100

שאלה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

א

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1-a^2} = \frac{1}{1-a^2}$$ לפי קרמר

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix}}{1-a^2} = -\frac{a}{1-a^2}$$

ב

$$f(a) = x+y \; ; \; x = \frac{1}{1-a^2} \; ; \; y = -\frac{a}{1-a^2}$$

$$x = \frac{1}{1-a^2} = \frac{1}{1-a \cdot a}$$

$$fl(x) = \frac{(1+\varepsilon_3)\,1}{(1+\varepsilon_2)(1-(1+\varepsilon_1)a^2)} = \frac{(1+\varepsilon_3)}{(1+\varepsilon_2)}\frac{1}{1-a^2-\varepsilon_1 a^2}$$

$$|fl(x)-x| = \left| \frac{(1+\varepsilon_3)}{(1+\varepsilon_2)}\frac{1}{(1-a^2-\varepsilon_1 a^2)} - \frac{1}{1-a^2} \right| =$$

$$= \left|\frac{1}{1-a^2}\right| \left| \frac{(1+\varepsilon_3)(1-a^2)}{(1+\varepsilon_2)(1-a^2-\varepsilon_1 a^2)} - 1 \right| =$$

$$\overset{\sim}{=} \left|\frac{1}{1-a^2}\right| \left| \frac{\cancel{1}+\varepsilon_3-\cancel{a^2}-\varepsilon_3 a^2-\cancel{1}+\cancel{a^2}+\varepsilon_1 a^2-\varepsilon_2+\varepsilon_2 a^2}{1-a^2-\varepsilon_1 a^2+\varepsilon_2-\varepsilon_2 a^2} \right| =$$

$$= \left|\frac{1}{1-a^2}\right| \left| \frac{\varepsilon_3-\varepsilon_2-a^2(\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(1-a^2)+\varepsilon_2(1-a^2)-\varepsilon_1 a^2} \right| \leq \left|\frac{1}{1-a^2}\right| \cdot |2+3a^2| u \cdot \frac{1}{|1-a^2|\left|1+\varepsilon_2-\varepsilon_1\frac{a^2}{1-a^2}\right|}$$

$$= |x| \cdot u \cdot |2+3a^2| \cdot \frac{1}{|1-a^2|} \cdot \frac{1}{\left|1+\varepsilon_2-\varepsilon_1\frac{a^2}{1-a^2}\right|} \leq$$

$$a \simeq 1 \rightarrow \leq u \cdot |x| \cdot \frac{|2+3a^2|}{|1-a^2|}$$

(יפה)...

קיבלנו

$$|\Delta x| \le u \cdot |x| \cdot \left|\frac{2+3a^2}{1-a^2}\right|$$

$$y = -a \cdot x$$

$\Leftarrow$ באופן דומה,

$$|\Delta y| \le u \cdot |y| \cdot \left|\frac{2+3a^2}{1-a^2}\right|$$

כעת,

$$f = x + y$$

$$|\Delta f| = |\Delta f_{in}| + |\Delta f_{al}|$$

– כאשר Δf_{in} נוצר משגיאות ב־ x ו־ y (מקבלים $fl(x)$ במקום x ו־ $fl(y)$ במקום y). אלו שגיאות שנובעות משגיאות אלגוריתם וחישוב הכפל (נחשב כאן שגיאות הקלט).

– Δf_{al} – בגלל הפעולה כתוצאה מהחיבור.

$$|\Delta f| = |\Delta x| + |\Delta y| + |f \cdot u| =$$

$$\le u \left|\frac{2+3a^2}{1-a^2}\right| (|x|+|y|) + u \cdot |x+y|$$

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right| = u \cdot \left|\frac{2+3a^2}{1-a^2}\right| \cdot \frac{|x|+|y|}{|x+y|} + u = u \left|1 + \left|\frac{2+3a^2}{1-a^2}\right| \frac{|x|+|y|}{|x+y|}\right|$$

מכיוון כך קל לראות שכאשר $\underline{a \approx 1}$ שגיאת האלגוריתם גדלה מאוד, מאוד גבוהה!

(מכיוון התוצאה מגיע $\frac{1}{1-a^2}$)

ג.

נמצא כיוון לא יציב לחשוב f:

$$f = x + y = \frac{1}{1-a^2} - \frac{a}{1-a^2} = \frac{1}{1+a}$$

נחשב את f ע"י חישוב הביטוי $\frac{1}{1+a}$ ולא ע"י כמות x, y וסכום (כמו קודם)

נמצא את השגיאה:

המשך שאלה 1

$$f = \frac{1}{1+a}$$

$$fl(f) = (1+\varepsilon_2)\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+a)}$$

$$|fl(f)-f| = \left|\frac{(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)(1+a)} - \frac{1}{1+a}\right| = \left|\frac{1}{1+a}\right|\left|\frac{(1+\varepsilon_2)(1+\cancel{a})}{(1+\varepsilon_1)(1+\cancel{a})} - 1\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{1+a}\right|\left|\frac{\cancel{1}+\varepsilon_2-\cancel{1}-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\right| = \left|\frac{1}{1+a}\right|\left|\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{1+a}\right|\,|\varepsilon_2-\varepsilon_1|\left|\frac{1}{1+\varepsilon_1}\right| \underset{!}{\approx} \left|\frac{1}{1+a}\right||\varepsilon_2-\varepsilon_1|\cdot|1-\varepsilon_1| \le$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$$

$$\le |f|\cdot|2u|(|1|+|u|) \approx |f|\cdot|2u|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta f}{f}\right| \lessapprox 2u$$

⇐ השגיאה היחסית אינה תלויה בערך a!

$$C_p = \left|\frac{\Delta f/f}{\Delta a/a}\right| \approx \left|\frac{f'(a)}{f(a)}\cdot a\right| = \left|\frac{1}{(1+a)^2}(1+a)\cdot a\right| = \left|\frac{a}{1+a}\right|$$

לכן עבור $a\approx -1$ תהיה בעיה בחישוב $f = \frac{1}{1+a}$.

שאלה 2

$$f = \sum_{i=0}^{n} x_i = (\cdots((((x_0+x_1)+x_2)+x_3)+x_4)\cdots+x_n)$$

$$fl(f) = (\quad(((x_0+x_1)(1+\varepsilon_0)+x_2)(1+\varepsilon_1)+x_3)(1+\varepsilon_2)+\cdots)(1+\varepsilon_{n-1})$$

$$= (x_0+x_1)(1+\varepsilon_0)(1+\varepsilon_1)\cdots(1+\varepsilon_{n-1}) +$$

$$+ (x_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\cdots(1+\varepsilon_{n-1}) +$$

$$+$$

$$+ x_n(1+\varepsilon_{n-1}) \le (x_0+x_1)(1+u)^n + x_2(1+u)^n + \dots + x_n(1+u)^n$$

$$= (1+u)^n\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = (*)$$

$$\circledast = (1+u)^n \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)$$

$$|fl(s)-f| \leq \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\left((1+u)^n - 1\right)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{fl(s)-f}{f}\right| \leq (1+u)^n - 1 \simeq 1+nu-1 = \underline{nu}$$

שאלה 3

$$Z_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+A}\,dx \quad, n=0,1,\dots \quad ; \underline{A>0}$$

א.

צ"ל:

$$Z_n = -AZ_{n-1} + \frac{1}{n} \quad, n=1,2,\dots$$

הוכחה:

$$Z_n + AZ_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + Ax^{n-1}}{x+A}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+A)}{x+A}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \left.\frac{x^n}{n}\right|_0^1 = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_n = -AZ_{n-1} + \frac{1}{n}} \quad, n=\dots$$

ב.

$$Z_n = -AZ_{n-1} + \frac{1}{n}$$

4 ספרות בדיוק מלא: Z_0

$$|\Delta Z_n| \leq \left|\frac{\partial Z_n}{\partial Z_{n-1}} \cdot \Delta Z_{n-1}\right| = |A \cdot \Delta Z_{n-1}|$$

$$|\Delta Z_1| \leq |A\Delta Z_0| \quad, \quad \Delta Z_0 = 0.5\cdot 10^{-4}$$

$$|\Delta Z_2| \leq |A\Delta Z_1| = |A^2 \Delta Z_0|$$

$$\Rightarrow \Delta Z_n = |A^n \Delta Z_0| = |A^n| \cdot 0.5\cdot 10^{-4}$$

הנוסחה יציבה נומרית עבור ערכי A הקטנים מ- 1 בערך מוחלט

$$\underline{|A| < 1}$$

ואז השגיאה שואפת לאפס כאשר $n\to\infty$.

אם $|A| = 1$ השגיאה קבועה ואם $A>1$ השגיאה גדלה ושואפת ל- ∞ כאשר $n\to\infty$.

המשך שאלה 3

ב)

$$|\Delta z_0| = 0.5\cdot 10^{-4}$$

$$|\Delta z_n| = A^n \cdot 0.5\cdot 10^{-4} \quad , n=0,1,\ldots$$

קל לראות, ש- $z_n > 0$ לכל n וכן $z_{n+1} < z_n$ לכל $n=0,1,\ldots$
כלומר ה- z_n הם סדרה מונוטונית יורדת של מספרים חיוביים.

$$\Delta z_n = A^n \Delta z_0 = 10^n \cdot 0.5\cdot 10^{-4} = 0.5\cdot 10^{n-4}$$

$$z_0 = \ln(x+A)\Big|_0^1 = \ln(11) - \ln(10) = \ln(11/10) \cong 0.09531018$$

(נמצא n המקיים:

$$z_n - \Delta z_n < 0$$

$$z_n < \Delta z_n = 0.5\cdot 10^{n-4}$$

ידוע ש- $z_n < z_0$ לכן נדרוש;

$$z_0 < 0.5\cdot 10^{n-4}$$

$$\ln(11/10) < 0.5\cdot 10^{n-4}$$

$$10^{n-4} > 2\ln(11/10) \qquad n \approx 4$$

(ע"י בדיקה ב- maple, עבור n=6 התקבל ערך שונה מאפס.)

ג)

$$z_n = -10 z_{n-1} + \frac{1}{n} \Rightarrow z_{n-1} = \left(\frac{1}{n} - z_n\right)\frac{1}{10}$$

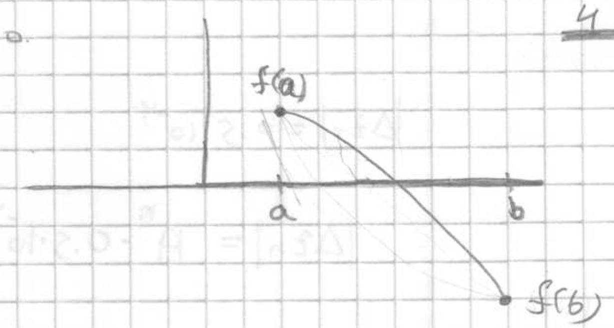
$$z_{n-1} = \frac{1}{10n} - \frac{z_n}{10}$$

$$|\Delta z_{n-1}| = \left|\frac{1}{10}\Delta z_n\right|$$

זו רקורסיה אחורית. כאן השגיאה מחולקת ב- 10 (=A) בכל איטרציה.
כל מה שנותר, הוא לזכור ש z_n מהווים סדרה מונוטונית יורדת של איברים חיוביים. הסדרה שואפת לאפס. לכן ניתן להתחיל מ- $N=n$ מספיק גבוה ($N=19$)
ולהניח $z_N=0$ ולחשב ברקורסיה אחורית.

שאלה 4

$f(a)>0 \quad f(b)<0 \quad f''(x)<0$



א. נמצא את הישר העובר דרך $(a,f(a))$, $(b,f(b))$:

שיפוע: $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

$$y-f(a)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)$$

נמצא את $y=0$ (נק' של x_0)

$$0-f(a)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x_0-a)$$

$$-(a-b)f(a)=(f(a)-f(b))(x_0-a)$$

$$x_0=\frac{a\cdot(f(a)-f(b))-(a-b)f(a)}{(f(a)-f(b))}=$$

$$=\frac{\cancel{a\cdot f(a)}-a\cdot f(b)-\cancel{a\cdot f(a)}+b\cdot f(a)}{f(a)-f(b)}=$$

$$=\boxed{x_0=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}}$$

$f(x_0)>0$ כדי שיתקיים:

אם נתון ש- $f''(x)<0$ - הפונק' $f(x)$ קעורה מעל $[a,b]$

$$\Rightarrow \alpha f(b)+(1-\alpha)f(a)\le f(\alpha b+(1-\alpha)a) \qquad \alpha\in[0,1]$$

נסמן: $g(\alpha)=\alpha f(b)+(1-\alpha)f(a)$. $x_0\in[a,b]$. נבחר α_0 כך ש $x_0=\alpha_0 b+(1-\alpha_0)a$

ואז נקבל $\underline{0\le f(x_0)}$ $\qquad \left(\alpha_0=\dfrac{x_0-a}{b-a}\right)$

<u>המשך שאלה 4</u>

$$x_0 = \frac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}$$ מצוין

נמצא את x_1: x_1 הוא הנ' בה מתאפס הישר שעובר דרך

הנקודות $(x_0,f(x_0))$ ו $(b,f(b))$ (מאחר ו $0 \le f(x_0)$).

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b)-f(x_0)}$$

גם הנ' x_1 מקיים ש- $f(x_1) \ge 0$ - אז אותה הוכחה כהוכחת עבור x_0.

$$\Rightarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(b) - b f(x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})}$$

$$\boxed{x_{i+1} = \phi(x_i) \quad ; \quad \phi(x) = \frac{x f(b) - b f(x)}{f(b)-f(x)}}$$

<u>מס</u> נבדוק לפי משפט סדר ההתכנסות: נגזור את $\phi(x)$:

$$\phi'(x) = \frac{\left(f(b) - b f'(x)\right)\left(f(b)-f(x)\right) + \left(x f(b) - b f(x)\right)\cdot f'(x)}{\left(f(b)-f(x)\right)^2}$$

$$\phi'(\alpha) = \frac{\left(f(b) - b f'(\alpha)\right) f(b) + \alpha f(b) f'(\alpha)}{f(b)^2} =$$

$$= \frac{f(b)^2 - b \cancel{f(b)} f'(\alpha) + \alpha \cancel{f(b)} f'(\alpha)}{f(b)^{\cancel{2}}} = \frac{f(b) - b f'(\alpha) + \alpha f'(\alpha)}{f(b)} =$$

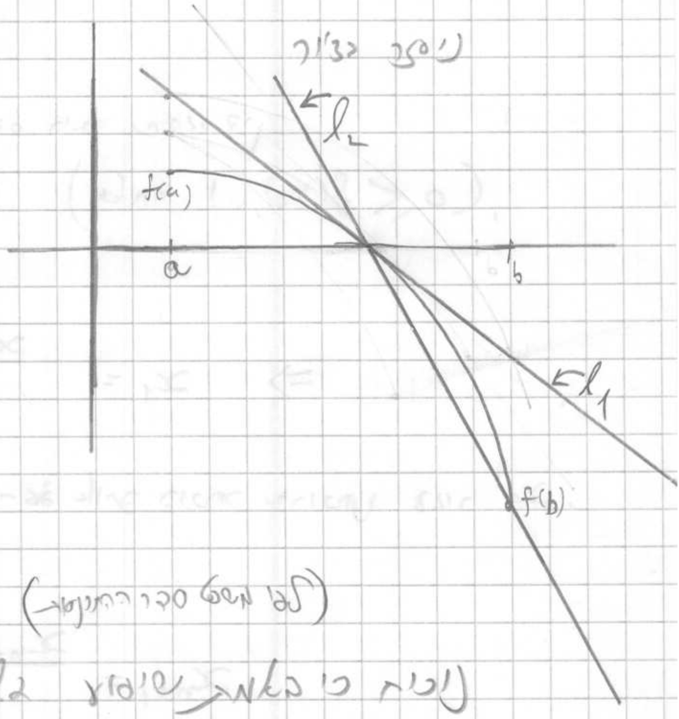
$$= 1 - \frac{f'(\alpha)(\alpha - b)}{f(b)} = 1 + \frac{f'(\alpha)}{\frac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha - b}}$$

המשך בדף הבא

קיבלנו,

$$\phi'(\alpha) = 1 + \frac{f'(\alpha)}{\frac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha-b}}$$

ניעזר בציור



l_1 – הישר המשיק ל-f בנק' α (שיפוע $f'(\alpha)$)

l_2 – הקו המחבר את הנק' $(\alpha, 0)$, $(b, f(b))$

ברור מהציור ש-שיפוע l_2 גדול משיפוע l_1

לכן

$$\left|\frac{f'(\alpha)}{\frac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha-b}}\right| < 1$$

(לפי משפט סדר התכנסות) $\Leftarrow$ $\phi'(\alpha) \neq 0$ $\Rightarrow$ סדר ההתכנסות 1.

נוכיח כי באמת שיפוע $l2$ גדול (בערך מוחלט) משיפוע $l1$.

לפי משפט ערך הממוצע קיימת נק' $b > c > \alpha$ כך ש $f'(c) = \frac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha-b}$

כעת נבחין ש- $f''(x) < 0$ - לפי הנתון, כלומר הנגזרת $f'(x)$ היא פונק' יורדת ולכן $f'(c) < f'(\alpha)$ כי $c > \alpha$ $(\alpha < c < b)$.

⊛ ברור ש- $f'(\alpha) < 0$. מאחר ו $f(\alpha) = 0$, $f(a) = 0$ ולכן קיימת נק' $a < \eta < \alpha$ כך ש

$$f'(\eta) = \frac{f(a)-0}{a-\alpha} < 0$$

$f(a) > 0$
$a < \alpha$

ומאחר ו $f'(x)$ פונק' יורדת, אז גם $f'(\alpha)$ יורדת, כי $\alpha > \eta$.

כלומר קיבלנו ש $f'(c) < f'(\alpha)$,

$f'(c) < 0$
$f'(\alpha) < 0$

כלומר $|f'(c)| > |f'(\alpha)|$ ולכן

$$\left|\frac{f'(\alpha)}{f'(c)}\right| < 1$$

! $\phi'(\alpha) \neq 0$. ///

כמובן א- קצב ההתכנסות C: סדר ההתכנסות:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right) = C = \frac{\phi'(\alpha)}{1!} = \phi'(\alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)(\alpha-b)}{f(b)}$$ //

5ב

α הוא שורש פשוט מכיוון שאם נניח בשלילה ש $f'(\alpha)=0$

ואנו יודעים גם ש $f(\alpha)=0$, $f(a)>0$

אז נניח ש $f'(x)>0$ לכל $a<x<\alpha$ (כי $f''(x)<0 \Rightarrow f'(x)$ מונוטונית יורדת).

אולם לפי משפט ערך הביניים קיימת $a<c<\alpha$ כך ש

$$f'(c)=\frac{f(a)-f(\alpha)}{a-\alpha}=\frac{f(a)}{a-\alpha}<0$$

$a>\alpha$

$f(a)>0$

זה סותר! (מצד אחד $f'(c)<0$ ומצד שני $f'(c)>0$, $a<c<\alpha$).

$\Rightarrow$ $f'(\alpha)\neq 0$! - α הוא שורש פשוט.

5ג

$t\in[0,1]$ $\quad \overbrace{\sin(t+0.5)-t}^{f(t)}=0$ $\quad f'(t)=\cos(t+0.5)-1$

$\boxed{f''(t)=-\sin(t+0.5)<0 \text{ for } t\in[0,1]}$ 7 איטרציות, 5 ספרות משמעותיות:

$a=0\ ,\ b=1$

$f(t)=\left(t-\sin(t+0.5)\right)(-1)$

$f(a)=f(0)=-\left(0-\sin(0.5)\right)=+\sin(0.5)=+0.47943$

$f(b)=f(1)=-\left(1-\sin(1.5)\right)=-(1-0.99749)=-0.0025050$

$$\phi(t)=\frac{t\cdot(-0.00250)+t-\sin(t+0.5)}{-0.002505+t-\sin(t+0.5)}$$

$$t_0=\frac{-0.47943}{-0.002505-0.47943}=0.99480$$

$t_1=0.99729 \qquad t_2=\underline{0.9973}=t_3=t_4=\ldots=t_7$

$\alpha\cong 0.9973$

(התשובות בעזרת maple)

$\varepsilon_0=0.0025 \qquad eps_1=0.0001 \qquad eps_2=eps_3=\ldots eps_7=0$ בדיוק

מאחר והגעתי רק עד ל- x_3, אין מספיק ערכים לחישוב סדר התכנסות מגודל ההתכנסות.

7

0.11021 $\qquad$ 0.0177

e_1

e_2

שאלה 2

א.

$$x=\cos(x)$$

נסתכל על הפונ' $f(x)=\cos x-x$

$f(0)=1$; $f(\frac{\pi}{2})=-1$

הפונ' f הינה פונ' רציפה, ולכן קיימת $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$ עבורו $f(x_0)=0$

כלומר, $x_0=\cos(x_0)$.

נוכיח כעת שהשורש יחיד.

נסתכל על הנגזרת: $f'(x)=-\sin x-1$

כלומר הנגזרת תמיד שלילית או אפס, $f'(x)=0$ מתקבל עבור:

$\sin x=-1 \Leftarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, כאשר מספר בן מניה k שלם,

⇐ הפונ' היא מונוטונית לא עולה.

נניח בשלילה שקיימים שני שורשים $\alpha_1<\alpha_2$ ל- $f(x)$

כלומר, $f(\alpha_1)=0$, $f(\alpha_2)=0$. אך מאחר ו f מונוטונית לא עולה נובע ש $f(x)=0$ לכל $x\in(\alpha_1,\alpha_2)$.

כלומר לכל $x\in(\alpha_1,\alpha_2)$ מתקיים $f'(x)=0$ (כי הפונ' f מונוטונית לא עולה ; $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=0$, $\alpha_1<\alpha_2$).

יצא סתירה כי הראינו שהנגזרת מתאפסת רק במס' בדידות ובמספר בן מנייה.

⇐ הוכחנו קיום שורש, ויחידות, (נראה שהשורש פשוט):

נסתכל על $x=\cos x$ ונסמן $\varphi(x)=\cos x$

נגזור את $\varphi(x)$: $\varphi'(x)=-\sin x$

$|\varphi'(x)|=|\sin x|$

⇐ הנגזרת שווה ל-אפס עבור $x=\pi k$ נבדוק אם השורש α

יכול להיות אחד מהם אלה: $\pi k=\cos(\pi k)=(-1)^k$

ברור שמשוואה זו לא מתקיימת לכל $k\in\mathbb{Z}$!

⇐ בשורש α, הנגזרת בהכרח לא מתאפסת ⇐ השורש הוא פשוט.

⇐ בסה"כ הוכחנו קיום השורש, יחידות השורש, ושהשורש פשוט.

__מס'__ נוכיח שהאלגוריתם איטרציית נקודת שבת $x_{n+1}=\cos(x_n)$ מתכנס __לכל__ x_0:

נוכיח ראשית שמשפט ההתכנסות בניסוח הראשון מתקיים עבור התחום $J=[-1,1]$:

$$f(x)=\cos x - x$$

$$f(0)=1 \;;\; f(1)\cong -0.46<0$$

$f(x)$ רציפה $\Rightarrow$ בקטע $[-1,1]$ קיים שורש.

$$\varphi(x)=\cos x \;;\; \varphi'(x)=-\sin x \qquad |\varphi'(x)|=|\sin x|$$

הפונ' $|\sin x|$ חסומה ע"י 1 ושווה ל-1 בנק' $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

ולכן בקטע $x\in[-1,1]=J$ מתקיים $|\varphi'(x)|<1$.

בתחום $[0,1]$ הפונ' $|\sin x|$ מונוטונית עולה

$x\in[0,1]$ $\quad |\sin x|=\sin x \Rightarrow (\sin x)'=\cos x>0$

ולכן $|\varphi'(x)|\le|\varphi'(1)|\le 0.85$

$$\Rightarrow |\varphi'(x)|\le 0.85<\underline{1}$$

תנאי ראשון מתקיים.

בנוסף, $\varphi(x)=\cos x$ ומתקיים ש- $\varphi(x)\in J$ כיוון ש $\cos x$ מקבל ערכים רק בתחום $[-1,1]$ $\Rightarrow$ תנאי משפט ההתכנסות מתקיימים

$\Rightarrow$ הסדרה האיטרטיבית $x_{n+1}=\cos(x_n)$ מתכנסת לשורש α לכל $x_0\in J$

(והשורש הוא יחיד).

כעת, אם נתחיל את האלגוריתם מנק' x_0 __כלשהי__ אז $x_1=\cos(x_0)$ למעשה $x_1\in[-1,1]$ $\Rightarrow$ מכאן והלאה המשפט מתקיים ומובטחת התכנסות לשורש α.

__מסקנה:__ עבור כל x_0, האלגוריתם $x_{n+1}=\cos(x_n)$ מתכנס.

המשך שאלה 2

ב' - 1 - מקף המצוין!

א.

פותרים!

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = \cos x - x \qquad f'(x) = -\sin x - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{1+\sin x_n}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1+\sin x_n}$$

ב.

$$J = [0.7, 0.8]$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

קיבלנו אלגוריתם חד-נקודתי:

$$\varphi(x) = x - \frac{x-\cos x}{1+\sin x}$$

נוכיח התכנסות!

$$\varphi(x) = x - \frac{x-\cos x}{1+\sin x} = \frac{x\sin x + \cos x}{1+\sin x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{(1+\sin x)(\sin x + x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{x\cos x + x\sin x\cos x - x\sin x\cos x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{x\cos x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

(נבחר על ידי המורה $J' = [0.6, 0.9]$

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{x\cos x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}\right| \le \frac{|x\cos x| + |\cos^2 x|}{|1+\sin x|^2} \le \frac{0.9\cdot\cos(0.6) + \cos(0.6)^2}{|1+\sin(0.6)|^2} =$$

$$\cong 0.582 \quad \Rightarrow \quad |\varphi'(x)| \le 0.582 < 1$$

⇐ לפי ניסוח ג' של משפט ההתכנסות, הסדרה $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ מתכנסת לשורש

לכל $x_0 \in J'$ ולכן גם לכל $x \in J$ מאחר ו- $J \subseteq J'$. ∎

c.) מאחר והשורש פשוט, והוכחנו שהפונקציה מתכנסת, אז סדר ההתכנסות הוא <u>לפחות 2</u>.

$$\varphi'(x) = \frac{x\cos x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} \Rightarrow \varphi'(\alpha) \overset{\alpha=\cos\alpha}{=} \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2} = 0$$

מקומית, כך נקבל: $\varphi''(x) = \frac{\cos x - x\sin x + 2\cos x\sin x}{(1+\sin x)^2} \; ; \; \varphi''(\alpha) = \frac{\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha}{(1+\sin(\alpha))^2} =$

$$= \frac{\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^2} = \frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)^2}$$

אין נקודה ש $\cos\alpha \neq 0$ (מאחר ולא מתקיים המשוואה $\alpha = \cos\alpha = 0$ כי $\cos(0)=1$)

$\Leftarrow$ $\varphi''(\alpha)=0$ אם $\sin\alpha + 1 = 0$ $\Leftarrow$ $\sin\alpha = -1$ וזה גם לא יתכן

כי אז $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ וגם אלה המשוואות $x=\cos x$ הופכת ל: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k = 0$ – וזה לא מתקיים לכל k)

$\Leftarrow$ סדר ההתכנסות המדויק הוא $p = \underline{\underline{2}}$

נבדוק אמפירית:

$x_0 = 1 \qquad x_1 = 0.75036 \qquad x_2 = 0.73911$

$x_3 = 0.7390851 \quad x_4 = 0.739085133\ldots$

$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}^2}: \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2} = 0.16568 \; ; \quad \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2^2} = 0.2182 \quad \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3^2} = 0.2208$

$\Leftarrow$ קבוע ההתכנסות $C \sim 0.2$ //

1) נחשב את נוסחת האיטרציה בשיטת <u>Steffensen</u>:

$$f(x) = \cos x - x = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} =$$

$$= x_n - \frac{\cos^2 x_n - 2x_n\cos x_n + x_n^2}{\cos(\cancel{x_n} + \cos x_n - \cancel{x_n}) - (\cancel{x_n} + \cos x_n - \cancel{x_n}) - (\cos x_n - x_n)}$$

$$= x_n - \frac{\cos^2 x_n - 2x_n\cos x_n + x_n^2}{\cos(\cos x_n) - 2\cos x_n + x_n} =$$

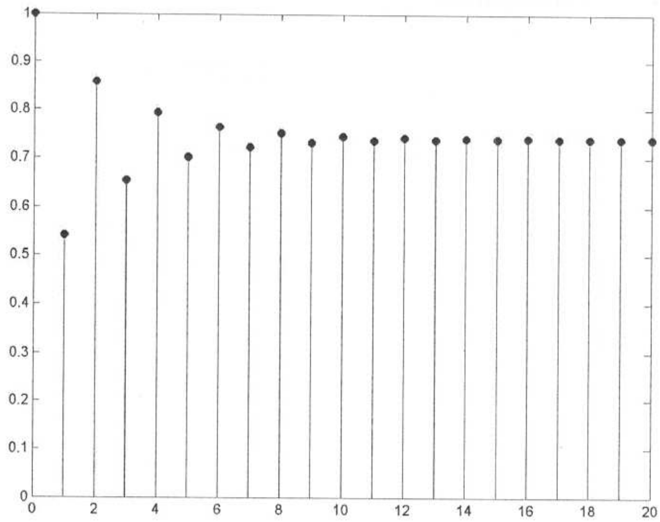
$$= \frac{x_n\cos(\cos x_n) - \cancel{2x_n\cos x_n} + \cancel{x_n^2} - \cos^2 x_n + \cancel{2x_n\cos x_n} - \cancel{x_n^2}}{\cos(\cos x_n) - 2\cos x_n + x_n} =$$

$$= \frac{x_n\cos(\cos x_n) - \cos^2 x_n}{\cos(\cos x_n) - 2\cos x_n + x_n} \;//$$

סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות מוצגים בדפים המצורפים.

אנליזה נומרית ש"ב 3 – שאלה 5

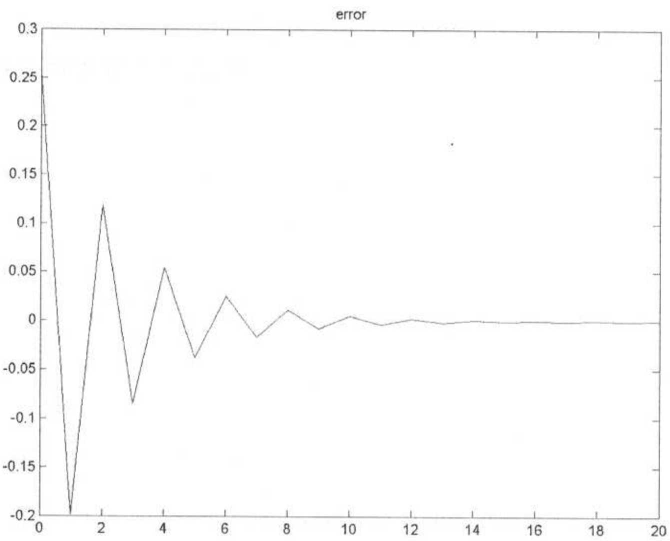
ג. גרף של Xn כתלות ב n:



הווקטור:

X=[1 0.5403 0.85755 0.65429 0.79348 0.70137 0.76396 0.7221 0.75042 0.7314 0.74424 0.7356 0.74143 0.73751 0.74015 0.73837 0.73957 0.73876 0.7393 0.73894 0.73918]

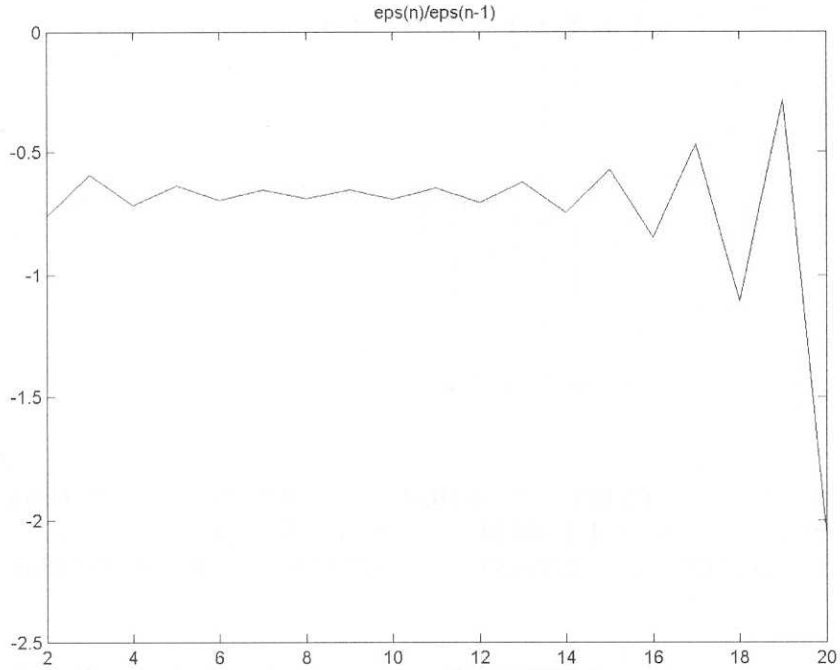
ד. גרף של השגיאה כתלות ב n (השורש נלקח כערך האיטרציה האחרונה):



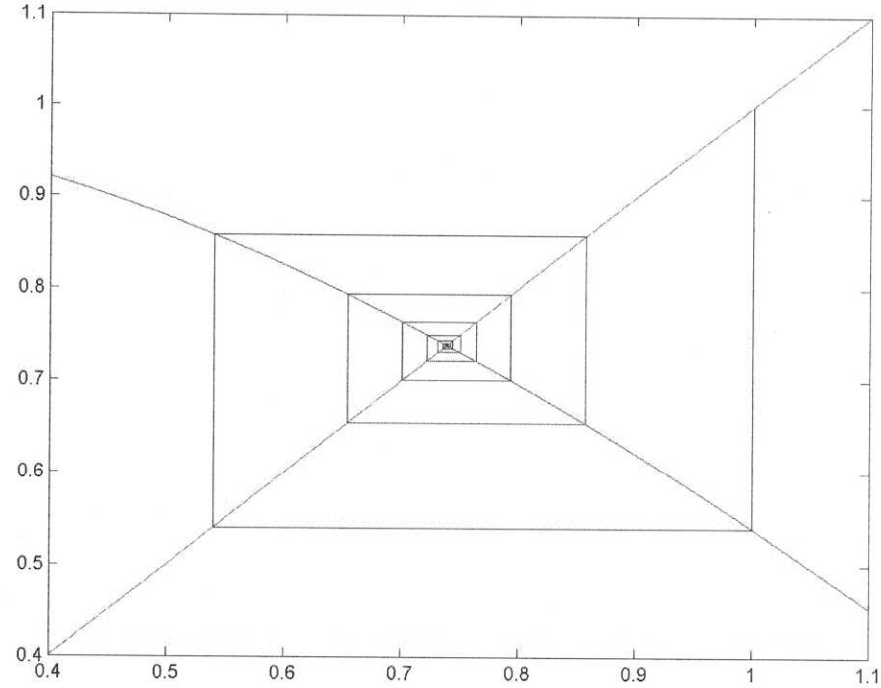
וקטור השגיאה עצמו:

err=90.26082 -0.19888 0.11837 -0.084895 0.054296 -0.037816
0.024775 -0.017082 0.011233 -0.0077804 0.005053 -
0.0035797 0.0022407 -0.0016775 0.00096294 -0.0008152 0.0003828
-0.00042408 0.00011949 -0.00024664 0]

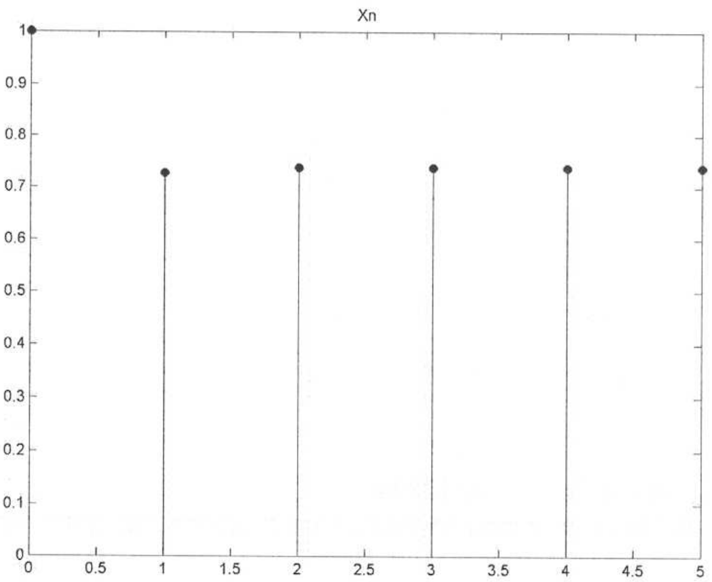
ה. גרף של $\varepsilon_n / \varepsilon_{n-1}$ כתלות ב n:



ו. גרף המדגים את ההתכנסות:



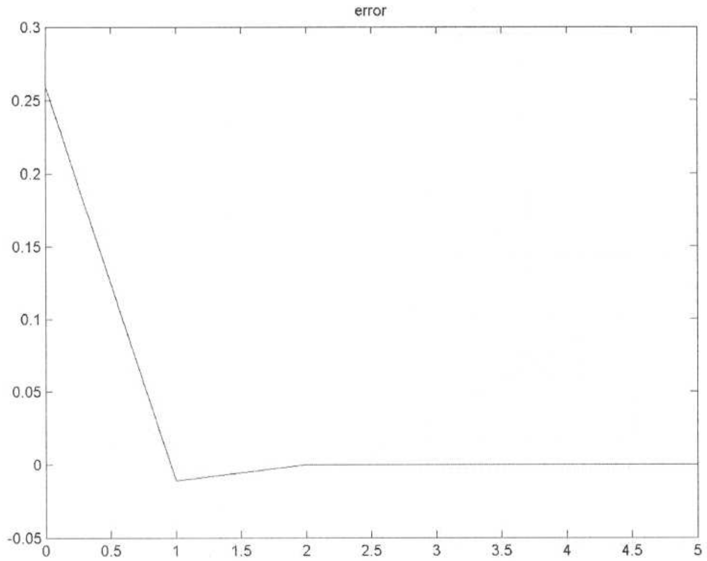
י.
איטרציות של steffensen:
Xn כתלות ב n:



הוקטור עצמו:

1	0.72801	0.73907	0.73909	0.73909	0.73909

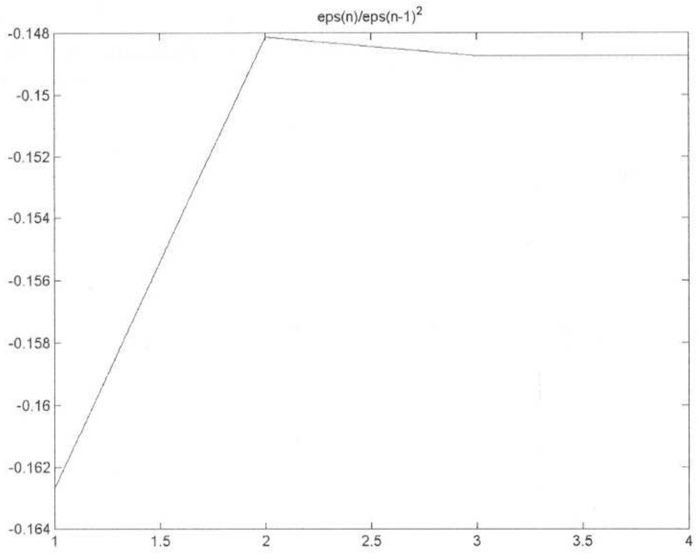
השגיאה כתלות ב n:



הווקטור:

0.26091 -0.011075 -1.8166e-005 -4.9085e-011 -3.5836e-022 0

בשיטת steffensen סדר ההתכנסות הוא 2 (השורש פשוט). נמצא את קבוע ההתכנסות:



הווקטור:

-0.16268 -0.14811 -0.14874 -0.14874

כפי שניתן לראות, סדר ההתכנסות אכן 2, וקבוע ההתכנסות הוא 0.14874~