דף נוסחאות / סיכום
מכניקה אנליטית (114101)

בהצלחה

חן אבינדב, חורף תשס"ו

פורמליזם לגרנז'יאני

הלגרנז'יאן: $L = T_{(kinetic)} - V_{(potential)}$

משוואות אוילר-לגרנז' (EL): $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

פעולה: $A = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\vec q, \dot{\vec q}, t\right) dt$

מתוך עקרון הפעולה - הדרישה $\delta A = 0$, מקבלים את משוואות EL, שאותן L חייב לקיים.

באופן כללי, השינוי ב- $F(x,y,\dots)$ לאחר שינוי אינפי' ב- $x,y,\dots$ הוא: $\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \dots$

ניתן להוסיף ללגרנז'יאן נגזרת שלמה של פונקציה כלשהי $f(\vec q, t)$: $L' = L + \frac{d}{dt} f(q,t) = L + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial f}{\partial t}$

ומשוואות התנועה שנגזרות ממנו לא ישתנו (אך ייתכנו מקרים שבהם הלגרנז'יאנים נבדלים במשהו אחר, ועדיין משוואות התנועה שלהם זהות).

משפט ההומוגניות של אוילר

פונקציה f נקראת הומוגנית מסדר n אם מתקיים לכל α: $f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^n f(x_1, \dots, x_n)$

לפונקציה כזו מתקיים: $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = nf$

(שימושי כי לפעמים מקבלים שהלגרנז'יאן הוא פונקציה הומוגנית של הקואורדינטות מסדר 2.)

חלקיק בשדה אלקטרומגנטי

הלגרנז'יאן: $L = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\vec A \cdot \vec v$

משוואות התנועה אינווריאנטיות תחת הטרנספורמציה:

$$\vec A \to \vec A + \vec\nabla f(\vec r, t), \quad \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f(\vec r, t)}{\partial t}$$

והשדות שנגזרים מהפוטנציאלים הם:

$$\vec E = -\vec\nabla\varphi - \frac{\partial \vec A}{\partial t}, \quad \vec B = \vec\nabla \times \vec A$$

תבניות ריבועיות

באופן כללי, מקדמים של איברים מעורבים ($x_1 x_2$) נכנסים מחוץ לאלכסון עם פקטור חצי, בעוד שמקדמים של איברים גזעיים (x_1^2) נכנסים לאלכסון כמו שהם. כך למשל: $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$

רדוקציה של בעיית שני גופים

ניתן לצמצם בעיה של n גופים לבעיה של $n-1$ גופים בעזרת מערכת מרכז המסה. במקרה של בעיית שני גופים ללא כוחות חיצוניים, נגדיר קואורדינטות חדשות:

$$\vec r = \vec r_1 - \vec r_1, \quad \vec R = \frac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \vec r_1 = \vec R + \frac{m_2 \vec r}{m_1 + m_2}, \quad \vec r_2 = \vec R - \frac{m_1 \vec r}{m_1 + m_2}$$

מקבלים ש- $\vec R$ היא קואורדינטה ציקלית, ולכן כצפוי התנע הכולל של המערכת נשמר, והלגרנז'יאן ביחס ל- r הוא: $L = \frac{1}{2}\mu \dot{\vec r}^2 - V(r)$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ היא המסה המצומצמת של המערכת.

נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) - V(r)$$

φ ציקלית ולכן $L_z = const$. אך הבחירה היא שרירותית לגמרי, לכן התנע הזוויתי נשמר בכל כיוון, כלומר $\vec L$ גם קבוע, וניתן לבחור את ציר $\hat z$ כך שנקבל $L_x = L_y = 0$, וזה מה שעושים בעצם.

שונות

$$\vec a \times \left(\vec b \times \vec c\right) = \left(\vec a \cdot \vec c\right)\vec b - \left(\vec a \cdot \vec b\right)\vec c$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

חוקי שימור

אינטגרל יעקובי מוגדר כך: $H = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L$

והוא מקיים: $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

לכן, עבור לגרנז'יאן שאינו תלוי בזמן מפורשות נקבל ש- H הוא גודל נשמר, ובדרך כלל נקשר אותו עם האנרגיה של המערכת (נובע *מהומוגניות של הזמן*).

התנע המוכלל שצמוד ל- q_i מוגדר כך: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$

וממשוואות EL נובע שהנגזרת שלו שווה לכוח המוכלל שצמוד לאותה קואורדינטה: $\dot p_i = F_i$

ומכאן ניתן לקבל חוקי שימור של התנע המוכלל בכיוונים מסויימים (*הומוגניות של המרחב* באותם כיוונים).

כאשר קואורדינטה מסויימת q_i לא מופיעה בלגרנז'יאן באופן מפורש, נאמר שהיא ציקלית ואז התנע הצמוד אליה p_i הוא קבוע בזמן.

שימור תנע זוויתי נובע *מהאיזוטרופיות של המרחב* (בכיוונים שבהם הוא נשמר). התנע הזוויתי הכולל של המערכת הוא: $\vec L = \sum_i \vec r_i \times \vec p_i$

מערכת מרכז המסה מוגדרת כמערכת שבה התנע הכולל הוא אפס. $\vec R_{c.m.} = \frac{\sum m_a \vec r_a}{\sum m_a}, \quad \vec V_{c.m.} = \frac{\sum m_a \dot{\vec r}_a}{\sum m_a}$

כאשר הסכימה היא על כל החלקיקים של המערכת.
ניתן לרשום את האנרגיה של כל מערכת כך:

$$E = \frac{1}{2}\left(\sum m_a\right) V_{c.m.}^2 + E_{internal}$$

כאשר $E_{internal}$ היא האנרגיה במערכת מרכז המסה.
מקבלים את חוקי השימור האלה על ידי כך שמניחים הזזה מסויימת (בין אם קווית ובין אם סיבובית) של כל הקואורדינטות $\vec r_a$ (כתוצאה מכך גם $\dot{\vec r}_a$ יכול להשתנות), ודורשים $\delta L = 0$. כך למשל, בשביל להוכיח שימור תנע זוויתי, מניחים: $\delta \vec r_a = \delta\vec\phi \times \vec r_a, \delta\dot{\vec r}_a = \delta\vec\phi \times \dot{\vec r}_a$

בכל מערכת n-מימדית יש $2n$ קבועי תנועה, אך תמיד ניתן להגדיר אחד מהם בתור הזמן ההתחלתי ונישאר עם $2n-1$ קבועים.

משוואות מצומדות

בהינתן זוג משוואות מצומדות עבור x_1, x_2, כדאי לנסות להגדיר $y = x_1 \pm ix_2$ ולקבל משוואה אחת עבור y בעזרת חיבור וחיסור המשוואות.

מערכות צירים שונות

גליליות:

$$\vec r = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

$$\vec v = \dot r\hat r + r\dot\varphi\hat\varphi + \dot z\hat z, \quad |J| = r$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) - V$$

כדוריות:

$$\vec r = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

$$\vec v = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta + r\sin\theta\dot\varphi\hat\varphi, \ |J| = r^2\sin\theta$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right) - V$$

פורמליזם המילטוניאני

ההמילטוניאן: $H(q_i, p_i) = \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L$

כאשר את $\dot q_i$ יש לחלץ מתוך המשוואות: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$

משוואות המילטון: $\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

עבור שתי פונקציות u, v נגדיר את סוגר פואסון:

$$\{u, v\} = \sum_i \frac{\partial(u,v)}{\partial(q_i, p_i)} = \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}$$

ואז לכל $F(q_i, p_i; t)$ מתקיים: $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$

תכונות:

$$\{u, v\} = -\{v, u\}, \quad \{uv, w\} = u\{v, w\} + \{u, w\}v$$

$$\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0$$

טוב שיש בבית: $\dot q_i = \{q_i, H\}, \quad \dot p_i = \{p_i, H\}$

היחסים הקנוניים הם: $\left\{q_i, q_j\right\} = \left\{p_i, p_j\right\} = 0, \quad \left\{q_i, p_j\right\} = \delta_{ij}$

שימור יחסים קנוניים אלה הוא תנאי מספיק והכרחי לכך שטרנספורמציה היא קנונית, כלומר מספיק לדרוש שיתקיים:

$$\left\{Q_i, Q_j\right\}_{p,q} = \left\{P_i, P_j\right\}_{p,q} = 0, \quad \left\{Q_i, P_j\right\}_{p,q} = \delta_{ij}$$

אם f, g קבועי תנועה $\{f, H\} = \{g, H\} = 0$, אז גם $\{f, g\}$ קבוע.

משוואת המילטון-יעקובי:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0$$

(הכוונה היא שמציבים $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ במקום p_i בהמילטוניאן)

מוצאים את הפונקציה $S(P, q)$, וממנה יוצרים טרנספורמציה קנונית למשתנים חדשים Q, P שהם למעשה קבועי תנועה. נהוג לסמן $P = \alpha, Q = \beta$ וזאת משום שהם קבועים. פותרים את משוואת המילטון-יעקובי ומוצאים את S, ומתוכה יוצרים טרנספורמציה שמקשרת בין p, q ו- α, β. מציבים $t = 0$ כדי למצוא את α, β, והופכים את הטרנספורמציה לקבלת p, q. בבעיות חד-מימדיות בפוטנציאל שאינו תלוי בזמן, ניתן להניח ש- S נראית כך:

$$S(\alpha, q, t) = F(q, \alpha) - \alpha t$$

$$F(q, \alpha) = \int dq\sqrt{2m\left(\alpha - V(q)\right)} \qquad (q \sim x)$$

ככלל, יצירת טרנספורמציות קנוניות מתבצעת באופן הבא:

$$W_1(q_i, Q_i, t) \quad \Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial W_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_i}$$

$$W_2(q_i, P_i, t) \quad \Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial W_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W_2}{\partial P_i}$$

$$W_3(p_i, Q_i, t) \quad \Rightarrow \quad q_i = -\frac{\partial W_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_i}$$

$$W_4(p_i, P_i, t) \quad \Rightarrow \quad q_i = -\frac{\partial W_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W_4}{\partial P_i}$$

בכל המקרים, ההמילטוניאן החדש הוא: $H' = H + \frac{\partial W}{\partial t}$

תנועה בפוטנציאל מרכזי

בהמשך לרדוקציה של הבעיה למימד אחד נבחר $\theta = \pi/2$, כי רוצים להיות במישור xy, ונקבל את הלגרנז'יאן:

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right) - V(r)$$

כעת נסמן $L_z = \ell = \mu r^2\dot\varphi = const$ ונקבל שהאנרגיה (לפי אינטגרל יעקובי) היא: $E = \frac{1}{2}\mu\dot r^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r)}_{V_{eff}(r)}$

מכאן ניתן לבודד את $\dot r$ ולקבל: $dt = dr\sqrt{\frac{\mu}{2}\cdot\frac{1}{E - V_{eff}(r)}}$

מתוך משוואה זו והגדרת ℓ ניתן לקבל את המשוואה האינט':

$$\varphi(r) = \int \frac{\ell}{r^2\sqrt{2\mu\left(E - V_{eff}(r)\right)}} dr$$

עבור תנועה שני רדיוסים r_1, r_2, התנאי שהיא תיסגר:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ell}{r^2\sqrt{2\mu\left(E - V_{eff}(r)\right)}} dr = 2\pi \cdot \frac{n}{m}$$

עבור n, m שלמים כלשהם.
חמשת קבועי התנועה של תנועה בפוטנציאל מרכזי:
אנרגיה כוללת, שלושת רכיבי התנע הזוויתי, וכיוון $\vec A$.

זמן המחזור של תנועה חסומה וסגורה, כפונקציה של האנרגיה, הוא: $T(E) = \sqrt{2\mu}\int_{r_1(E)}^{r_2(E)} \frac{dr}{\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$

כאשר r_1, r_2 הן נקודות המפנה (והן תלויות באנרגיה כמובן).
מציאת הפוטנציאל מתוך זמן המחזור $T(E)$ כפונק' של האנרגיה:

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U - E}}$$

כאשר $x_1(U), x_2(U)$ הם ענפי הפוטנציאל השונים, מימין ומשמאל לנקודת המינימום. בפוטנציאל סימטרי מותר להניח $x_2 = -x_1$.

ממשוואת בִּינֶה אפשר לקבל המסלול $r(\varphi)$ מתוך הכוח, ולהיפך:

$$\frac{\ell^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = -\frac{1}{u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right), \quad u \equiv r^{-1}$$

עבור $F = -k/r^2$ מתקבל תמיד המסלול: $r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$

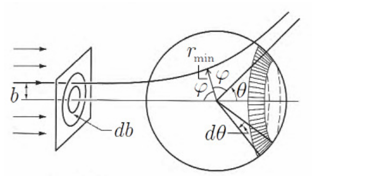
כאשר: $p = \ell^2/\mu k, \quad e = \sqrt{1 + 2E\ell^2/\mu k^2}$

עבור אקסצנטריות $0 < e < 1$ זוהי אליפסה, כאשר $e = 0$ זה מעגל, עבור $e = 1$ זו פרבולה ואם $e > 1$ זו היפרבולה.
וקטור הרמן לפלס רונגה לנץ מוזס שלום - עבור כוח קולוני מהצורה $F = -k/r^2$ בלבד: $\vec A = \vec p \times \vec L - k\mu\hat r$

וקטור זה קבוע בזמן, וכיוונו מצביע תמיד על הציר הראשי.

פרצסיה כללית וקטור $\vec G$ שמקיים $\dot{\vec G} = \vec\Omega \times \vec G$, נאמר שהוא עושה פרצסיה סביב $\vec\Omega$, כלומר הוא מסתובב סביב $\hat\Omega$ במהירות קבועה $\left|\vec\Omega\right|$, ו- $\left|\vec G\right|$ קבוע בזמן וכך גם הזווית בין $\vec G$ ל- $\vec\Omega$.

תורת הפיזור



המסלול סימטרי ביחס לנקודה הקרובה ביותר של החלקיקים למרכז הכוח, ולכן: $\theta = \pi - 2\varphi_0$

ידוע כי: $\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\ell}{r^2\sqrt{2m\left(E - V_{eff}(r)\right)}} dr$

וכמו כן מתקיים: $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2, \quad \ell = mv_\infty b$

את $r_{\min}$ ניתן למצוא מתוך המשוואה $E = V_{eff}(r_{\min})$, או אם ידועה לנו צורת המסלול $r(\varphi)$, ניתן למצוא את φ_0 מתוך הדרישה ש- $r(\varphi_0) = \infty$. המטרה הסופית היא למצוא את θ כפונקציה של b, או להיפך.

מאפיינים את אלומת חלקיקים בעזרת השטף Φ - מספר החלקיקים הפוגעים ליחידת זמן ליחידת שטח. חתך הפעולה הדיפרנציאלי $d\sigma(\theta)$ שווה למספר החלקיקים ליחידת זמן שפוזרו בזווית θ, חלקי Φ:
$$d\sigma(\theta) = \frac{dN(\theta)}{\Phi}$$

אנו תמיד מניחים כי יש התאמה חח"ע בין θ ל- b, כך שמספר החלקיקים שפוזרו בזווית $(\theta, \theta + d\theta)$ ניתן לכתיבה כך: $dN(\theta) = 2\pi\Phi b(\theta)db(\theta)$

ואז נקבל את חתך פעולה דיפרנציאלי:
$$d\sigma(\theta) = 2\pi b(\theta)db(\theta) = 2\pi b(\theta)\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\theta = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\Omega$$
$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}\left|\frac{d(b^2)}{d\theta}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{d(b^2)}{d(\cos\theta)}\right|$$

כאשר השתמשנו בזווית המרחבית $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$.

חתך הפעולה הכולל מוגדר כך:
$$\sigma_{total} = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \int\frac{1}{2}\frac{d(b^2)}{d(\cos\theta)}2\pi\sin\theta d\theta$$
$$= \pi\int\frac{d(b^2)}{d(\cos\theta)}d(\cos\theta) = \pi\left(b_{\max}^2 - b_{\min}^2\right)$$

גודל זה מהווה מדד לשטח האפקטיבי שאחראי לפיזור הכולל במערכת, בעוד ש- $d\sigma(\theta)$ מייצג את אלמנט השטח שגורם לפיזור בזווית θ בלבד.

טנזורי אינרציה נפוצים

גוף שטוח (במישור xy): $\mathbf{I}_{xx} + \mathbf{I}_{yy} = \mathbf{I}_{zz}$

גוף חד-מימדי (בציר z): $\mathbf{I}_{xx} = \mathbf{I}_{yy}, \quad \mathbf{I}_{zz} = 0$

כדור: $\mathbf{I} = 2mR^2/5$, דיסקה: $\mathbf{I}_{zz} = mR^2/2$

מוט דק: $\mathbf{I}_{xx} = \mathbf{I}_{yy} = mL^2/12, \mathbf{I}_{zz} = 0$

גליל מעגלי (ביחס למרכז): $\mathbf{I}_{xx} = \mathbf{I}_{yy} = m\left(R^2/4 + h^2/12\right)$, $\mathbf{I}_{zz} = mR^2/2$

סביבון כבד (ביחס לנק' המגע): $\mathbf{I}'_{zz} = \mathbf{I}_{zz} + mL^2$

תנועה של גוף צפיד

מעבר בין מערכת קואורדינטות שונות - $\mathbf{U}$ היא מטריצת המעבר מ- S ל- S': $\mathbf{r}' = \mathbf{U}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{U}^t\mathbf{r}', \quad \mathbf{U}^t\mathbf{U} = \mathbf{1}$.

$\mathbf{U}$ משמרת נורמה, כלומר $\mathbf{r}'^2 = r'_i r'_i = r_i r_i = \mathbf{r}^2$.

נגזור: $\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{U}\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{U}}\mathbf{r} = \mathbf{U}\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^t\mathbf{U}\mathbf{r} = \mathbf{U}\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^t\mathbf{r}'$.

המטריצה $\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^t$ היא אנטי-סימטרית, וניתן לרשום $\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^t\mathbf{r}' = \vec{\omega}\times\vec{r}\big|_{space}$ עבור $\vec{\omega}$ כלשהו. ואז באופן כללי מתקיים לכל וקטור $\vec{G}$:
$$\left.\frac{d\vec{G}}{dt}\right|_{space} = \left.\frac{d\vec{G}}{dt}\right|_{body} + \vec{\omega}\times\vec{G} \qquad (*)$$

$\vec{\omega}$ היא המהירות הזוויתית הרגעית. תהי S' מערכת המעבדה ו- S מערכת צמודה לגוף, שראשיתה במרכז המסה של הגוף, ו- $\vec{R}$ הוא הוקטור מהראשית של S' לזו של S (וקטור המקום של מרכז המסה). לכל נקודה בגוף $\vec{v}_i\big|_{space} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega}\times\vec{r}_i\big|_{body}$, וניתן לחשב את האנרגיה הקינטית במערכת המעבדה:
$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2\big|_{space} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\dot{\vec{R}} + \vec{\omega}\times\vec{r}_i\big|_{body}\right)^2$$
$$= T_{translation} + T_{rotation} = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\big|_{body}\right)^2$$

כאשר השתמשנו בעובדה שהראשית של S היא במרכז המסה, ולכן $\sum_i m_i\vec{r}_i\big|_{body} = 0$. בעזרת הגדרת טנזור ההתמדה של הגוף:
$$\mathbf{I}_{jk} = \sum_i m_i\left(\mathbf{r}_i^2\delta_{jk} - (\mathbf{r}_i)_j(\mathbf{r}_i)_k\right)$$

נקבל: $T = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{I}_{jk}\boldsymbol{\omega}_j\boldsymbol{\omega}_k = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$.

טנזור ההתמדה באופן מפורש:
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{I}_{kk}$ נקרא מומנט ההתמד של הגוף ביחס לציר $\hat{x}_k$.

באופן כללי, $\hat{n}^t\mathbf{I}\hat{n}$ הוא מומנט ההתמד ביחס לציר $\hat{n}$.

כאשר הגוף רציף, $\sum$ הופך ל- $\int$, ו- m_i הופך ל- ρdv.

טרנספורמציה של $\mathbf{I}$ במעבר מערכות: $\mathbf{I}' = \mathbf{U}\mathbf{I}\mathbf{U}^t$.

יתר על כן, תמיד נוכל למצוא מערכת צירים ראשית, שבה $\mathbf{I}'$ אלכסוני (כלומר, $\mathbf{U}^t$ מלכסנת את $\mathbf{I}$) ונוח לשימוש.

נחשב את התנע הזוויתי הכולל של הגוף:
$$\vec{L}_{total} = \sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i\big|_{space} = \sum_i m_i\left(\vec{r}_i\times\vec{v}_i\big|_{space}\right)$$
$$= \vec{R}\times\vec{P} + I\cdot\vec{\omega} = L_{c.m} + L_{rotation}$$

הנוסחה $\vec{L} = I\vec{\omega}$ נותנת את התנע הזוויתי במערכת הייחוס של הגוף, בהנחה שלוקחים גם את $I, \vec{\omega}$ במערכת זו.

משפט הצירים המוזזים – ביחס לנקודה שנמצאת במרחק $\vec{a}$ ממרכז המסה, מומנט האינרציה $\mathbf{I}_{\vec{a}}$ נתון על ידי:
$$\left(\mathbf{I}_{\vec{a}}\right)_{jk} = \left(\mathbf{I}_{c.m}\right)_{jk} + M\left(\mathbf{a}^2\delta_{jk} - \mathbf{a}_j\mathbf{a}_k\right)$$

מטריצת הסיבוב בזוויות אוילר (מעבר מהמעבדה לגוף):
$$\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

במעבדה מתקיים $\dot{\vec{L}}_{space} = \vec{N}$, כאשר $\vec{N}$ הוא סך כל המומנטים הפועלים על הגוף, לכן מתוך $(*)$ נקבל:
$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{body} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{N} \qquad \text{(משוואות אוילר)}$$

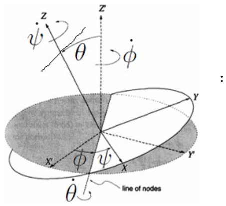
זה נכון לכל מערכת, ובפרט למערכת צירים ראשית:
$$I_1\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right) = N_1$$
$$I_2\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right) = N_2$$
$$I_3\frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right) = N_3$$

בתנאי התחלה של סיבוב סביב ציר ראשי אחד בלבד ($\omega_2(0) = \omega_3(0) = 0$ למשל), הגוף יתמיד בסיבוב זה. תנועה זו תהיה יציבה אם"ם I_1 גדול או הקטן ביותר.

אם רוצים שגוף יתמיד בסיבוב סביב ציר שאינו ראשי, יש להפעיל מומנט $\vec{N} = \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{\omega}\times\left(I\vec{\omega}\right)$.

בהיעדר מומנט חיצוני ($\vec{N} = 0$), האנרגיה הקינטית של הגוף T נשמרת וכך גם התנע הזוויתי $\vec{L}$.

הגדרת זוויות אוילר:



$$R = R\left(\psi\hat{z}'\right)R\left(\theta\hat{x}''\right)R\left(\phi\hat{z}\right)$$

סיבוב כזה שקול לסיבוב סביב ציר יחיד (שאינו ידוע), בזווית Φ שמקיימת: $\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\phi + \psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

מטריצת סיבוב סביב ציר y בזווית α:
$$R(\alpha\hat{y}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(סיבובים סביב שאר הצירים – ימין למטה בריבוע הנוכחי.)

בהינתן מטריצה R שמתארת סיבוב כלשהו במרחב, זווית הסיבוב α נתונה ע"י: $\cos\alpha = (\text{trace}R - 1)/2$

המהירות הזוויתית בעזרת זוויות אוילר היא:
$$\vec{\omega}\big|_{body} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\psi\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta \\ \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$\vec{\omega}\big|_{space} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\phi\sin\theta \\ \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\cos\phi\sin\theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

אנרגיה קינטית של סביבון סימטרי ($I_1 = I_2$):
$$T = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2$$

יש להקפיד שטנזור האינרציה שבו משתמשים מחושב ביחס לנקודה המתאימה להגדרת מערכת הצירים. בסביבון כבד, למשל, צריך להתחשב בכך. (ר' *טנזורי אינרציה נפוצים*)

תנודות קטנות

התנאי לשיווי משקל הוא: $\forall i: \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$

נניח הלגרנז'יאן הוא: $L = \frac{1}{2}a_{ij}(\vec{q})\dot{q}_i\dot{q}_j - V(\vec{q})$

נפתח סביב נקודת שיווי משקל עד לסדר שני ונקבל:
$$L = \frac{1}{2}a_{ij}(\vec{q}_0)\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right|_{\vec{q}=\vec{q}_0}\cdot q_i q_j$$
$$= \frac{1}{2}T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}V_{ij}\cdot q_i q_j = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^t\mathbf{T}\dot{\vec{q}} - \frac{1}{2}\vec{q}^t\mathbf{V}\vec{q}$$

ונקבל משוואות תנועה מצומדות:
$$\sum_j T_{ij}\ddot{q}_j + V_{ij}q_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{V}\vec{q} = 0$$

על מנת לעבור לקואורדינטות נורמליות – פותרים את משוואת הערכים העצמיים: $\left|\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T}\right| = 0$

ומוצאים את התדירויות האופייניות $\{\omega_i\}$.

לכל תדירות פותרים את המערכת: $\left(\mathbf{V} - \omega_i^2\mathbf{T}\right)\vec{a}_i = 0$

מוצאים את $\vec{a}_i$, ומנרמלים מעל $\mathbf{T}$: $\vec{a}_i^t\mathbf{T}\vec{a}_j = \delta_{ij}$

בעזרתם בונים את המטריצה $\mathbf{A} = \left(\vec{a}_1 \mid \vec{a}_2 \mid \ldots \mid \vec{a}_n\right)$,

שמקיימת (אוטומטית): $\mathbf{A}^t\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}^t\mathbf{V}\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}^2$

כאשר $\boldsymbol{\omega}^2$ מטריצה אלכסונית עם ω_i^2 באלכסון.

הקואורדינטות הנורמליות הן: $\vec{Q} = \mathbf{A}^{-1}\vec{q} = \mathbf{A}^t\mathbf{T}\vec{q}$

והלגרנז'יאן בקואורדינטות האלה:
$$L = \frac{1}{2}\dot{Q}_i\dot{Q}_i - \frac{1}{2}\omega_i^2 Q_i Q_i = \frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}^t\dot{\vec{Q}} - \frac{1}{2}\vec{Q}^t\boldsymbol{\omega}^2\vec{Q}$$

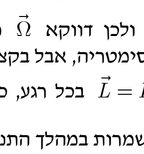
בעוד שהפיתרון עבור הקואורדינטות המקוריות הוא:
$$\vec{q} = \mathbf{A}\vec{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \sum_k \vec{a}_k Q_k$$
$$= \text{Re}\sum_k C_k\vec{a}_k e^{-i\omega_k t} = \sum_k c_k\vec{a}_k\cos\left(\omega_k t + \varphi\right)$$

פרצסיה של סביבון סימטרי

סביבון סימטרי חופשי ($I_1 = I_2, \vec{N} = 0$) – במערכת הגוף, גם $\vec{L}$ וגם $\vec{\omega}$ עושים פרצסיה סביב $\vec{\Omega}$ כאשר $\vec{\Omega} = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)\omega_3^0\hat{x}_3$ (הוקטור הוא בכיוון ציר הסימטרי), ו- ω_3^0 היא מהירות הסיבוב של הסביבון סביב ציר הסימטריה (קבועה). במערכת המעבדה, $\vec{L}$ קבוע ולכן דווקא $\vec{\Omega}$ מבצע פרצסיה סביבו. $\vec{\omega}$ עדיין עושה פרצסיה סביב ציר הסימטריה, אבל בקצב של $\Omega' = |L|/I_1$. בשני המקרים מתקיים $\vec{L} = I_1\left(\vec{\omega} + \vec{\Omega}\right)$ בכל רגע, כך ש- $\vec{L}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}$ נמצאים באותו מישור, והזוויות בין כולם נשמרות במהלך התנועה.

"חוק סנל" למעבר בין פוטנציאלים

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}\left(U_1 - U_2\right)}$$



(מתקבל מתוך שימור תנע ואנרגיה. נכון גם כאשר הפוטנציאל בעל סימטריה כדורית)

המשפט הויריאלי

עבור תנועה מחזורית בפוטנציאל $V \propto r^{n+1}$ עם מחזור τ מתקיים: $\langle T\rangle_\tau = \frac{n+1}{2}\cdot\langle V\rangle_\tau$

זהויות דלתא ואפסילון

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_i = \varepsilon_{ijk}A_j B_k, \;\; \delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0, \;\; \varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}, \;\; \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6, \;\; \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$