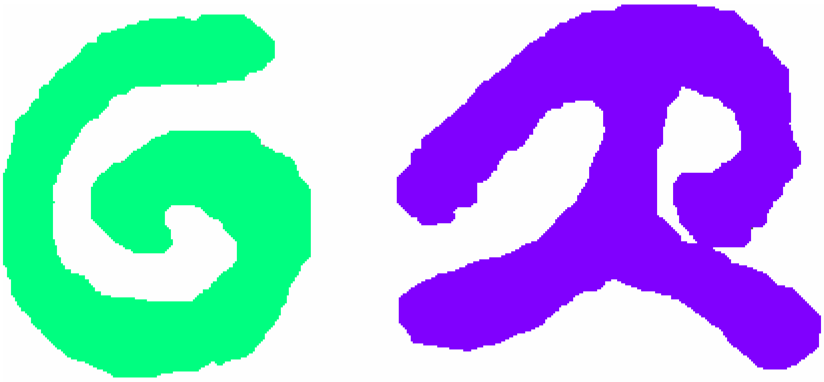
גיליון 12

1.א. פשוט קשר = אין חורים. היחידים שמתאימים הם

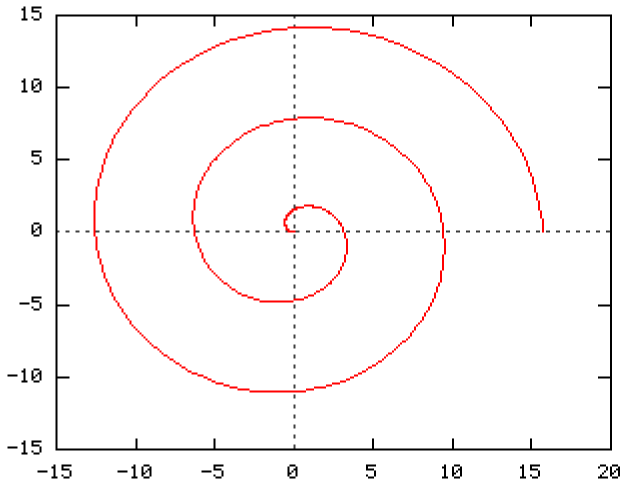


ב. אצלי הכל כן.

ג. אצלי נ"ח לא שווה ולא משמר.

2.א. עבור: x=-t*cos(t), y=t*sin(t), $0 \le t \le 5\pi$

הגרף הוא:



ע"י העברת קווים מתאימים מקבלים ש: 2π חותך 4 פעם, -2π פעמים, $\frac{5\pi}{2}$ 3 פעמים, $\frac{-5\pi}{2}$ פעמים.

ב. הכל כן (קל לבדוק)

ג. $x=t, y=0, 0\le t\le 5\pi$

ד. $\int_0^{5\pi} 4t^3dt=(5\pi)^4$ (שדה משמר ולכן נבחר אינטגרל על קו ישר, שהוא המסלול הכי נוח)

3.א. נתון: $\int_{A\text{-}C}=\beta$, $\int_{A\text{-}B}=\alpha$ נובע: $\int_{C\text{-}B}=\alpha-\beta$ (בדוק ששדה משמר) (שימוש בכלל שרשרת)

ואז ניתן להגיע מ-A ל-B גם דרך C)

ב. אצלי הכל כן. ואת הפוטנציאל מצאתי בעזרת משואה מדויקת (מד"ר).

4.א. P,Q רציפות (בדיקה ע"י מעבר לקוטביות ולופיטל על פונקצית עזר $x\ln x$)

$Q'_x(0,0)=P'_y(0,0)=0$ ובנקודה כללית צריך לחשב (אפשר במחשב) אבל הן יוצאות שוות

ורציפות (יש לבדוק שמתקיים $\lim_{(x,y)\to(0,0)} P'_y(x,y)=P'_y(0,0)$) ולכן גם ל- "האם ניתן ...

בתחום פשוט קשר ?" התשובה היא כן.

קיבלת שדה משמר ולכן $\oint_c=0$. וכל זה לפי משפט 1.

ב. כנ"ל לחשב, הנגזרות החלקיות יוצאות רציפות בנקודה כללית אך לא בראשית (לפי הבדיקה $\lim_{(x,y)\to(0,0)} P_y'(x,y) = P_y'(0,0)$) ולכן הפונקציה כן בעלת נ"ח ללא הראשית

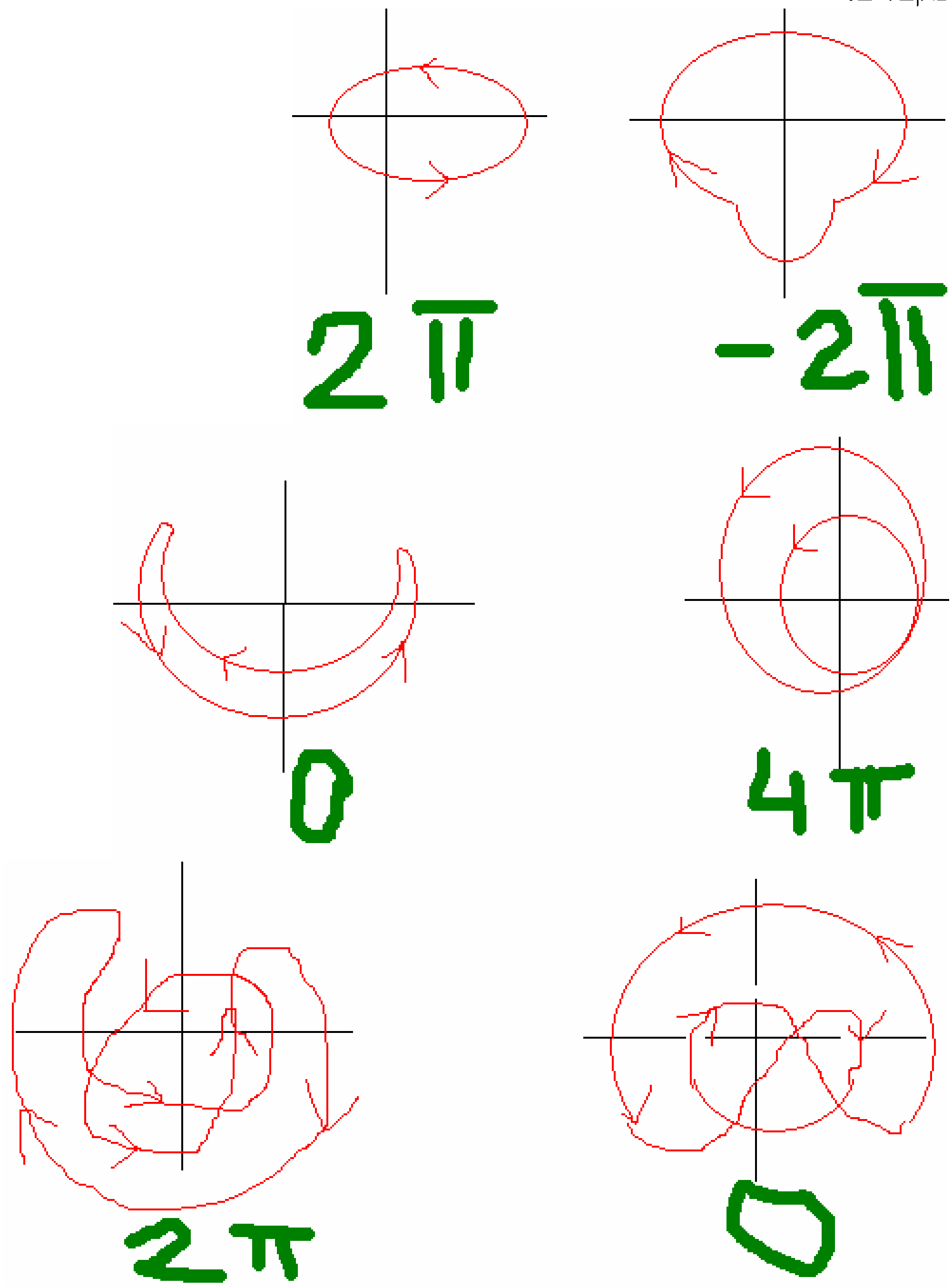
מחישוב מתקבל $\oint_c = 0$ (קוטביות עושות את זה הכי טוב) ולכן משמר לפי משפט 2.

ג. גם כאן מחשבים כמו כושים (או מפעילים מאטלב) הנ"ח יוצאות שוות ו- $\oint_c = \pi$

(קוטביות שוב עושות את זה הכי טוב) ז"א לא משמר.

5. הסבר טוב על השדה הזה מופיע בהרצאות ווידאו – זהו "מונה סיבובים סביב הראשית" כל פעם שהמסלול שלך סוגר מעגל בכיוון השעון סביב הראשית תוסיף 2π וסיבוב נגד כיוון השעון תחסר 2π. מסלול שלא מקיף את הראשית לא משפיע.

מקבלים:



ב. $\int_c ydx + xdy = 0$ לפי גרין

ואת האינטגרל השני ניתן לחלק ל-2 באופן הבא:

$$\int_c \frac{x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2}dy=\int_c ydx+xdy+\int_c \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=0+2\pi=2\pi$$

* $\int_c \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=2\pi$ זה אינטגרל ידוע, זכור אותו.

6. אצלי $z=2-x^2-y^2, z\ge 0$

א. $z=2-r^2$

$0\le r\le\sqrt{2}, 0\le\theta\le 2\pi$

ב. $\vec{R}_r\times\vec{R}_\theta=[2r^2\cos(t), 2r^2\sin(t), r]$

ג. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4r^4+r^2}dr=\frac{13\pi}{3}$

7.א. נתון: $f=x^2+y^2-ax$ או שניתן לרשום $f=(x-\frac{a}{2})^2+y^2-\frac{a^2}{4}$

ואת החומה: $x^2+y^2-ax=b$ ניתנת לרשום כ: $(x-a/2)^2+y^2=b+\frac{a^2}{4}$

מתקבל: $\vec{R}_x\times\vec{R}_y=[(a-2x),(-2y),(1)]$

$A_{estate}=\iint_D\sqrt{(a-2x)^2+(-2y)^2+1}$ ואת זה פטור ע"י מעבר לקוטביות : $x=\frac{a}{2}+r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

האינטגרל שמתקבל הוא בדיוק כמו בתרגיל קודם (סעיף ג) רק הגבולות אולי שונים:

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}}\sqrt{4r^4+r^2}dr$$

וזהו מעגל שרדיוסו $\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$ ומרכזו בנקודה $(\frac{a}{2},0)$

<u>דוגמא מספרית:</u> $f=x^2+y^2-\sqrt{5/4}x$ וחומה : $x^2+y^2-\sqrt{5/4}x=\frac{27}{16}$

את זה ניתן לרשום כ: $f=(x-\sqrt{5/16})^2+y^2-5/16$ וחומה : $(x-5/16)^2+y^2=2$

הקואורדינאטות יהיו: $x=\sqrt{\frac{5}{16}}+r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

האינטגרל יהיה : $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4r^4+r^2}dr=\frac{13\pi}{3}$ אפילו הגבולות כמו בסעיף הקודם.

וזהו מעגל שרדיוסו $\sqrt{2}$ ומרכזו בנקודה $(\sqrt{\frac{5}{16}},0)$

ב. כאשר $f=0$ מתקבל $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$

ולכן יהיה לנו מעגל שרדיוסו $\frac{a}{2}$ ומרכזו בנקודה $(\frac{a}{2},0)$

$$A_{lake}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{4r^4+r^2}dr$$

__בדוגמא המספרית:__ $A_{lake} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{5}{16}}} \sqrt{4r^4 + r^2}\, dr = \frac{19\pi}{48}$

$A_{land} = A_{estate} - A_{lake} = \frac{13\pi}{3} - \frac{19\pi}{48} = \frac{63\pi}{16}$ (המספרים לדוגמא המספרית הניתנת כאן)

__ג.__ כאן כל הרעיון הוא ששטח פני האגם לא מושפעים מתבליט הקרקע ולכן השטח הוא שטח מעגל.

$A_{cruise} = \pi\frac{a^2}{4} = \frac{5\pi}{16}$ (המספרים לדוגמא המספרית הניתנת כאן)

__8.__ עבור הנתונים:

$$x = 2\cos\theta\sin\varphi$$
$$y = 2\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = 2\cos\varphi$$
$$\rho(x,y,z) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2})}$$

הפתרון הוא:

$$|\vec{R}_\varphi \times \vec{R}_\theta| = 4\sin\varphi$$
$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} (4\sin(\frac{\varphi}{2})\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{32\pi}{3}$$
$$\hat{x} = \hat{y} = 0$$
$$\hat{z} = -0.4$$

והפונקציה ρ הנ"ל מקבלת ערכים גדולים למטה ורכיב $\hat{z}$ שלילי (התשובה מתאימה).

*זהו רק פטרון פרטי ולא כללי.

__11__ שים לב ש: $D = \{\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ (אצלי לפחות...)

__12.א.__ עבור:

$$(x-a)^2 + y^2 = b$$
$$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \delta$$

__פתרון:__ ניקח $\vec{F} = (Ax+By)i + (Cx+Dy)j$ (למשל)

לפי גרין נקבל: $\iint (C-B) = \delta$

$(C-B)$ אפשר להוציא מהאינטגרל ולכן $(C-B)*S_{sircul} = \delta$ כאשר S_{sircul} הוא שטח המעגל. ז"א נקבל: $(C-B) = \frac{\delta}{\pi b}$ כי $S_{sircul} = \pi r^2 = \pi b$

בפרט עבור $B = 0$ נקבל $C = \frac{\delta}{\pi b}$

__התשובה:__ $\vec{F} = 0i + \frac{\delta}{\pi b} j$

*זאת לא האופציה היחידה

__ב.__ נתון: $S = \{(x,y,z) \mid z = ax + by + c, x^2 + y^2 \le R^2\}$

ששטחו $V\pi$

__פתרון:__ ניקח $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + (ax+by+c)\hat{k}$

נקבל $|\vec{R}_x \times \vec{R}_y| = \sqrt{a^2+b^2+1}$ שורש זה לא תלוי באינטגרל ולכן שוב נקבל:

$$\sqrt{a^2+b^2+1} * S_{sircul} = \sqrt{a^2+b^2+1} * \pi R^2 = V\pi$$

$$\sqrt{a^2+b^2+1} = \frac{V}{R^2}$$

$$a^2+b^2+1 = (V/R^2)^2$$

בפרט עבור $b=0$ נקבל $a = \pm\sqrt{(V/R^2)^2-1}$

לצורך העניין יספיק החיובי $a = \sqrt{(V/R^2)^2-1}$

<u>תשובה:</u> $z = \sqrt{(V/R^2)^2-1} * x + 0 * y + 0$

גיליון 13

<u>1.</u> כל מה שהוא תוצאה של רוטור יש לרשום כווקטור אפילו אפס רשום כ: $(0,0,0)$

<u>7.א.</u> חשב שטף של $\vec{G}=\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)}+\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{a}$

דרך המשטח $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\delta^2}+\frac{z^2}{\lambda^2}=1$

<u>תשובה:</u> $\oiint_s \vec{G}\cdot\hat{n}ds=4\pi+\frac{4\pi*\beta*\delta*\lambda}{a}$

<u>ב.</u> $\hat{n}=\frac{grad(f)}{|grad(f)|}$

<u>ג.</u> אפס. הסבר חפש באחת השאלות בונוס במבחנים הראשונים (נראה לי מבחן 98-99 מועד אביב שאלה אחרונה), שאלת ה"בונוס". יש פתרון מפורט של צוויקל (באנגלית).

<u>8.</u> לא כן לא כן כן כן לא כן לא לא לא כן כן

<u>9.א.</u> השדה $\vec{F}=y\hat{i}+x\hat{j}+xy\hat{k}$

בעל נ"ח רציפות

$\nabla\vec{F}\neq 0$ ולכן הוא לא משמר.

<u>ב.</u> $\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

על מסלול המעגלי הסטנדרטי:

$x=\cos(t)$

$y=\sin(t)$

$z=0$

$0\le t\le 2\pi$

<u>נ.ב:</u>

-אתם מוזמנים להמשיך לכתוב, כל אחד יפתור שאלה אחד ולבסוף יהיה משהו שאפשר ללמוד ממנו.

-לתגובות אתם מוזמנים לכתוב לי בפורום של אס"ט: http://forums.asat.org.il

תחת השם Evgy (אבל לא כדי לשאול שאלות כי אני כבר בקושי זוכר מה רשמתי).

-תשלימו אם שגיאות הכתיב שלי, אני השלמתי.

כתב וערך **Evgy**

06/03/06

תיהנו.