100

שאלה 1

$$w_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}} (x_i - x_j)^{-1}$$

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} f_i w_i (x-x_i)^{-1}}{\sum_{i=0}^{n} w_i (x-x_i)^{-1}}$$

צ"ל ש- $p(x)$ פולינום אינטרפולציה של f_i בנקודות x_i.

כלומר צ"ל ש- $p(x_k) = f_k$.

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} f_i w_i (x-x_i)^{-1}}{\sum_{i=0}^{n} w_i (x-x_i)^{-1}} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n} (x-x_j)}{\sum_{j=0}^{n} (x-x_j)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n} f_i w_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x-x_j)}{\sum_{i=0}^{n} w_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x-x_j)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} f_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}}{\sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n} f_i \cdot l_i(x)}{\sum_{i=0}^{n} l_i(x)} = \frac{\text{פולינום אינטרפולציה של } f_i \text{ בנק' } x_i}{\text{פולינום אינטרפולציה של } 1} =$$

המכנה = 1 מיחידות פולינום האינטרפולציה

$$= \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

וזהו אינטרפולציה Lagrange.

שאלה 2

א.

שגיאת הקירוב:

$$|f(x)-p(x)| = \left|\frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-x_0)(x-x_1)\right|$$

כאשר $\xi(x)\in int(x_0,x_1)$

x_0,x_1 - נקודות האינטרפולציה.

יש למזער את המקסימום של $|(x-x_0)(x-x_1)|$ ע"י בחירה של x_0,x_1. כלומר יש למצוא את x_0,x_1 כך שהערך המקסימום של $|(x-x_0)(x-x_1)|$ יהיה מינימלי.

הנקודות שמביאות למינימום של הערך המקסימום מתקבלות ע"י אפסי פולינום צ'בישב:

$T_0=1 \quad T_1=x'$ $\qquad T_2(x') = 2x'T_1(x') - T_0(x') = 2x'\cdot x' - 1 = 2x'^2-1$

$$T_2(x)=0$$

$$x' = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$a=0;b=1$

לתחום שלנו:

$$x = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2}x' = \frac{1}{2}+\frac{x'}{2}$$

$$x_0 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad x_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$x_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \qquad x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\Leftarrow$ נק' האינטרפולציה: $x_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\ ;\ x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

ב.

$f(x) = xe^x \qquad [0,1]$

$x_0=0$
$x_1=0$
$x_2=0$
$x_3=1$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
0	0	0	—	—	—
1	0	0	$f'(0)=1$	—	—
2	0	0	$f'(0)=1$	$\frac{f''(0)}{2!}=1$	—
3	1	e	$\frac{e-0}{1-0}=e$	$\frac{e-1}{1-0}=e-1$	$\frac{e-1-1}{1-0}=e-2$

$f(x)=xe^x \qquad f'(x)=e^x+xe^x \qquad f''(x)=e^x+e^x+xe^x=e^x(2+x)$

$f'(0)=1 \qquad f''(0)=2 \qquad f(1)=e$

$$p(x)=0+1(x-0)+1(x-0)(x-0)+(e-2)(x-0)(x-0)(x-0)$$

$$p(x)=x+x^2+(e-2)x^3$$

(וידוא:

$p(0)=0=f(0)$ ✓

$p'(0)=(1+2x+3(e-2)x^2)|_{x=0}=1=f'(0)$ ✓

$p''(0)=(2+6(e-2)x)|_{x=0}=2=f''(0)$ ✓

$p(1)=1+1+e-2=e=f(1)$ ✓

(נמצא ביטוי לשגיאת הקירוב:

$$\left|f(x)-p(x)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x)^3\cdot(x-1)\right|$$

$f(x)=xe^x \qquad f'(x)=e^x+xe^x \qquad f''(x)=e^x(2+x)$

$f'''(x)=e^x(2+x)+e^x=e^x(3+x)$

$f^{(4)}(x)=e^x(3+x)+e^x=e^x(4+x)$ — מונוטונית עולה:
$(f^{(5)}(x)=e^x(5+x)>0)$

$$\max_{0\le x\le 1} f^{(4)}(x)=f^{(4)}(1)=5e$$

(נמצא מקסימום של הערך המוחלט של $\phi(x)=x^3(x-1)$

$\phi(x) = x^3(x-1) = x^4 - x^3$ $[0,1]$

$\phi(0) = 0 \quad ; \quad \phi(1) = 0$

$\phi'(x) = 4x^3 - 3x^2$

נמצא קיצון:

$4x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(4x - 3) = 0$

$x = 0$ $x = \frac{3}{4}$

$\phi(0)$

$\phi\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cong -0.105$

$\Rightarrow \left| f(x) - p(x) \right| \le \left| \frac{5e}{4!}(-0.105) \right| \cong 0.022e$

שאלה 3

$x_{-1} = x_0 - h$: f_{-1}

x_0 : f_0

$x_1 = x_0 + h$: f_1

נמצא את פולינום האינטרפולציה באמצעות הפרשים מחולקים:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	$x_0 - h$	f_{-1}	—	—
0	x_0	f_0	$\frac{f_0 - f_{-1}}{h}$	—
1	$x_0 + h$	f_1	$\frac{f_1 - f_0}{h}$	$\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h(2h)}$

$$\Rightarrow P_2(x) = f_{-1} + \frac{f_0 - f_{-1}}{h}(x - (x_0 - h)) + \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2}(x - (x_0 - h))(x - x_0) =$$

<u>המשך סע' ג</u>

<u>נוסחת השגיאה:</u>

$$f(x) - P_2(x) = \frac{f'''(\xi(x))}{3!} (x-(x_0-h))(x-x_0)(x_0-(x_0+h))$$

עבור $\xi(x) \in int(x_0-h, x_0, x_0+h)$

$$|f(x)-P_2(x)| \leq \left| \frac{M}{3!} (x-(x_0-h))(x-x_0)(x-(x_0+h)) \right|$$

<u>צ"ל</u> $\Leftarrow$

יש למצוא חסם ל- Φ

$$\Phi(x) \stackrel{\Delta}{=} (x-(x_0-h))(x-x_0)(x-(x_0+h))$$

בקטע $[x_0-h, x_0+h]$.

זהו פולינום ממעלה 3 שמתאפס ב- x_{-1}, x_0, x_1.

יש למצוא את המקסימום/מינימום בקטע $[x_0-h, x_0+h]$

נגזור ונשווה לאפס:

$$\Phi(x) = (x^2 - x(2x_0-h) + x_0(x_0-h))(x-(x_0+h)) =$$

$$= x^3 - x^2(x_0+h) - x^2(2x_0-h) + x(2x_0-h)(x_0+h)$$

$$+ x x_0(x_0-h) - x_0(x_0-h)(x_0+h) =$$

$$= x^3 + x^2[-x_0-h-2x_0+h] + x[2x_0^2 + \cancel{2hx_0} - \cancel{hx_0} - h^2 + x_0^2 - \cancel{hx_0}]$$

$$-x_0(x_0-h)(x_0+h) =$$

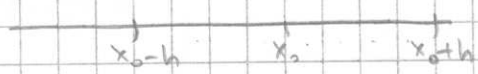
$$= x^3 + x^2(-3x_0) + x(3x_0^2-h^2) - x_0(x_0^2-h^2)$$

$$\Phi'(x) = 3x^2 + 2x(-3x_0) + 3x_0^2 - h^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$3x^2 - (6x_0)x + (3x_0^2-h^2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$x = \frac{6x_0 \pm \sqrt{36x_0^2 - 36x_0^2 + 12h^2}}{6} = \frac{6x_0 \pm \sqrt{12}\, h}{6}$$

$$x = \frac{6x_0 \pm \sqrt{12}\,h}{6} = \frac{6x_0 \pm 2\sqrt{3}\,h}{6} = x_0 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}\,h$$



כלומר קיצון אחד נמצא בתחום $(x_0-h,\ x_0)$

ושני בתחום $(x_0,\ x_0+h)$

(מאחר ש- $\frac{\sqrt{3}}{3}<1$)

נציב את הערכים:

$$\phi\left(x_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}h\right) = \left(h - \frac{\sqrt{3}}{3}h\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)\left(-h-\frac{\sqrt{3}}{3}h\right) =$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{3}h \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3}h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}h =$$

$$= \left(\frac{h}{3}\right)^3 \left(\sqrt{3}\right)(9-3) = \left(\frac{h}{3}\right)^3 \sqrt{3} \cdot 6 = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{9}h^3}}$$

ונציב את השני:

$$\phi\left(x_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}h\right) = \left(h + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h - h\right) = -\phi\left(x_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}h\right)$$

$$\Leftarrow \quad \max_{x \in [x_0-h,\, x_0+h]} |\phi(x)| = \frac{2\sqrt{3}}{9}h^3$$

$$\Leftarrow \quad |f(x) - P_2(x)| \le \frac{M}{3!} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9}h^3$$

$$|f(x) - P_2(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{27}Mh^3$$

שאלה 4

נזכיר שעבור פולינום הרמיט $P_{2m+1}(x)$ ב נקודות $x_0,x_1,\dots,x_m$

עבור הפונ' $f(x)$ מקיימת:

$$f(x)-P_{2m+1}(x)=\frac{f^{(2m+2)}(\xi(x))}{(2m+2)!}\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^2$$

עבור $\xi(x)\in int(x,x_0,\dots,x_m)$

הוכחה:

סמן: $\Phi(x)=\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^2$.

נגדיר:

$$F(t)=f(t)-P_{2m+1}(t)-\frac{\Phi(t)}{\Phi(x)}\left[f(x)-P_{2m+1}(x)\right]$$

ונחשב את $F'(t)$:

$$F'(t)=f'(t)-P'_{2m+1}(t)-\frac{\Phi'(t)}{\Phi(x)}\left[f(x)-P_{2m+1}(x)\right]$$

מתקיים:

$$F'(x_i)=\underbrace{f'(x_i)-P'_{2m+1}(x_i)}_{=0}-\frac{\Phi'(x_i)}{\Phi(x)}\left[f(x)-P_{2m+1}(x)\right]$$

לפי הגדרת פולינום הרמיט)

עבור ש- $\Phi(x)=\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)$, כלומר $\Phi(x)$ הוא פולינום כך ש- x_i הוא

שורש מריבוי - מסדר 2 ! כלומר גם $\Phi'(x_i)=0$ לכל $i=0\dots m$

$$\Rightarrow\quad F'(x_i)=0\quad\forall i=0\dots m$$

כלומר $F'(t)$ מתאפסת ב- $m+1$ נקודות: $\{x_i\}$

בנוסף,

$$F(x_i)=\overbrace{f(x_i)-P_{2m+1}(x_i)}^{=0}-\overbrace{\frac{\Phi(x_i)}{\Phi(x)}}^{=0}\left[f(x)-P_{2m+1}(x)\right]=0$$

לפי הגדרת פ' הרמיט, לפי הגדרה

$$F(x)=f(x)-P_{2m+1}(x)-\underbrace{\frac{\Phi(x)}{\Phi(x)}}_{=1}\left[f(x)-P_{2m+1}(x)\right]=0$$

$\Leftarrow$ $F(t)$ מתאפסת ב- $\underline{\underline{m+2}}$ נקודות

$\Leftarrow$ לפי משפט Rolle, ל- $F'(t)$ יש $m+1$ אפסים, $\neq$, בין כל שני נק' איפוס.

✓

כלומר, הראינו של- $F'(t)$ יש $m+1$ אפסים בנקודות x_i $i=0..m$

ובנוסף, מש"ל יש אפס בין β שבין ערכים סמוכים - שונים מ- $x, x_0, x_1, \dots, x_m$

⇐ ל- $F'(t)$ יש $m+1+m+1=2m+2$ אפסים בתחום

$int(x, x_0, \dots, x_m)$

⇐ לפי Rolle, ל- $F''(t)$ יש $2m+1$ אפסים בתחום זה

ממשיכים כך ומקבלים ש- $F^{(2m+2)}(t)$ יש לה אפס אחד, נניח

$$F^{(2m+2)}(\xi(x))=0$$

$$F(t)=f(t)-P_{2m+1}(t)-\frac{\Phi(t)}{\Phi(x)}\left[f(x)-P_{2m+1}(x)\right]$$

$$F^{(2m+2)}(t)=f^{(2m+2)}(t)-P_{2m+1}^{(2m+2)}(t)-\frac{\Phi^{(2m+2)}(t)}{\Phi(x)}\left[f(x)-P_{2m+1}(x)\right]$$

P_{2m+1} הוא פולינום ממעלה קטנה מ- $2m+2$ ⇐ $P^{(2m+2)}(t)=0$

$$\Phi(t)=\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^2=\left[\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)\right]^2=\left[t^{m+1}+\alpha t^{m}+\beta t^{m-1}+\dots\right]^2=$$

$$=\left[t^{2m+2}+\gamma t^{2m+1}+\delta t^{2m}+\dots\right]$$

$$\Rightarrow \quad \Phi^{(2m+2)}(t)=(2m+2)!$$

$$\Rightarrow \quad F^{(2m+2)}(t)=f^{(2m+2)}(t)-0-\frac{(2m+2)!}{\Phi(x)}\left[f(x)-P_{2m+1}(x)\right]$$

$$0=F^{(2m+2)}(\xi(x))=f^{(2m+2)}(\xi(x))-\frac{(2m+2)!}{\Phi(x)}\left[f(x)-P_{2m+1}(x)\right]$$

$$\Rightarrow \quad f(x)-P_{2m+1}(x)=\frac{f^{(2m+2)}(\xi(x))}{(2m+2)!}\Phi(x)$$

$\blacksquare$

אנליזה נומרית ש"ב 6 – שאלה 5

.1

הפונקציה המחשבת את מקדמי פולינום האינטרפולציה לפי ניוטון:

```
function [A] = Newtoncoeff(X,Y)
% this fumction calculates Newton's interpolation polynomial coefficients
% X and Y are vectors of the same size. X elements are the interpolation points
% and Y elements are the corresponding values of the function to be interpolated.
% X and Y souuld be row vectors


n=length(X)-1;
B=zeros(n+1,n+2);
B(:,1)=X';
B(:,2)=Y';
for j=3:(n+2)
   for i=(j-1):(n+1)
      B(i,j)=(B(i,j-1)-B(i-1,j-1))/(B(i,1)-B(i-(j-2),1));
   end
end

A=(diag(B(:,2:end).*eye(n+1)))';
```

הפונקציה המחשבת את ערך פולינום האינטרפולציה בנקודה מסויימת:

```
function [res] = Newtoncoeff(A,X,x0)
% this function calculates the value of the Newton
interpolation
% at the point x0.A is the coefficients vector
% X is the interpolation points.


n=length(X);
res=A(n);
for i=(n-1):-1:1
   res=res*(x0-X(i))+A(i);
end
```

התוצאות עבור הפונקציה וערכי האינטרפולציה במרווחים שווים:
המקדמים שהתקבלו:

$A_0 = 0.038462$ $A_{12} = -2.9769e-005$

$A_1 = 0.017195$ $A_{13} = 9.3338e-006$

$A_2 = 0.0063348$ $A_{14} = -5.7974e-007$

$A_3 = 0.0022881$ $A_{15} = -9.2758e-007$

$A_4 = 0.00085375$ $A_{16} = 5.6814e-007$

$A_5 = 0.00033208$ $A_{17} = -2.0871e-007$

$A_6 = 0.00012812$ $A_{18} = 5.8656e-008$

$A_7 = 3.5799e-005$ $A_{19} = -1.3641e-008$

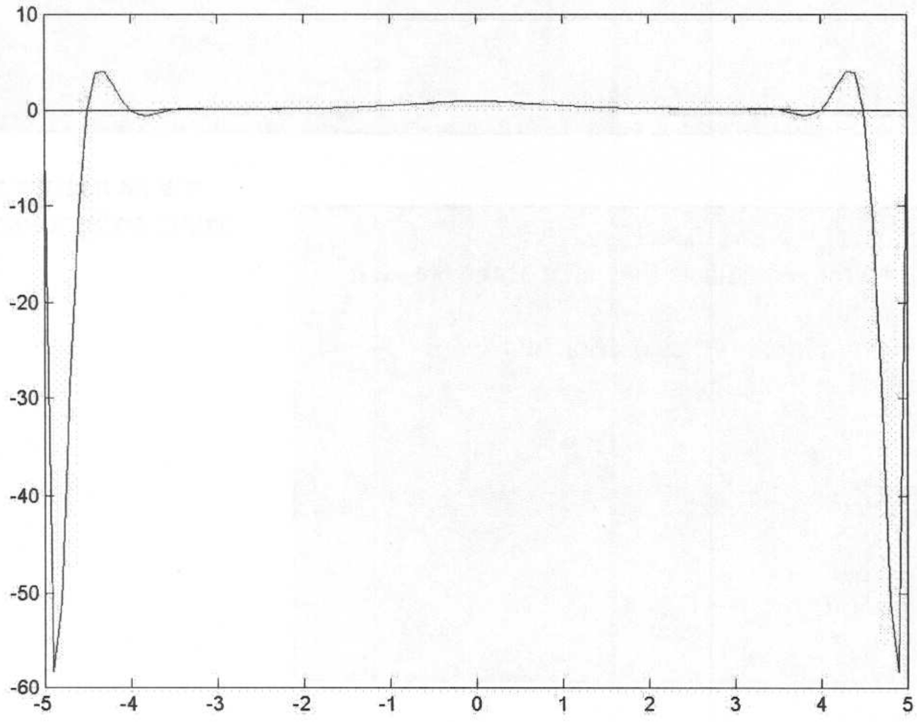
$A_8 = -1.9312e-005$ $A_{20} = 2.7282e-009$

$A_9 = -5.1814e-005$ $A_{21} = -3.5958e-026$

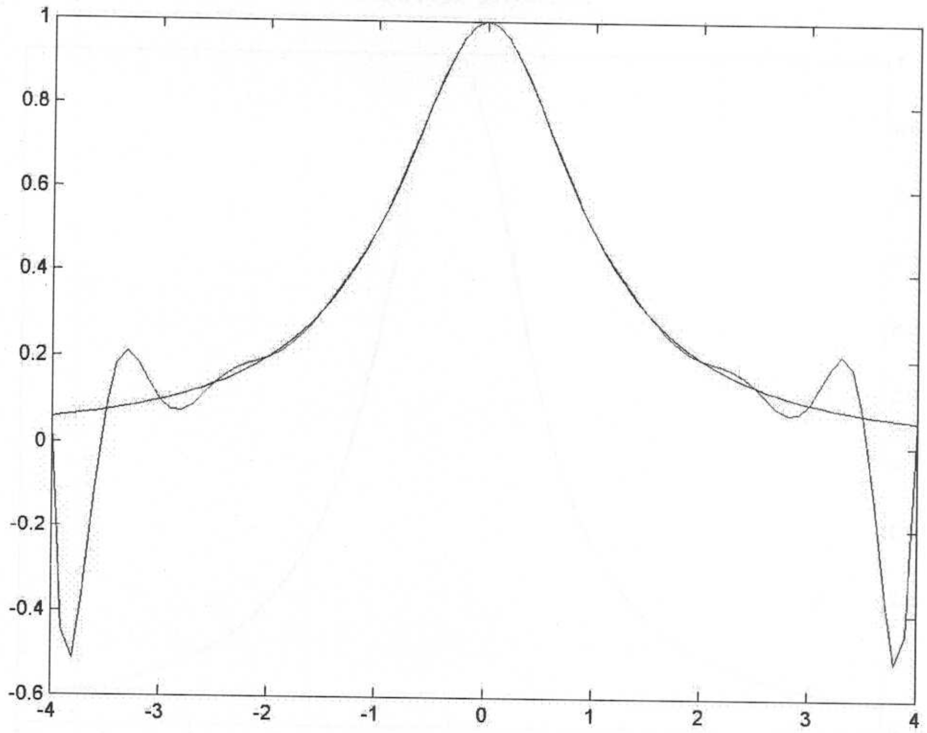
$A_{10} = -6.5945e-006$

$A_{11} = 4.4089e-005$

חישבנו את פולינום האינטרפולציה והצגנו באותה מערכת צירים את הפונקציה ואת פולינום האינטרפולציה:



מאחר ובקצוות מתחילה להיות התבדרות,נציג את אותם הגרפים בתחום מצומצם יותר:



הדוגמה בתרגיל זה היא הדוגמה של Runge שהוצגה בהרצאה, וניתן לראות כי הקירוב הפולינומיאלי עבור נקודות במרווחים שווים הוא טוב רק בתחום מצומצם ומתבדר בקצוות.

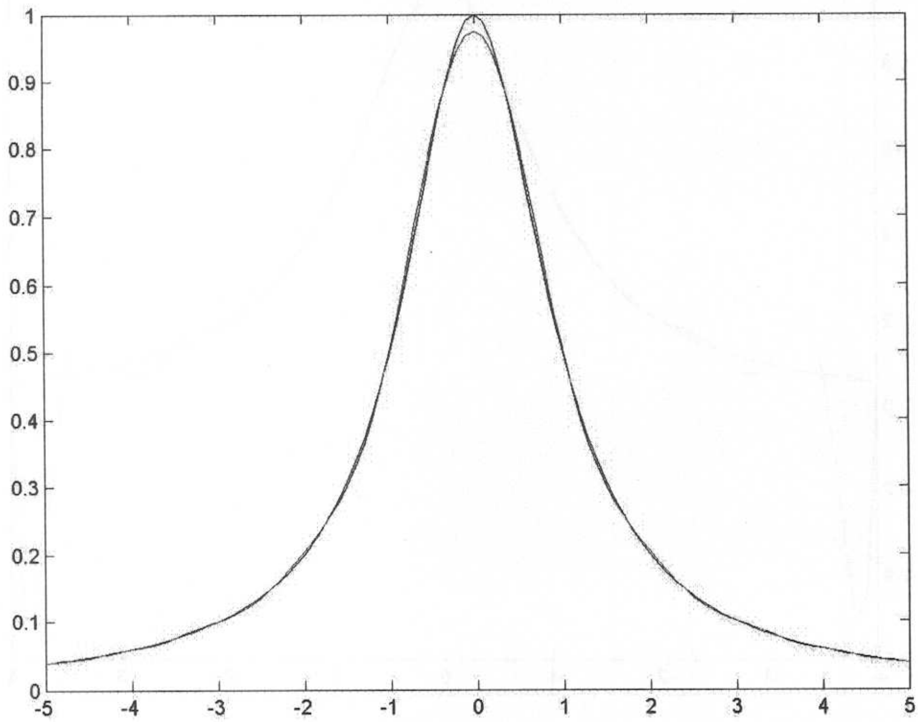
ב.

בסעיף זה מצאנו את פולינום האינטרפולציה באבסציסות של צ'בישב, וקיבלנו תוצאה טובה הרבה יותר:

המקדמים:

$A_0 = 0.038651$
$A_1 = -0.015343$
$A_2 = 0.004715$
$A_3 = -0.0013543$
$A_4 = 0.00039064$
$A_5 = -0.00011781$
$A_6 = 3.797\text{e-}005$
$A_7 = -1.2897\text{e-}005$
$A_8 = 3.8163\text{e-}006$
$A_9 = 1.02\text{e-}006$
$A_{10} = -4.6701\text{e-}006$
$A_{11} = -9.0486\text{e-}007$
$A_{12} = 1.5898\text{e-}006$
$A_{13} = 1.3255\text{e-}006$
$A_{14} = 5.7883\text{e-}007$
$A_{15} = 1.7998\text{e-}007$
$A_{16} = 4.4208\text{e-}008$
$A_{17} = 9.0041\text{e-}009$
$A_{18} = 1.5474\text{e-}009$
$A_{19} = 2.1944\text{e-}010$
$A_{20} = 2.2226\text{e-}011$
$A_{21} = -3.5958\text{e-}026$

והגרפים:



ניתן לראות כי הקירוב כאן טוב הרבה יותר מאשר קודם, במיוחד בקצוות.

הקוד המריץ את הפונקציות:

```
close all;
clear all;
clc;
syms t;
f=1/(1+t^2);
X=-5:0.5:5;
Y=subs(f,t,X);
A=Newtoncoeff(X,Y);
sp=-4:0.1:4;
interpval=[];
for i=sp
   interpval=[interpval,Pvalue(A,X,i)];
end
plot(sp,subs(f,t,sp),...
    sp,interpval);
% Now we choose the interpolation points as the roots of chebyshev
% polynomial for [-5,5] :
%
% n=21;
% a=-5;
% b=5;
% Xcheb=1:2:(2*n+1);
% Xcheb=cos(Xcheb*pi/(2*(n+1)));
% Xcheb=0.5*((b-a)*Xcheb+(a+b));
%
% Ycheb=subs(f,t,Xcheb);
% Acheb=Newtoncoeff(Xcheb,Ycheb);
% spcheb=-5:0.1:5;
```

```
%
% interpvalcheb=[];
% for i=spcheb
%     interpvalcheb=[interpvalcheb,Pvalue(Acheb,Xcheb,i)];
% end
%
% plot(spcheb,subs(f,t,spcheb),...
%      spcheb,interpvalcheb);
```