$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$-h \quad 0 \quad h$

$$I \stackrel{\Delta}{=} \int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx = \int_{-2h}^{2h} \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 \right) dx =$$

$$= 4h f(0) + 0 + \frac{f''(0)}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2h}^{2h} + 0 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-2h}^{2h} + \frac{1}{5!}\int_{-2h}^{2h} f^{(5)}(\xi)\,x^5\,dx$$

$$I = 4h f(0) + \frac{f''(0)}{6}\left(8h^3 + 8h^3\right) + \frac{f^{(4)}(0)}{5\cdot 4!}\left(32h^5 + 32h^5\right) + \frac{1}{5!}\int_{-2h}^{2h} f^{(5)}(\xi)\,x^5\,dx$$

$$I = 4h f(0) + \frac{8}{3} f''(0)h^3 + \frac{8}{15} f^{(4)}(0)h^5 + \frac{1}{5!}\int_{-2h}^{2h} f^{(5)}(\xi(x))\,x^5\,dx.$$

$$a_{-1}f_{-1} + a_1 f_1 + b_{-1}f''_{-1} + b_1 f''_1 = a_{-1}\left(f(0) + f'(0)(-h) + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(-h)^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}h^4 + \frac{f^{(5)}(\xi_1(x))}{5!}h^5 \right) + a_1\left(f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}h^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}h^4 + \frac{f^{(5)}(\xi_2(x))}{5!}h^5 \right) + b_{-1}\left(f''(0) + \frac{f'''(0)}{1!}(-h) + \frac{f^{(4)}(0)}{2!}h^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{f^{(5)}(\xi_3(x))}{5!}(-h)^3 \right) + b_1\left(f''(0) + \frac{f'''(0)}{1!}h + \frac{f^{(4)}(0)}{2!}h^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{f^{(5)}(\xi_4(x))}{5!}h^3 \right) =$$

$$= f(0)\left(a_{-1} + a_1\right) + f'(0)\left(-ha_{-1} + ha_1\right) + f''(0)\left(\frac{h^2}{2}a_{-1} + \frac{h^2}{2}a_1 + b_{-1} + b_1\right) +$$

$$+ f^{(3)}(0)\left(-\frac{1}{3!}h^3 a_{-1} + \frac{1}{3!}h^3 a_1 - b_{-1} + b_1\right) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}h^4 +$$

$$+ b_{-1}\cdot\frac{f^{(4)}(\xi_3)}{2!}h^2 + b_1\cdot\frac{f^{(4)}(\xi_4)}{2!}h^2 \Big)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{-1} + a_1 = 4h \\ a_1 - a_{-1} = 0 \Rightarrow a_{-1} = a_1 \\ \frac{h^2}{2}(a_{-1}+a_1) + b_{-1} + b_1 = \frac{8}{3}h^3 \\ \frac{1}{6}h^3(-a_{-1}+a_1) - b_{-1} + b_1 = 0 \end{cases} \quad \boxed{a_{-1} = a_1 = 2h}$$

$$\frac{h^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{2} h + b_{-1} + b_1 = \frac{8}{3}h^3 \Rightarrow 2h^3 + b_{-1} + b_1 = \frac{8}{3}h^3 \Rightarrow b_{-1} + b_1 = \frac{2}{3}h^3$$

$$b_1 = b_{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{-1} = b_1 = \frac{1}{3}h^3}$$

$$\Rightarrow \int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx 2h\,f(-h) + 2h\,f(h) + \frac{1}{3}h^3 f''(-h) + \frac{1}{3}h^3 f''(h) \stackrel{\Delta}{=} \tilde{I}$$

ב) לפי נוסחת טיילור, השארית:

$$\varepsilon \stackrel{\Delta}{=} I - \tilde{I} = \frac{1}{4!}\int_{-2h}^{2h} f^{(4)}(\xi(x))\,x^4\,dx \underset{\text{לפי משפט ערך הביניים האינטגרלי}}{=} \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\int_{-2h}^{2h} x^4\,dx = \frac{8}{15} f^{(4)}(\xi) h^5$$

ג)

$$\int_0^1 e^{-u^2}\,du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-(t+\frac{1}{2})^2}\,dt$$

$t = u - \frac{1}{2}$

$dt = du$

$$\boxed{f(t) = e^{-(t+\frac{1}{2})^2}}$$

$$2h = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{4}}$$

$$f(-\tfrac{1}{4}) = e^{-(\frac{1}{16})} \approx 0.9394 \qquad f(\tfrac{1}{4}) \approx 0.5698$$

$$f'(t) = -2(t+\tfrac{1}{2})e^{-(t+\frac{1}{2})^2} \qquad f''(t) = -2e^{-(t+\frac{1}{2})^2} + 4(t+\tfrac{1}{2})^2 e^{-(t+\frac{1}{2})^2}$$

$$f''(-\tfrac{1}{4}) \approx -1.644 \qquad f''(\tfrac{1}{4}) = 0.1424$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-u^2}\,du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-(t+\frac{1}{2})^2}\,dt \approx 2\cdot\frac{1}{4}(0.9394 + 0.5698) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3(-1.644 + 0.1424) =$$

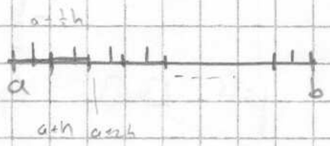
$$= 0.7468$$

ד) הקירוב שקיבלנו מדויק עבור פונ' שהנגזרת הרביעית שלהם $=0$ בקטע $[-2h,2h]$, כלומר פולינומים ממעלה עד, כולל, 3.

ב. נקב

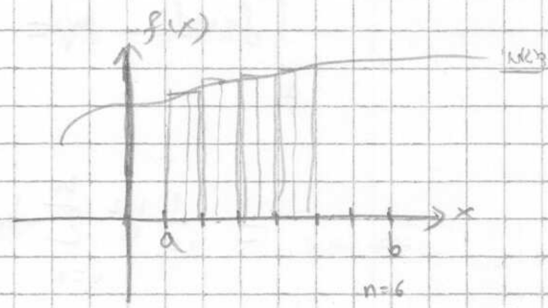
$$x_i = a + \left(i - \tfrac{1}{2}\right)h \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$a + \tfrac{1}{2}h,\ a + \tfrac{3}{2}h,\ a + \tfrac{5}{2}h,\ \dots,\ a + \tfrac{2n-1}{2}h$$



$$M(h) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$



$n=6$

$$h = \frac{b-a}{6}$$

נוכיח את נוסחת השגיאה!

$$\int_a^b f(x)\,dx - M(h) = \frac{b-a}{24} f''(\theta)h^2 \qquad \theta \in (a,b)$$

צ"ל:

נפעל לפי הרמז:

$$a = -\frac{h}{2} \qquad b = \frac{h}{2}$$

$$\tilde{h} = \frac{b-a}{n} = \frac{h}{n}$$

לפי שיטת האמצע

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x)\,dx \approx h \cdot f(0)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(\xi(x))}{2!}x^2\right)dx = 2h\,f(0) + 0 + \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f''(\xi(x))\,x^2\,dx =$$

משפט ערך הביניים לאינטגרלים

$$= 2h\,f(0) + \frac{1}{2}f''(\xi)\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 2h\,f(0) + \frac{1}{2}f''(\xi)\,h^3\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x)\,dx = 2h\,f(0) + \frac{1}{24}f''(\xi)\cdot h^3$$

המשך בדף הבא (דף 6)

קיבלנו עבור הרמז:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x)\,dx = 2h f(0) + \frac{1}{24} f''(\xi) h^3$$

כן נחלק כל קטע באורך h. יש n קטעים כאלה בקטע $[a,b]$ ולכן

$$\int_a^b f(x)dx - M(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{24} f''(\xi_i) h^3 = \frac{1}{24} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) =$$

$\xi_i \in (a+(i-1)h,\ a+ih)$

$i = 1..n$

ערך ממוצע $= \frac{1}{24} h^2 \sum_{i=1}^{n} h \cdot f''(\xi_i) = \frac{1}{24} h^2 \cdot (b-a) f''(\theta)$

$\theta \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx - M = \frac{b-a}{24} f''(\theta) h^2$$

$\boxed{M}$

שאלה 3

א.) נמצא ראשית את x_0, x_1 - שהם שורשים של פולינום אורתוגונלי ממעלה 2 לפי המכפלה: $\langle f,g \rangle = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) g(x) dx$:

נסמן:

$P_2 = x^2 + c_1 x + c_0$

נדרוש:

$$1.\quad \int_0^1 (x^2 + c_1 x + c_0) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 0$$

$$2.\quad \int_0^1 (x^2 + c_1 x + c_0) \cdot \underbrace{x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}_{=\sqrt{x}} dx = 0$$

$$1 \Rightarrow \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + c_1 \frac{2 \cdot x^{3/2}}{3} + c_0 2\sqrt{x} \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2c_1}{3} + 2c_0 = 0 \Rightarrow 6 + 10c_1 + 30c_0 = 0$$

$$3 + 5c_1 + 15c_0 = 0$$

$$2 \Rightarrow \left[\frac{2 \cdot x^{7/2}}{7} + c_1 \frac{2 \cdot x^{5/2}}{5} + c_0 \frac{2 \cdot x^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{\cancel{2}}{7} + \frac{\cancel{2}}{5} c_1 + \frac{\cancel{2}}{3} c_0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{5} c_1 + \frac{1}{3} c_0 = -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5c_1 + 15c_0 = -3 \\ 3c_1 + 5c_0 = -\frac{15}{7} \end{cases} \Rightarrow -4c_1 = -3 + \frac{45}{7} \Rightarrow c_1 = -\frac{6}{7}$$

$$c_0 = \frac{3}{35}$$

המשך שאלה 3 - א'

$$\Rightarrow \quad P_2(x) = x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{3}{35}$$

נמצא את השורשים:

$$x_{0,1} = \frac{\frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{36}{49} - \frac{12}{35}}}{2} = \frac{\frac{6}{7} \pm \sqrt{\frac{96}{245}}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 \simeq 0.7416$$

$$x_1 \simeq 0.1156$$

נמצא כעת את ה-H-ים:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx \simeq H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1)$$

$f(x) = 1$: $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\cdot\frac{x^{1/2}}{1}\Big|_0^1 = 2 = H_0 + H_1$

$f(x) = x$: $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2\cdot x^{3/2}}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} = H_0 x_0 + H_1 x_1$

$$\Rightarrow \quad H_0 x_0 + x_1(2 - H_0) = \frac{2}{3} \Rightarrow H_0(x_0 - x_1) = -2x_1 + \frac{2}{3}$$

$$H_0 = \frac{\frac{2}{3} - 2x_1}{x_0 - x_1} \simeq 0.696$$

$$H_1 = 2 - H_0 \simeq 1.304$$

$$\Rightarrow \quad I \triangleq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx \simeq 0.696 f(0.7416) + 1.304 f(0.1156) \triangleq \tilde{I}$$

ב)

$$I - \tilde{I} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \prod_{i=0}^{1} (x - x_i)^2\,dx \leq$$

$$\leq \frac{M}{4!} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (x - x_0)^2 (x - x_1)^2\,dx = \frac{16}{33075} M = 0.4837\cdot 10^{-3} M$$

(חושב באמצעות ה-Maple)

(ב

עבור:

$f(x) = \sqrt{x}$:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{x}\, dx \overset{\text{אנליטי.}}{\cong} 1$$

$$\tilde{I} = 0.696\sqrt{0.743} + 1.304\sqrt{0.1156} \cong 1.0433$$

$$\left|I - \tilde{I}\right| \cong 0.6$$

ועבור:

$f(x) = \sin(x)$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x\, dx \overset{\text{maple}}{\cong} 0.6205$$

$$\tilde{I} = 0.696\sin(0.743) + 1.304\sin(0.1156) \cong 0.6213$$

$$\left|I - \tilde{I}\right| = 8\cdot 10^{-4}$$

(ג

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t-2}}\, g(t)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, g(x+2)\, dx \approx$$

$x = t-2$

$dx = dt$

$$\approx H_0\, g(x_0+2) + H_1\, g(x_1+2) =$$

$$= H_0\, g(2.743) + H_1 \cdot g(2.1156)$$

2

שאלה 4

(א

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \approx H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1) + H_2 f(x_2)$$

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Leftarrow$ אנו יודעים מהם הפולינומים האורתוגונליים

ביחס לפונ' זו! (פולינומי צ'בישב)

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x\cdot x - 1 = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$

המשך סע' ב:

נמצא את השורשים:

$T_3(x)=0$

$$4x^3-3x=0$$

$$x(4x^2-3)=0$$

$$x_0=0 \qquad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

נקודות הדגימה!

נמצא את ה-H-ים:

3 נק' הדגימה ⇐ הנוסחה גאוס-צ'בישב מדויקת עבור פולינום מעלה 5 (וכולל)

$$f(x)=1 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\pi=H_0\cdot 1+H_1\cdot 1+H_2\cdot 1$$

$$f(x)=x \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0=H_0\cdot 0+H_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-H_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H_1=H_2$$

$$f(x)=2x^2-1 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=0=H_0\cdot(-1)+H_1\cdot\left(2\cdot\frac{3}{4}-1\right)+H_2\left(2\cdot\frac{3}{4}-1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} H_0+2H_1&=\pi\\ -H_0+H_1&=0\end{aligned}\right\}\ \boxed{H_1=\frac{\pi}{3}=H_2=H_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{3}\left[f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}$$

ג) השגיאה:

$$\varepsilon=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\prod_{i=1}^{3}(x-x_i)^2dx$$

$$=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x-0)^2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2dx$$

הנוסחה מדויקת עבור פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-5.

✓

$$\int_0^2 \frac{t^2+t^4}{\sqrt{t(2-t)}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)^2+(x+1)^4}{\sqrt{(x+1)(2-x-1)}}\,dx =$$

$x = t-1$

$dx = dt$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{3}\left[\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] + \frac{\pi}{3}\left[\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4+1+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right] =$$

$$\cong \frac{3}{2}\pi + 4\frac{3}{8}\pi = 5.875\pi$$

* וזהו גם הערך המדויק (!!) כי $(x+1)^2$ וגם $(x+1)^4$

הם פולינומים ממעלה קטנה מ-6!