97

אלגו' של steffensen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n+f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}} = x_n - \frac{\left(f(x_n)\right)^2}{f(x_n+f(x_n)) - f(x_n)}$$

נפתח בטיילור, את $f(x_n+f(x_n))$ סביב x_n:

$$f(x_n+f(x_n)) = f(x_n) + f'(x_n)\cdot f(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} f(x_n)^2, \quad \xi_n \in \operatorname{int}(x_n, x_n+f(x_n))$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_n)^2}{f(x_n+f(x_n)) - f(x_n)} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} f(x_n)}$$

20/20

$$\Rightarrow \quad \overbrace{\alpha - x_{n+1}}^{=-\varepsilon_{n+1}} = \overbrace{\alpha - x_n}^{=-\varepsilon_n} + \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} f(x_n)} =$$

$$= \frac{f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} f(x_n)(\alpha - x_n)}{f'(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} f(x_n)}$$

כאן

(טיילור) $$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\eta_n)}{2}(\alpha - x_n)^2$$

$$\eta_n \in \operatorname{int}(x_n, \alpha)$$

(ערך הביניים) $$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(\theta_n)(\alpha - x_n), \quad \theta_n \in (x_n, \alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha - x_{n+1} = \frac{-\frac{f''(\eta_n)}{2}(\alpha - x_n)^2 + \frac{f''(\xi_n)}{2}\left(-f'(\theta_n)\right)(\alpha - x_n)^2}{f'(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} f(x_n)}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} = \frac{\frac{f''(\eta_n)}{2} + \frac{f''(\xi_n)}{2} f'(\theta_n)}{f'(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} f(x_n)}$$

קיבלנו,

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} = \frac{\frac{f''(\eta_n)}{2} + \frac{f''(\xi_n)}{2} f'(\theta_n)}{f'(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} f(x_n)}$$

בגבול $n \to \infty$, כאשר, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$ נקבל:

(מניחים התכנסות)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} =$$

$$= \frac{\frac{f''(\alpha)}{2} + \frac{f''(\alpha)}{2} f'(\alpha)}{f'(\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \left(1 + f'(\alpha)\right)$$

שמתכנס, סדר התכנסות לפחות 2, מאחר ו- $f'(\alpha) \neq 0$.

שאלה 2

שיטת steffensen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n+f(x_n))-f(x_n)}{f(x_n)}} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n+f(x_n))-f(x_n)}$$

$$f(x) = \varphi(x) - x$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(\varphi(x_n)-x_n)^2}{\varphi(\cancel{x_n}+\varphi(x_n)-\cancel{x_n}) - (\cancel{x_n}+\varphi(x_n)-\cancel{x_n}) - \varphi(x_n)+x_n} =$$

$$= x_n - \frac{\varphi^2(x_n) - 2x_n\varphi(x_n) + x_n^2}{\varphi(\varphi(x_n)) - 2\varphi(x_n) + x_n} =$$

$$= \frac{x_n\varphi(\varphi(x_n)) - \cancel{2x_n\varphi(x_n)} + \cancel{x_n^2} - \varphi^2(x_n) + \cancel{2x_n\varphi(x_n)} - \cancel{x_n^2}}{\varphi(\varphi(x_n)) - 2\varphi(x_n) + x_n} =$$

$$= \frac{x_n\varphi(\varphi(x_n)) - \varphi^2(x_n)}{\varphi(\varphi(x_n)) - 2\varphi(x_n) + x_n} =$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{x_0\varphi(\varphi(x_0)) - \varphi^2(x_0)}{\varphi(\varphi(x_0)) - 2\varphi(x_0) + x_0} \underset{z_0 = x_0}{\uparrow =} z_1 =$$

קל לראות שמתקיים השוויון.

שאלה 3

$$f(x)=0.$$

i) $x_{n+1}=\phi(x_n)$ - סדר התכנסות p.

ii) $x_{n+1}=\Psi(x_n)$ - סדר התכנסות q.

צ"ל סדר התכנסות של- $x_{n+1}=\phi(\Psi(x_n))$

(נניח מתקיים הגבול כאשר $n\to\infty$,

(סימון)

$x_{n+1}=\phi(x_n)$ -עבור $\varepsilon_n^{i}=x_n^{i}-\alpha$

$x_{n+1}=\Psi(x_n)$ -עבור $\varepsilon_n^{ii}=x_n^{ii}-\alpha$

$x_{n+1}=\phi(\Psi(x_n))$ -עבור $\varepsilon_n=x_n-\alpha$

בגבול $n\to\infty$:

$$\frac{\varepsilon_n^{i}}{(\varepsilon_{n-1}^{i})^{p}}=C_1\neq 0,\infty$$

$$\frac{\varepsilon_n^{ii}}{(\varepsilon_{n-1}^{ii})^{q}}=C_2\neq 0,\infty$$

x_{n+1} מתקבל ע"י

$$\begin{array}{ccccc} x_n & \xrightarrow{\Psi} & y & \xrightarrow{\varphi} & x_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \varepsilon_{x_n} & & \varepsilon_y & & \varepsilon_{x_{n+1}} \end{array}$$

$$\varepsilon_{x_{n+1}}=C_2\,\varepsilon_y^{q}\underset{\substack{\uparrow \\ \varepsilon_y=C_1\varepsilon_{x_n}^{p}}}{=}C_2(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_{x_n}^{p})^{q}=C_2C_1^{q}\cdot\varepsilon_{x_n}^{pq}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\varepsilon_{x_{n+1}}}{\varepsilon_{x_n}^{pq}}=C_2C_1^{q}\neq 0,\infty$$

$\Leftarrow$

סדר ההתכנסות הוא $\underline{p\cdot q}$.

שאלה 4

$$f(x) = x^4 - x - 1 = 0. \qquad J = [1, 1.4]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = x^4 - 1 \stackrel{\Delta}{=} \varphi(x) \qquad ; \varphi(x) \stackrel{\Delta}{=} x^4 - 1$$

ok

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$$

$$f(1.4) = 3.8416 - 1.4 - 1 = 1.4416 > 0$$

$\Rightarrow$ ב- J קיים לפחות פתרון אחד.

5/5

$$f'(x) = 4x^3 - 1 > 0 \quad \forall\, x \in J\,[1, 1.4]$$

$\Leftarrow$ הפונ' f מונוטונית עולה בקטע $J = [1, 1.4]$

1 1.4

לכן אם נניח בשלילה שקיימים שני שורשים $\alpha_1 < \alpha_2$ אזי

$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0 \Rightarrow$ לפי משפט ערך הביניים קיימת c: $\alpha_1 < c < \alpha_2$

כך ש- $f'(c) = 0$ וזו סתירה.

$\Leftarrow$ הוכחנו קיום ויחידות השורש בקטע $J = [1, 1.4]$.

ok

(ב) $\varphi_1(x) = \sqrt[4]{x+1}$; $x_{n+1} = \varphi_1(x_n)$

הבדיקה $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha$ 11/0

4/5

$$\varphi_1(x) = (x+1)^{\frac{1}{4}} \qquad \varphi_1'(x) = \frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{(x+1)^{3/4}}$$

$$|\varphi_1'(x)| \leq |\varphi_1'(1)| = \frac{1}{2^{3/4}} \leq 0.6 < 1$$

כי פונ' מונוטונית יורדת ב- J

בנוסף, $\varphi_1(x)$ מונוטונית עולה ב- J ולכן

$$1 < 1.19 \leq \sqrt[4]{1+1} \leq \varphi_1(x) \leq \sqrt[4]{1.4+1} \leq 1.25 < 1.4$$

$$\Rightarrow \varphi_1(x) \in J$$

$\Leftarrow$ לפי משפט ההתכנסות בצורה הראשונה, הסדרה המוגדרת ע"י $x_{n+1} = \varphi_1(x_n)$

מתכנסת לשורש α לכל $x_0 \in J$.

נמצא את סדר ההתכנסות:

$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^{-3} = \frac{1}{4}(\varphi_1(x))^{-3}$$

$$\varphi_1'(\alpha) = \frac{1}{4}(\varphi_1(\alpha))^{-3} = \frac{1}{4}(\alpha)^{-3} \neq 0 \qquad (\alpha \in J \Rightarrow \alpha \neq 0)$$

$\Leftarrow$ סדר ההתכנסות הוא 1

המשך

מאחר וסדר ההתכנסות הינו 1, וניתן להאיץ את קצב ההתכנסות ע"י השיטה k Aitken.

כלומר, נחשב את x_1, x_2, על-סמך x_0, x_1, x_2 נחשב את $\hat{x}_2$.

נציב את התוצאה הזו במקום x_0 של φ_1 וכך נחשב x_3, x_4. באמצעות $x_4, x_3, \hat{x}_2$ נחשב את $\hat{x}_4$ וכך הלאה.

(ii) $\varphi_2(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ $\qquad x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$ $\qquad J = [1, 1.4]$

4/5

$f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x$ אין נקודות

$$\varphi_2'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x - \sqrt{x+1}}{x^2} = \frac{x - 2(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}} = \frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}} = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

נסתכל על הקטע: $J' = [1.05, \sqrt{2}]$.

נראה ש- $\varphi_2'(x)$ מונוטונית עולה:

$$\varphi_2''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2\sqrt{x+1} - (x+2)\cdot\left(2x\sqrt{x+1} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)}{x^4(x+1)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^4(x+1)}\left(\frac{4x^2(x+1) - (x+2)\cdot 4x(x+1) + x^2}{2\sqrt{x+1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^4(x+1)}\left(\frac{4x^3 + 4x^2 - 4x(x^2+3x+2) + x^2}{2\sqrt{x+1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2x^4(x+1)}\left(\frac{-8x^2 - 8x}{2\sqrt{x+1}}\right) = \frac{8x^2 + 8x}{2x^4(x+1)\cdot 2\sqrt{x+1}} > 0 \quad \forall x \in J$$

כלומר $\varphi_2'(x)$ מונוטונית עולה בקטע J, J'

$$|\varphi_2'(1.05)| = 0.966 < 1 \quad ; \quad |\varphi_2'(\sqrt{2})| \doteq 0.55 < 1$$

$\Leftarrow$ $|\varphi_2'(x)| < 1$ לכל $x > 0$ בקטע J, בפרט גם J' וגם J.

בנוסף, $\varphi_2'(x) < 0$ לכל $x > 0$, כלומר $\varphi_2(x)$ מונוטונית יורדת.

$$\varphi_2(1.05) = 1.3636 \in J' \quad ; \quad \varphi_2(\sqrt{2}) = 1.098 \in J'$$

כלומר $\varphi_2(x) \in J'$ עבור $x \in J'$

$\Leftarrow$ משפט ההתכנסות מתקיים, כי מתקיים לגבי $\varphi_2(x)$ ב- J'!

בנוסף, $\varphi_2(1) = \sqrt{2} \in J'$, $\varphi_2(1.05) \in J'$! φ_2 מונוטונית יורדת לכן

עבור כל $x \in [1, 1.05]$ מתקיים $\varphi_2(x) \in J'$

המשך שאלה 4 - (ii)

כלומר, הראינו שלכל $x \in J'$ יש התכנסות

וגם $\varphi_2(x) \in J'$ עבור $x \in [1, 1.05]$

ולכן עבור כל $x \in J$ מתקיים $\varphi(x) \in J'$ ולכן תנאי ההתכנסות !!

$\Leftarrow$ הסדרה

$x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$ מתכנסת לכל $x \in J$,

$$\varphi_2'(\alpha) = -\frac{\alpha+2}{2\alpha^2\sqrt{\alpha+1}} = -\frac{\alpha+2}{2\alpha^2 \cdot \alpha^2} = -\frac{\alpha+2}{2\alpha^4}$$

לכן $\varphi_2'(\alpha) \neq 0$ (כי $\alpha \neq -2$)

$\Leftarrow$ סדר ההתכנסות הוא 1.

גם כאן ניתן להאיץ את ההתכנסות ע"י הפעלת Aitken כמו ב-(i).

(המשך בדף הבא)

המשך שא' 4

(iii) $\varphi_3(x) = \sqrt{x^2-x+1}$

5/5

נראה שעבור $x=1$ נקודת שבת קבועה:

$$\varphi_3(1) = \sqrt{1-1+1} = \sqrt{1} = 1$$

$$f(1) = 1-1-1 = -1 \neq 0$$

$x=1$ אינו השורש!

ולכן אין התכנסות עבור כל $x \in J$.

(iv)
$$\varphi_4(x) = x - \frac{x^4-x-1}{4x^3-1} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

5/5

(זו מסוג שיטת NR)

$$\varphi_4(x) = \frac{4x^4 - \cancel{x} - x^4 + \cancel{x} + 1}{4x^3-1} = \frac{3x^4+1}{4x^3-1}$$

$$\varphi_4'(x) = \frac{12x^3(4x^3-1)-(3x^4+1)\cdot 12x^2}{(4x^3-1)^2} = \frac{48x^6-12x^3-36x^6-12x^2}{(4x^3-1)^2} =$$

$$= \frac{12x^6-12x^3-12x^2}{(4x^3-1)^2} = 12\cdot\frac{x^6-x^3-x^2}{(4x^3-1)^2} = 12x^2\frac{x^4-x-1}{(4x^3-1)^2}$$ $= f(x)$

$J' = [1.05, 1.4]$ $\qquad \varphi_4(1.05) = 1.28 \in J'$, $\varphi_4(1.4) = 1.25 \in J'$

$\varphi_4'(x) < 0$ עבור $x<\alpha$, $x \in J$ $\varphi_4(x)$ מונוטונית יורדת ב- $\alpha>x$, $x\in J$

$\varphi_4'(x) > 0$ עבור $x>\alpha$, $x \in J$ $\varphi_4(x)$ מונוטונית עולה ב- $\alpha<x$, $x\in J$

$\varphi_4(1) = 1.33 \in J'$; $\varphi_4(1.05) \cong 1.28 \in J'$

ולכן לכל $x \in [1, 1.05]$ מתקיים $\varphi_4(x) \in J'$

לכן אם נראה שבתחום J' מתקיים $|\varphi_4'(x)|<1$ אז בתחום J' יש התכנסות, ולפי

משפט התכנסות-נוסח ראשון, ומאחר ולכל $x \in [1, 1.03]$ מתקיים $\varphi_4(x) \in J$ אז תהיה

התכנסות לכל $x \in J$.

לכן, נראה ש $|\varphi_4'(x)|<1$ לכל $x \in J'$:

✓

$$\varphi_4''(x) = \dots = 12 \cdot \frac{x(6x^4+3x+16x^3+2)}{(4x^3-1)^3}$$

לכן בפרט $x \in J'$ (בתחום זה $0<x$) מתקיים $\underline{\underline{\varphi_4''(x)>0}}$

ולכן $\varphi_4'(x)$ מונוטונית עולה.

$$|\varphi_4'(1.05)| \le 0.9 < 1 \quad , \quad |\varphi_4'(1.4)| \le 0.35 < 1$$

$\Rightarrow$ בתחום J' מתקיים $|\varphi_4'(x)|<1$ ולכן ב- J' יש התכנסות.

ולפי המסקנה הקודמת, $\forall x \in J$ יש התכנסות.

סדר ההתכנסות הוא לפחות $\underline{\underline{2}}$ (גם מציין שזו אלגו' NR

וגם מציין שבנקודה: כי $\varphi_4'(x)$ מוגדר $f'(x)$ שונה מאפס ולכן $\varphi_4'(\alpha)=0$)

ולכן לא ניתן להאיץ את ההתכנסות.

29/30

יפה! אבל היית צריכים להפעיל לפני Steffenson כמה פעמים חצ"ה ואז להמשיך לפתרון (כמו בתרגיל כיתה 4)

אנליזה נומרית שאלה 5

א.

פונקציה המבצעת את שיטת :NR

NR.m

```
function [ xn ] = NR(f,x,x0,dig,N )
%Newton-Raphson  method for evaluating roots of functions
%f is the function, x is the symbolic variable in f, x0 is the starting
%point, dig is the no of digits of ccuracy, N is the number of iterations

phi=x-f/diff(f);
xn(1)=vpa(subs(phi,x,x0),dig);
for i=2:N
   xn(i)=vpa(subs(phi,x,xn(i-1)),dig);
end
xn=[x0,xn];
```

פונקציה המבצעת את שיטת החצייה:

bisection.m

```
function [ xn ] = bisection(f,x,a,b,dig,N )
%Bisection  method for evaluating roots of functions
%f is the function, x is the symbolic variable in f, [a,b] is the starting
%interval, dig is the no of digits of ccuracy, N is the number of iterations

ai=a;
bi=b;
syms fai
syms fbi;
fai=vpa(subs(f,x,ai),dig);
fbi=vpa(subs(f,x,bi),dig);
for i=1:N
   xn(i)=vpa((ai+bi)/2,dig);
   if (double(vpa(subs(f,x,xn(i))*fai,dig))<0)
      bi=xn(i);
      fbi=vpa(subs(f,x,bi),dig);
   elseif (double(vpa(subs(f,x,xn(i))*fbi,dig)<0)
      ai=xn(i);
      fai=vpa(subs(f,x,ai),dig);
   else
      break;      % we found the root
   end
end
```

פונקציה המבצעת את secant:

secant.m

```
function [ xn ] =secant(f,x,x0,x1,dig,N )
%Secant  method for evaluating roots of functions
%f is the function, x is the symbolic variable in f, x0,x1 are the starting
%points, dig is the no of digits of ccuracy, N is the number of iterations



syms xn;
xn(1)=x0;
xn(2)=x1;
for i=3:(N+2)
   xn(i)=vpa((xn(i-2)*subs(f,x,xn(i-1))-xn(i-1)*subs(f,x,xn(i-2)))/(subs(f,x,xn(i-1))-subs(f,x,xn(i-2))),dig);
   if isnan(double(xn(i)))
      break;
   end
end
```

פונקציה המבצעת את steffensen:

steffensen.m

```
function [ xn ] = steffensen(f,x,x0,dig,N )
%Steffensen  method for evaluating roots of functions
%f is the function, x is the symbolic variable in f, x0 is the starting
%point, dig is the no of digits of ccuracy, N is the number of
iterations

phi=x-(f^2)/(subs(f,x,x+f)-f);
xn(1)=double(vpa(subs(phi,x,x0),dig));
for i=2:N
   xn(i)=double(vpa(subs(phi,x,xn(i-1)),dig));
end
xn=[x0,xn];
```

ג. עבור NR:

n	x_n	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$	ε_n	$\varepsilon_n / \varepsilon_{n-1}$	$\varepsilon_n / \varepsilon^2_{n-1}$	$\ln\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}\right)$
0	0.1		-0.75456			
1	.366755454225128230127950246242		-0.4878	0.64647	-0.85676	2.099 + 7.2018i
2	1.04980840672747716965643371791	2.5606	0.19525	-0.40027	0.82056	0.10403 - 0.35693i
3	.912397608319737041106622453053	-0.20117	0.057841	0.29624	1.5172	1.819
4	.860883006721134029555943360945	0.37489	0.0063265	0.10938	1.891	1.9612
5	.854639009295352439771380282690	0.12121	8.2466e-005	0.013035	2.0604	1.9976
6	.854556557121578573983707056858	0.013205	1.4158e-008	0.00017169	2.0819	2
7	.854556542963251018645361817273	0.00017172	4.1739e-016	2.948e-008	2.0822	
8	.854556542963250601255439636831	2.948e-008	0	0	0	
9	.854556542963250601255439636831	0	0			
10	.854556542963250601255439636831		0			

עבור secant:

n	x_n	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$	ε_n	$\varepsilon_n / \varepsilon_{n-1}$	$\varepsilon_n / \varepsilon^2_{n-1}$	$\ln\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}\right)$
0	0.1		0.75456			
1	2		1.1454	1.518	2.0118	-1.2296
2	.168965340808469822526825117291	-0.9637	0.68559	0.59854	0.52254	0.16048
3	.223173625112918623594294446580	-0.0296	0.63138	0.92093	1.3433	12.872
4	.635874652673085213267125772055	7.6132	0.21868	0.34635	0.54856	0.21515
5	1.02863390101308212623078423985	0.9517	0.17408	0.79603	3.6401	3.6159
6	.778258453736386495790141188380	-0.6375	0.076298	0.4383	2.5178	1.3615
7	.829736845821221876566064261073	-0.2056	0.02482	0.3253	4.2635	1.566
8	.858832403300553355298372847450	0.5652	0.0042759	0.17228	6.9411	1.6752
9	.854331875603620010430877797495	-0.1547	0.00022467	0.052543	12.288	1.6037
10	.854554549458830186426769409561	-0.0495	1.9935e-006	0.0088731	39.495	1.6228
11	.854556543895982573030406684721	0.0090	9.3273e-010	0.00046789	234.71	1.6162
12	.854556542963246729634618807901	-0.0005	3.8716e-015	4.1508e-006	4450.2	1.6187
13	.854556542963250601255432117699	-4.1508e-006	7.5191e-024	1.9421e-009	5.0163e+005	
14	.854556542963250601255439636831	1.9421e-009	0	0		
15	.854556542963250601255439636831	0	0			
16						
17						

עבור שיטת החצייה:

N	x_n	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$	ε_n	$\varepsilon_n / \varepsilon_{n-1}$	$\varepsilon_n / \varepsilon^2_{n-1}$	$\ln\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}\right)$
0	1.0500000000000000000000000000		0.19544			
1	.5750000000000000000000000000		0.27956	1.4304	7.3186	-5.292
2	.8125000000000000000000000000	-0.5	0.042057	0.15044	0.53814	-0.31718
3	.9312500000000000000000000000	0.5	0.076693	1.8236	43.36	-2.4768
4	.8718750000000000000000000000	-0.5	0.076693	0.22581	2.9444	0.22619
5	.8421875000000000000000000000	0.5	0.012369	0.71421	41.24	4.7807
6	.8570312500000000000000000000	-0.5	0.0024747	0.20007	16.175	-0.43049
7	.8496093750000000000000000000	-0.5	0.0049472	1.9991	807.81	-2.002
8	.8533203125000000000000000000	-0.5	0.0012362	0.24989	50.511	0.49853
9	.8551757812500000000000000000	0.5	0.00061924	0.50091	405.19	1.0079
10	.8542480468750000000000000000	-0.5	0.0003085	0.49818	804.51	0.98435
11	.8547119140625000000000000000	-0.5	0.00015537	0.50365	1632.6	1.0318
12	.8544799804687500000000000000	-0.5	7.6562e-005	0.49276	3171.5	0.93849
13	.8545959472656250000000000000	-0.5	3.9405e-005	0.51469	6722.5	1.1321
14	.8545379638671875000000000000	-0.5	1.8578e-005	0.47146	11964	0.76986
15	.8545669555664062500000000000	-0.5	1.0414e-005	0.56053	30171	1.6177
16	.8545524597167968750000000000	-0.5	4.0823e-006	0.39201	37644	0.27155
17	.8545597076416015625000000000	-0.5	4.0823e-006	0.77547	1.8996e+005	7.5999
18	.8545560836791992187500000000	-0.5	4.583e-007	0.14477	45733	-0.56041
19	.8545578956604003906250000000	-0.5	1.3537e-006	2.9537	6.4448e+006	-1.0216
20	.8545569896697998046875000000	-0.5	4.4769e-007	0.33072	2.4431e+005	4.008
21	.8545565366744995117187500000	0.5	5.3085e-009	0.011858	26487	-0.84101
22	.8545567631721496582031250000	-0.5	2.2119e-007	41.667	7.849e+009	-0.19236
23	.8545566499233245849609375000	-0.5	1.0794e-007	0.488	2.2063e+006	1.0364
24	.8545565932989120483398437500	0.5	5.1316e-008	0.47541	4.4044e+006	1.079
25	.8545565649867057800292968750	0.5	2.3004e-008	0.44828	8.7356e+006	1.1909
26	.8545565508306026458740234375	0.5	8.8476e-009	0.38462	1.672e+007	1.6844
27	.8545565437525510787963867188	0.5	1.7695e-009	0.2	2.2605e+007	-3.5113e-022
28	.8545565402135252952575683594	0.5	1.7695e-009	1	5.6513e+008	
29	.8545565419830381870269775391	-0.5	0	0	0	

ד.ה.

ע"פ הטבלאות קל לראות ששיטות NR, secant ושיטת החצייה מתכנסות.

שיטת steffensen לא התכנסה. קיבלנו סדרה של מספרים קומפלקסים (כתוצאה מחישוב log של מספר שלילי).

- סדר ההתכנסות של NR הוא 2 – זאת ניתן לראות ע"פ העמודה הימנית ביותר, וגם ע"פ העמודה של $\varepsilon_n / \varepsilon^2_{n-1}$ (רואים התכנסות).
  קבוע ההתכנסות הוא 2.08~.
- סדר ההתכנסות של secant הוא 1.61~, כפי שניתן לראות מהעמודה האחרונה.
  כדי להעריך את קבוע ההתכנסות נחשב את $\varepsilon_n / \varepsilon^{1.61}_{n-1}$, ונקבל 1.56~.
- סדר ההתכנסות של שיטת החצייה בערך 1, וקבוע ההתכנסות כ 0.4.

כפי שראינו, השיטה הטובה ביותר היא שיטת NR, בה ההתכנסות הייתה הכי מהירה.

הערה: בשיטת steffensen היה ניתן להגיע לשורש אחר – קומפלקסי, שאמור להתקרב
לשורש α, לפי הגרף steffensen – לא נכון [illegible] log [illegible]
אולם בתרגיל התבקשו להגיע steffensen עם $x_0 = 0.1$.

לחישוב ערכי הטבלאות השתמשנו בפונקציה produceerr:

Produceerr.m

```
function [ c1,c2,c3,c4,c5 ] = produceerr(xn)
%this function produces the values for the table in part c of question 5
%this function is used in the file q5
% c1 is (xn-xn-1)/(xn-1-xn-2)
% c2 is xn-alpha, where alpha is the last iteration value
% c3 is epsn/epsn-1
% c4 is epsn/(epsn-1)^2
% c5 is ln(epsn/epsn+1)/ln(epsn-1/epsn)

xn=xn(find(~isnan(double(xn))));
alpha=xn(end);

for i=3:length(xn);
   c1(i)=(xn(i)-xn(i-1))/(xn(i-1)-xn(i-2));
end
c1=c1(3:end);

c2=abs(xn-alpha);        %epsn

c3=c2(2:end)./c2(1:end-1);

c4=c2(2:end)./c2(1:end-1).^2;

for i=2:(length(c2)-1);
   c5(i)=log(c2(i)/c2(i+1))/log(c2(i-1)/c2(i));
end
c5=c5(2:end);
```

כאשר הרצנו אותו כל פעם עבור שיטה אחרת:

```
clear;
clc;
a=0.1;
b=2;
x0=0.1;
dig=30;
N=30;
syms x;
f=log(x)-sin(x)+2*x^5;
%xnbis=bisection(f,x,a,b,dig,N);
 xnNR=NR(f,x,x0,dig,N);
% xnsec=secant(f,x,a,b,dig,N);
% xnsteff=steffensen(f,x,x0,dig,N);

[c1,c2,c3,c4,c5]=produceerr(xnNR);
```