 92\hat{c}_1 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30\hat{c}_0 + 37\hat{c}_1 = 5 \\ 37\hat{c}_0 + 46\hat{c}_1 = 6 \end{cases} \qquad 37\left(\frac{5-37\hat{c}_1}{30}\right) + 46\hat{c}_1 = 6$$

$$185 - 1369\hat{c}_1 + 1380\hat{c}_1 = 180$$

$$11\hat{c}_1 = -5$$

$$\hat{c}_1 = -5/11$$

$$c_0 = 8/11$$

$$\Rightarrow c_0 = 8/11 \quad c_1 = -5/11$$

✓

3ג

בסעיף א':

$$f(x) \sim \frac{2}{3}\varphi_0(x) - \frac{5}{12}\varphi_1(x)$$

		הפרש
$f(x_1) \sim \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{5}{12}\cdot 2 = -1/6$	$f(x_1) = 0$	$1/6$
$f(x_2) \sim \frac{2}{3}\cdot 3 - \frac{5}{12}\cdot 4 = 1/3$	$f(x_2) = 0$	$1/3$
$f(x_3) \sim \frac{2}{3}\cdot 5 - \frac{5}{12}\cdot 6 = \frac{5}{6}$	$f(x_3) = 1$	$1/6$

בסעיף ב':

$$f(x) \sim \frac{8}{11}\varphi_0(x) - \frac{5}{11}\varphi_1(x)$$

✓

		הפרש
$f(x_1) \sim \frac{8}{11}\cdot 1 - \frac{5}{11}\cdot 2 = -2/11$	$f(x_1) = 0$	$2/11$
$f(x_2) \sim \frac{8}{11}\cdot 3 - \frac{5}{11}\cdot 4 = 4/11$	$f(x_2) = 0$	$4/11$
$f(x_3) \sim \frac{8}{11}\cdot 5 - \frac{5}{11}\cdot 6 = 10/11$	$f(x_3) = 1$	$1/11$

ניתן לראות כי השגיאה בסעיף ב' בנק' x_3 קטנה יותר לשגיאה ב-סעיף א' ב-x_3

לעומת זאת, השגיאות ב-x_1, x_2 בסעיף ב' גדולות. כלומר [illegible]

גבוה יותר לנק' x_3 בסעיף ב'.

נבדוק גם את הנורמה L_2 (למעשה ריבוע שגיאה)

סעיף א': $\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{6}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$

סעיף ב': $\sqrt{\frac{4}{11^2} + \frac{16}{11^2} + \frac{2\cdot 1}{11^2}} = \sqrt{\frac{22}{11^2}} = \sqrt{\frac{2}{11}}$

מתקיים ש- $\sqrt{\frac{2}{11}} > \sqrt{\frac{1}{6}}$

המשך בדף הבא

קיבלנו שסכום ריבועי השגיאות בסעיף ג' גדול יותר מאשר בסעיף א'

וזה לא מפתיע כי שם נקח את הפתרון של סעיף ג' ($\tilde{c}_0, \tilde{c}_1$)

נסמן את השגיאות שקיבלנו ב- e_1, e_2, e_3 את השגיאה לכל נקודה

בסעיף ג' היה $\sqrt{e_1^2+e_2^2+2e_3^2}$, (בסעיף א')

עבור אותו פתרון, סכום ריבועי השגיאות בסעיף א' יהיה $\sqrt{e_1^2+e_2^2+e_3^2}$

וזה בהכרח גדול או שווה מסכום ריבועי השגיאות בפתרון LS

של סעיף א'! כלומר,

$$\sqrt{e_1^2+e_2^2+2e_3^2} \geq \sqrt{e_1^2+e_2^2+e_3^2} \geq$$ סכום ריבועי שגיאות מפתרון סעיף א'

ולכן התוצאה לא מפתיעה.